

Facoltà di SCIENZE
Anno Accademico 2021/22
Registro lezioni del docente GRECO ANTONIO

Attività didattica

ANALISI MATEMATICA 3 [SM/0027]

Periodo di svolgimento: *Secondo Semestre*

Docente titolare del corso: GRECO ANTONIO matr. 005969

Riepilogo registro docente:

GRECO ANTONIO matr. 005969

Docente interno - PROFESSORE ASSOCIATO

Stato registro docente: Bozza

Ore inserite: 80 ore

Ore previste dall'offerta didattica: 80 ore

Gruppi di studenti con i quali è stata svolta l'attività - ore per gruppo

- prevista per tutti gli studenti (senza gruppi associati) - 80 ore

Ore inserite per tipologia di attività

80 ore lezione :

- prevista per tutti gli studenti (senza gruppi associati) - 80 ore

Osservazioni:

Firma del docente titolare del corso:.....

Firma del presidente:.....

Data:.....

Dettaglio delle attività svolte:
ANALISI MATEMATICA 3 [SM/0027]

01/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Presentazione del corso

Descrizione attività:

Presentazione dei lineamenti del corso, con riferimento alla scheda ufficiale: obiettivi, programma, bibliografia, modalità di svolgimento degli esami.

01/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie

Descrizione attività:

Importanza delle equazioni differenziali. Forma normale. Ordine di un'equazione. Definizione di soluzione. Esempio: risoluzione dell'equazione $y' = y$.

02/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni differenziali prive di soluzioni

Descrizione attività:

Un'equazione a coefficienti discontinui può non avere alcuna soluzione: esempio con la funzione a gradino di Heaviside.

Richiami sulla derivata destra e sulla derivata sinistra. Condizioni per ottenere la derivata destra mediante il limite destro della derivata.

Richiami sul teorema di Darboux (la derivata assume tutti i valori intermedi).

02/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni a variabili separabili: procedimento risolutivo

Descrizione attività:

Procedimento risolutivo delle equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.

04/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni a variabili separabili: esempi scelti

Descrizione attività:

Risoluzione dell'equazione $y'(x) = my(x) + q$, con m, q costanti reali.

Risoluzione dell'equazione $y'(x) = a(x)y(x)$, con $a(x)$ funzione continua.

04/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Campo di direzioni. Equazioni lineari: introduzione

Descrizione attività:

Interpretazione geometrica dell'equazione $y'(x) = f(x, y(x))$ mediante il concetto di campo di direzioni.

Equazioni differenziali lineari: definizione.

Risoluzione delle equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale e a coefficienti continui, con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

08/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari: struttura dello spazio delle soluzioni

Descrizione attività:

Concetto di integrale generale di un'equazione differenziale.

Relazione tra l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare e quello dell'equazione omogenea associata.

08/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari: esempio illustrativo

Descrizione attività:

Soluzione dell'equazione differenziale del circuito RC in presenza di una forza elettromotrice sinusoidale.

Espressione della combinazione lineare $A \cos t + B \sin t$ in termini di $\sin(t+t_0)$ mediante costante di normalizzazione e costante di fase.

09/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Operatori differenziali lineari. Problema di Cauchy

Descrizione attività:

Operatore differenziale lineare L di ordine n : definizione. Struttura dell'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ly = 0$ (è uno spazio vettoriale).

Dimensione di tale spazio (enunciato). La prima e la seconda parte della dimostrazione saranno svolte il 15 ed il 16/03. La dimostrazione sarà poi ultimata nella lezione di venerdì 01/04/2022.

Il problema di Cauchy: definizione. Discussione dell'unicità della soluzione: studio di un esempio con molteplici soluzioni.

09/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La condizione di Lipschitz

Descrizione attività:

La condizione di Lipschitz rispetto alla variabile y per una funzione $f(x,y)$: due definizioni equivalenti. Motivazione della definizione, con riferimento all'unicità della soluzione del problema di Cauchy. Relazione fra la lipschitzianità e la limitatezza della derivata parziale di f rispetto ad y (se questa esiste).

11/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Unicità della soluzione del problema di Cauchy

Descrizione attività:

Formulazione integrale dell'equazione differenziale $y' = f(x,y(x))$.

Dimostrazione dell'unicità della soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione $y' = f(x,y(x))$ sotto l'ipotesi della lipschitzianità della funzione f rispetto alla variabile y . Nella successiva lezione del 16/03 si accennerà ad un'estensione del risultato alle equazioni lineari di ordine superiore al primo.

Studio di una semplice funzione $f(y)$ non lipschitziana: radice cubica di y .

Illustrazione grafica di un campo di direzioni nel piano con l'ausilio di un CAS (Computer Algebra System).

11/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

L'equazione dei moti armonici. Il wronskiano

Descrizione attività:

Determinazione, con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, dell'integrale generale dell'equazione dei moti armonici: $y'' = -\omega^2 y$. Il ragionamento sarà ripreso e sviluppato nella lezione del 16/03 con riferimento ad un'equazione lineare qualunque.

Determinante wronskiano: esempio specifico riferito all'equazione dei moti armonici.

15/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Derivata di un determinante

Descrizione attività:

Funzioni linearmente indipendenti: definizione.

Regola di derivazione del determinante di una matrice le cui componenti sono funzioni derivabili.

Enunciato del teorema di Jacobi (detto anche teorema del wronskiano).

15/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il teorema di Jacobi (teorema del wronskiano)

Descrizione attività:

Dimostrazione del teorema di Jacobi (detto anche teorema del wronskiano).

Calcolo della dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di una data equazione lineare omogenea: prima parte (fissate n soluzioni linearmente indipendenti, ogni soluzione si scrive come una loro combinazione lineare i cui coefficienti, a priori, possono essere variabili)

16/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Dimensione dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea

Descrizione attività:

Calcolo della dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di una data equazione lineare omogenea: seconda parte (fissate n soluzioni linearmente indipendenti, ogni soluzione si scrive come una loro combinazione lineare i cui coefficienti si dimostrano costanti).

Il ragionamento estende quello già fatto nella lezione di venerdì 11/03 con riferimento specifico all'equazione dei moti armonici.

16/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Non annullamento del wronskiano. Unicità per equazioni lineari di ordine n

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che il determinante wronskiano di un sistema di soluzioni linearmente indipendenti non si annulla in nessun punto.

Cenni al teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione lineare di ordine n , che riprende il corrispondente teorema per le equazioni del primo ordine dimostrato nella lezione di venerdì 11/03.

18/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Ricostruzione di una curva piana

Descrizione attività:

Indicazioni bibliografiche, con riferimento specifico al libro di testo. Richiami agli obiettivi formativi, così come indicati dalla scheda insegnamento, e con riferimento agli argomenti già trattati a lezione.

Applicazione della teoria dei sistemi di equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui alla ricostruzione di una curva piana a partire dalla sua curvatura.

18/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari a coefficienti costanti: il polinomio caratteristico

Descrizione attività:

Introduzione alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Definizione del polinomio caratteristico. Relazione fra le radici del polinomio caratteristico e le soluzioni dell'equazione differenziale. Semplici esempi con equazioni del secondo ordine.

22/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari a coefficienti costanti il cui polinomio caratteristico ha radici multiple

Descrizione attività:

Caratterizzazione analitica della molteplicità delle radici di un polinomio, e sua equivalenza con la molteplicità algebrica.

Risoluzione delle equazioni lineari a coefficienti costanti il cui polinomio caratteristico abbia radici multiple.

22/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti: esempi illustrativi

Descrizione attività:

Alcuni semplici esempi illustrativi del procedimento di Eulero per la risoluzione delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, incluso il caso in cui il polinomio caratteristico ha radici immaginarie.

Rappresentazione grafica delle soluzioni mediante animazioni. Uso di un CAS (Computer Algebra System) per la risoluzione simbolica delle equazioni differenziali.

23/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari non omogenee: il metodo della variazione delle costanti (1)

Descrizione attività:

Illustrazione del metodo della variazione delle costanti arbitrarie per la determinazione dell'integrale generale delle equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti continui, in forma normale.

23/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari non omogenee: il metodo della variazione delle costanti (2)

Descrizione attività:

Semplici applicazioni del metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Cenni al metodo di somiglianza.

25/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni del tipo di Eulero

Descrizione attività:

Risoluzione delle equazioni del tipo di Eulero mediante un cambiamento di variabile: semplici esempi. Osservazioni sulla degenerescenza di tali equazioni, e sulla conseguente impossibilità di scriverle in forma normale in un intorno dell'origine.

25/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Teoremi di esistenza

Descrizione attività:

Enunciato di alcuni teoremi di esistenza per il problema ai valori iniziali associato ad un'equazione del primo ordine: teorema di Peano, teorema di Cauchy, teorema di esistenza in grande. Discussione di qualche esempio mirante a mettere in luce il significato delle locuzioni "esistenza in piccolo" e "esistenza in grande".

29/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il teorema di Cauchy (1)

Descrizione attività:

Cenni al teorema di Peano. Dimostrazione del teorema di esistenza e unicità locale dalla soluzione del problema ai valori iniziali: prima parte. Definizione ricorsiva di una successione approssimante.

29/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il teorema di Cauchy (2)

Descrizione attività:

Dimostrazione del teorema di esistenza e unicità locale dalla soluzione del problema ai valori iniziali: seconda parte. Dimostrazione della convergenza uniforme della successione approssimante.

30/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il teorema di Cauchy (3)

Descrizione attività:

Dimostrazione del teorema di esistenza e unicità locale dalla soluzione del problema ai valori iniziali: terza parte. Dimostrazione del fatto che la funzione limite, definita precedentemente, soddisfa l'equazione differenziale data.

30/03/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Esistenza in grande

Descrizione attività:

Dimostrazione del teorema di esistenza in grande (esistenza globale) della soluzione del problema ai valori iniziali per un'equazione del primo ordine.

01/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Equazioni lineari: costruzione delle soluzioni linearmente indipendenti

Descrizione attività:

Uso del teorema di esistenza in grande per costruire n soluzioni linearmente indipendenti di una data equazione lineare omogenea di ordine n a coefficienti continui, in forma normale. Risulta così ultimata la dimostrazione del teorema enunciato il 09/03 sulla struttura dello spazio delle soluzioni.

01/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Convergenza puntuale

Descrizione attività:

Formulazione del problema del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Motivazioni della sua importanza, con riferimento alla dimostrazione del teorema di Cauchy. Esempi illustrativi delle difficoltà del problema. Nozione di convergenza puntuale di una successione di funzioni.

05/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La convergenza puntuale non conserva l'integrabilità

Descrizione attività:

Costruzione e discussione di una successione di funzioni integrabili il cui limite puntuale è una funzione non integrabile (la funzione di Dirichlet).

Osservazioni su tre diversi ruoli attribuiti di volta in volta al simbolo dell'uguaglianza: domanda, definizione, affermazione.

05/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La convergenza uniforme

Descrizione attività:

La convergenza uniforme: definizione. Illustrazione del concetto mediante un software per l'apprendimento e l'insegnamento della matematica.

Studio di una tipica successione che converge puntualmente ma non uniformemente: $f_k(x) = kx e^{-kx^2}$.

La convergenza uniforme conserva la limitatezza e la continuità: dimostrazione.

07/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che l'uniforme convergenza di una successione di funzioni continue è una condizione sufficiente affinché si possa passare al limite sotto il segno di integrale su di un intervallo chiuso e limitato.

Estensione del risultato al caso in cui la funzione integranda ha la forma $f(t, y_k(t))$ dove f è continua e y_k converge uniformemente.

La limitatezza del dominio di integrazione è essenziale: discussione di alcuni esempi in cui non si può passare al limite sotto il segno di integrale malgrado la convergenza uniforme.

Cenni al teorema della convergenza dominata.

Enunciato del criterio di Cauchy uniforme.

07/04/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:45**Ora fine:** 12:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Il criterio di Cauchy uniforme. Serie di funzioni

Descrizione attività:

Dimostrazione del criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una successione di funzioni.

Serie di funzioni: nozione di convergenza puntuale e di convergenza uniforme. Richiami sul criterio di Cauchy per le serie numeriche.

Convergenza totale di una serie di funzioni: due formulazioni equivalenti.

Dimostrazione del fatto che la convergenza totale di una serie di funzioni implica la sua convergenza uniforme. Discussione di un semplice esempio atto a dimostrare che non vale il viceversa.

Applicazione: la successione delle funzioni y_k definite per ricorrenza nella lezione del 30/03 converge uniformemente. Risulta così conclusa la dimostrazione del teorema di esistenza in piccolo della soluzione del problema di Cauchy.

08/04/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Proprietà elementari dell'uniforme convergenza

Descrizione attività:

Illustrazione di alcune proprietà elementari dell'uniforme convergenza, con riferimento alla successione delle potenze x^k sull'intervallo $(0,1)$ e con l'utilizzo di un software interattivo per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica:

- 1) l'uniforme convergenza in un insieme X sussiste anche nei sottoinsiemi di X ;
 - 2) la convergenza puntuale su di un insieme finito è anche uniforme;
 - 3) la convergenza uniforme su di un insieme X si mantiene aggiungendo ad X un ulteriore punto di convergenza.
-

08/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Scambio dei limiti

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che la convergenza uniforme di una successione di funzioni su di un intervallo (a,b) , eventualmente illimitato, consente di invertire l'ordine dei limiti per $k \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow b^-$ senza cambiare il risultato. Estensione alle successioni di successioni numeriche.

Deduzione della continuità della funzione limite come corollario del teorema precedente.

11/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Derivazione termine a termine: premesse

Descrizione attività:

Uso del teorema sullo scambio dei limiti per dimostrare che la convergenza della serie geometrica sull'intervallo $(-1,1)$ non è uniforme.

Studio di un semplice esempio che mostra come la funzione limite di una successione uniformemente convergente di funzioni derivabili possa non essere derivabile.

11/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Derivazione termine a termine: condizione sufficiente

Descrizione attività:

Enunciato e dimostrazione del teorema di derivazione termine a termine delle successioni di funzioni di una variabile reale. Estensione alle funzioni di classe C^1 in due variabili.

12/04/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Introduzione alle serie di potenze

Descrizione attività:

Definizione delle serie di potenze. Esempi semplici. Convergenza nell'origine. Concetto di intervallo di convergenza.

Complementi: l'uguaglianza $0^0 = 1$ consente di scrivere i polinomi usando il simbolo di sommatoria, e vale anche per le serie di potenze. Significato della locuzione: 0^0 è indeterminato.

12/04/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Convergenza totale delle serie di potenze

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che se una serie di potenze converge in un punto $x \neq 0$ allora converge totalmente nell'intervallo $[-r, r]$ qualunque sia $r \in (0, |x|)$.

Complementi: limite superiore di una successione numerica. Definizione, proprietà, esempi. Ulteriori proprietà saranno illustrate nella lezione del 20/04/2022.

13/04/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 11:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Il raggio di convergenza

Descrizione attività:

Determinazione del raggio di convergenza di una serie di potenze di coefficienti a_k a partire dal limite superiore della radice k -esima di $|a_k|$.

Determinazione del raggio di convergenza di una serie di potenze di coefficienti a_k a partire dal limite (qualora esista) del rapporto fra $|a_k|$ e $|a_{k+1}|$.

13/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Integrazione e derivazione per serie

Descrizione attività:

Teoremi di derivazione e integrazione termine a termine per le serie di potenze. Esempi notevoli con la funzione esponenziale, la funzione logaritmica e le funzioni circolari.

20/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Proprietà del limite superiore

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che il limite superiore del prodotto fra $|a_k|$ ed un coefficiente b_k che tende ad 1 coincide con il limite superiore di $|a_k|$.

Similmente si dimostra che anche il limite superiore della potenza $|a_k|^{b_k}$ coincide con il limite superiore di $|a_k|$ (solo enunciato).

20/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Funzioni analitiche

Descrizione attività:

Funzioni analitiche: definizione; analiticità della somma di una serie di potenze; esempi di funzioni di classe C^∞ che non sono analitiche.

22/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Convergenza di una serie di Taylor alla funzione generatrice

Descrizione attività:

Il problema della convergenza di una serie di Taylor alla funzione generatrice: condizione sufficiente. Applicazione alla funzione esponenziale. Similmente si possono trattare le funzioni seno e coseno (lasciate agli studenti come esercizio).

Estensione al campo complesso: preliminari. Definizione di spazio vettoriale normato. Assiomi della norma. Esempi: il campo reale, il campo complesso, lo spazio euclideo n-dimensionale. Metrica indotta dalla norma. Definizione di limite di una successione in uno spazio metrico.

22/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La serie esponenziale nel campo complesso

Descrizione attività:

Somma di una serie in uno spazio vettoriale normato. Definizione di spazio metrico completo. Dimostrazione della completezza del campo complesso. Applicazione: la serie esponenziale converge nel campo complesso e definisce l'esponenziale complesso. Similmente si definiscono seno e coseno nel campo complesso, e si verifica la formula di Eulero (verifica lasciata per esercizio).

Cenni storici alle origini delle serie di Fourier, nel bicentenario dalla pubblicazione della "Théorie analytique de la chaleur".

29/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Prerequisiti per le serie di Fourier

Descrizione attività:

Osservazioni elementari:

- 1) la somma di una serie di Fourier è una funzione periodica;
- 2) la somma di una serie di Fourier convergente uniformemente è una funzione continua;
- 3) qualunque funzione avente per dominio l'intervallo $(-\pi, \pi]$ si può estendere per periodicità a tutto l'asse reale. Esempi;
- 4) l'integrale di una funzione dispari sull'intervallo $[-r, r]$ è nullo;
- 5) l'integrale del prodotto $f(x) g(x)$ ha le proprietà formali di un prodotto scalare;
- 6) relazioni di ortogonalità fra le funzioni $\cos kx$ e $\sin nx$.

Espressione dei coefficienti di Fourier di una funzione data f .

29/04/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Convergenza uniforme della serie di Fourier

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che l'usuale espressione dei coefficienti di Fourier è una condizione necessaria per la convergenza uniforme della serie alla funzione generatrice.

Cenni storici alle origini della definizione dell'integrale di Riemann, anche con riferimento alla testimonianza resa da Dini nel testo "Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali".

Enunciato di una condizione sufficiente per la convergenza uniforme della serie di Fourier (funzione generatrice periodica, continua, e di classe C^1 a tratti).

Presentazione della disuguaglianza di Bessel e dell'uguaglianza di Parseval.

02/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La disuguaglianza di Bessel

Descrizione attività:

Definizione di funzione continua a tratti.

Dimostrazione della disuguaglianza di Bessel per le funzioni continue a tratti.

02/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Teorema di Riemann-Lebesgue. Cenni al teorema di Fejér e alla somma secondo Cesàro

Descrizione attività:

Enunciato del teorema di Riemann-Lebesgue, e dimostrazione nel caso particolare delle funzioni continue a tratti (segue immediatamente dalla disuguaglianza di Bessel).

Espressione della somma di $\cos kx$ per k che va da 1 a n .

Cenni al teorema di Fejér e alla somma di una serie secondo Cesàro.

Enunciato di uno dei teoremi oggi noti sulla convergenza puntuale della serie di Fourier. La dimostrazione sarà svolta nella lezione del 03/05/2022.

03/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Convergenza puntuale della serie di Fourier

Descrizione attività:

Dimostrazione di un teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier. Applicazione: sviluppo della funzione $f(x)=x$ sull'intervallo $(-\pi,\pi)$

03/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Serie di Leibniz. Convergenza uniforme della serie di Fourier

Descrizione attività:

Deduzione della somma della serie di Leibniz dallo sviluppo di Fourier della funzione $f(x)=x$.

Dimostrazione di un teorema sulla convergenza uniforme della serie di Fourier.

Integrabilità termine a termine della serie di Fourier di una funzione continua a tratti: enunciato. La dimostrazione sarà svolta nella lezione del 04/05/2022.

04/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Integrazione termine a termine della serie di Fourier

Descrizione attività:

Determinazione dello sviluppo di Fourier della funzione $f(x)=x^2$ sull'intervallo $[-\pi,\pi]$, e conseguente deduzione della somma di alcune serie numeriche notevoli.

Integrazione per parti di una funzione continua a tratti. Applicazione: integrazione termine a termine della serie di Fourier di una funzione continua a tratti.

04/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Uguaglianza di Parseval. Cenni ai problemi ai limiti. Definizione degli spazi di Lagrange.

Descrizione attività:

Dimostrazione dell'uguaglianza di Parseval per le funzioni di classe $C^1([-π,π])$ soddisfacenti la condizione $f(-π)=f(π)$.

Cenni ai problemi ai limiti, con particolare riferimento all'equazione $y''=-λy$ (problema agli autovalori) e alla sua interpretazione fisica nella teoria della corda vibrante.

Definizione degli spazi di Lagrange $C^k([a,b])$ e della loro norma canonica.

06/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La completezza degli spazi di Lagrange

Descrizione attività:

Verifica del fatto che la norma canonica dello spazio $C^k([a,b])$ soddisfa gli assiomi necessari per potersi dire norma.

Relazione fra la convergenza di una successione nello spazio $C^k([a,b])$ e la convergenza uniforme.

Dimostrazione della completezza degli spazi $C^k([a,b])$.

Cenni ad alcuni funzionali integrali aventi per dominio lo spazio $C^1([a,b])$: il funzionale lunghezza del grafico e il funzionale dell'energia, detto anche funzionale di Dirichlet. Calcolo della derivata del funzionale di Dirichlet lungo una direzione data.

06/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Definizione delle norme-p in R^N . Definizione e conseguenze dell'equivalenza fra norme

Descrizione attività:

Espressione della metrica canonica dello spazio $C^k([a,b])$, in accordo con la definizione indicata nella lezione del 22/04/2022 a partire da una norma data.

Definizione delle norme-p in R^N . Cenni all'origine delle norme-p, con riferimento all'opera di Hermann Minkowski: "Diophantische Approximationen" (1907).

Definizione dell'equivalenza fra norme. Conseguenze dell'equivalenza tra norme ai fini della convergenza delle successioni e della completezza di uno spazio normato.

09/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowski

Descrizione attività:

Dimostrazione della disuguaglianza di Young e interpretazione geometrica.

Dimostrazione della disuguaglianza di Hölder discreta.

Dimostrazione della disuguaglianza di Minkowski per le norme-p in \mathbb{R}^n .

09/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Applicazioni lipschitziane. Proprietà di continuità della norma

Descrizione attività:

Definizione di applicazione lipschitziana da uno spazio metrico X ad uno spazio metrico Y.

Proprietà di continuità della norma: 1) qualunque norma in uno spazio vettoriale è lipschitziana rispetto alla metrica indotta da sé stessa; 2) qualunque norma nello spazio vettoriale \mathbb{R}^n è continua rispetto alla topologia canonica.

Cenni all'equivalenza di tutte le norme nello spazio vettoriale \mathbb{R}^n .

Verifica del fatto che la norma-infinito in \mathbb{R}^n è il limite della norma-p per $p \rightarrow \infty$.

10/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il teorema delle contrazioni (1/3)

Descrizione attività:

Interpretazione dell'equazione integrale, già introdotta nella lezione di venerdì 11/03, come condizione di punto fisso per un operatore opportuno.

Definizione di contrazione di uno spazio metrico, e dimostrazione dell'unicità dell'eventuale punto fisso.

Enunciato del teorema delle contrazioni.

Cenni all'identità del parallelogramma, come condizione necessaria affinché una data norma provenga da un prodotto scalare.

10/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Il teorema delle contrazioni (2/3)

Descrizione attività:

Dimostrazione del teorema delle contrazioni. Applicazione: esistenza e unicità in piccolo della soluzione del problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale.

11/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 11:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Il teorema delle contrazioni (3/3)

Descrizione attività:

Cenni al teorema di Fréchet - von Neumann - Jordan (l'identità del parallelogramma è sufficiente affinché una data norma provenga da un prodotto scalare).

Esempio illustrativo dell'uso del teorema delle contrazioni per la risoluzione numerica di un'equazione: risoluzione dell'equazione $x = \cos x$.

11/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:45**Ora fine:** 12:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

L'integrale di Lebesgue (1/2)

Descrizione attività:

Somma superiore e somma inferiore di Lebesgue. Definizione dell'integrale di Lebesgue di una funzione limitata su di un intervallo limitato, a partire da una partizione del codominio. La definizione generale sarà presentata nella lezione del 24/05/2022.

Alcune motivazioni a sostegno dell'utilizzo dell'integrale di Lebesgue:

1. Estensione dell'integrale di Riemann (su di un intervallo limitato). Esempio di funzione integrabile in senso improprio sull'intervallo $(0, +\infty)$ e non sommabile nel senso di Lebesgue: $(\sin x)/x$.
 2. Passaggio al limite sotto il segno di integrale. Cenni al teorema della convergenza limitata. Esempio riferito alla successione introdotta nella lezione del 05/04/2022 e convergente alla funzione di Dirichlet.
-

13/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Funzioni semplici

Descrizione attività:

Nozione di funzione semplice. Funzioni a gradini. Integrale di Lebesgue di una funzione semplice non negativa.

Deduzione del teorema della convergenza limitata, enunciato nella lezione di mercoledì 11/05/2022, da quello della convergenza dominata, enunciato il 07/04/2022.

13/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La misura di Peano-Jordan

Descrizione attività:

Intervalli n-dimensionali. Cubi diadici. Plurintervalli. Definizione della misura di Peano-Jordan. Espressione della misura di Peano-Jordan di alcuni semplici luoghi geometrici.

Esempio di un insieme non misurabile: l'intersezione $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. La misurabilità secondo Lebesgue dello stesso insieme verrà dimostrata il 16/05/2022.

16/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

I cubi diadici

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che i cubi diadici sono sufficienti per definire la misura di Peano-Jordan. Confronto fra la teoria e la sua presentazione elementare su di un testo della scuola primaria.

16/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:45**Ora fine:** 12:30**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

La misura di Lebesgue

Descrizione attività:

Definizione della misura di Lebesgue nell'impostazione originale (1902) e cioè con l'utilizzo di una successione di intervalli n-dimensionali. Misura esterna e misura interna.

Applicazione: gli insiemi numerabili hanno misura di Lebesgue nulla. Esempio: l'insieme dei numeri razionali, che, come già visto nella lezione del 13/05/2022, non è misurabile secondo Peano-Jordan, è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla.

Un'altra definizione della misura di Lebesgue, che si ritrova frequentemente nei libri di testo, e che utilizza aperti e compatti per approssimare gli insiemi misurabili.

17/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Misura degli insiemi illimitati. Confronto fra la misura di Lebesgue e quella di Peano-Jordan

Descrizione attività:

Definizione della proprietà di misurabilità secondo Lebesgue degli insiemi illimitati, e espressione della misura di tali insiemi. Semplici esempi, legati alla definizione dell'integrale generalizzato o improprio.

Confronto fra la misura di Lebesgue e quella di Peano-Jordan.

17/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Insiemi notevoli

Descrizione attività:

Costruzione di un insieme avente misura di Lebesgue positiva e interno vuoto.

Definizione dell'insieme di Vitali (non misurabile).

18/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

L'insieme di Vitali e le proprietà di una misura positiva

Descrizione attività:

Dimostrazione della non misurabilità dell'insieme di Vitali. Cenni alle proprietà di una misura positiva e agli spazi mensurali. Gli insiemi misurabili secondo Lebesgue costituiscono una sigma-algebra.

18/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Confronto fra misura interna e misura esterna. Definizioni equivalenti della misura di Lebesgue

Descrizione attività:

Dimostrazione del fatto che la misura interna di un insieme limitato non supera la misura esterna.

Cenni all'equivalenza fra la definizione di Lebesgue (1902) della misura e la definizione adottata dal libro di testo, basata sugli aperti e sui compatti.

20/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La continuità della misura. Subadditività e superadditività

Descrizione attività:

Equivalenza fra la continuità della misura e la numerabile additività. Studio di un controesempio volto a dimostrare che la misura dell'intersezione di una successione decrescente di insiemi misurabili non è, in generale, uguale al limite delle loro misure. La tesi, tuttavia, vale se almeno uno degli insiemi considerati ha misura finita.

Dimostrazione della subadditività della misura di Lebesgue sugli aperti, e della superadditività finita sui compatti.

20/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

La numerabile additività. L'insieme di Cantor

Descrizione attività:

Dimostrazione della numerabile additività della misura di Lebesgue.

Definizione dell'insieme di Cantor. Calcolo della sua misura e determinazione della sua cardinalità.

23/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 11:45

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Funzioni misurabili

Descrizione attività:

Alcune definizioni, equivalenti fra loro, delle funzioni misurabili.

Esempio di una funzione non misurabile.

Dimostrazione della sommabilità, su di un intervallo limitato, di qualunque funzione misurabile limitata.

Esempio di una funzione, misurabile e limitata, non sommabile su di un intervallo illimitato: riferimento alla funzione $(\sin x)/x$ già presentata nella lezione di mercoledì 11/05/2022.

Dimostrazione della misurabilità di qualunque funzione continua.

23/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Proprietà delle funzioni misurabili

Descrizione attività:

Misurabilità della somma, della differenza, del prodotto e del rapporto di due funzioni misurabili (enunciato). Dimostrazione della misurabilità della somma di due funzioni misurabili.

Dimostrazione della misurabilità della funzione definita come limite inferiore di una successione di funzioni misurabili.

Dimostrazione della misurabilità della funzione composta di una funzione misurabile ed una continua. Cenni alle funzioni di Carathéodory.

24/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 10:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

L'integrale di Lebesgue (2/2). Misurabilità della derivata

Descrizione attività:

Definizione dell'integrale di Lebesgue di una funzione misurabile f , eventualmente illimitata, esteso ad un insieme misurabile E , eventualmente illimitato (e non necessariamente un intervallo). La definizione estende quella già presentata nella lezione di giovedì 11/05/2022.

Esempi di integrazione di funzioni semplici (che assumono un numero finito di valori).

Espressione della funzione integranda f come differenza tra la sua parte positiva e la sua parte negativa.

Dimostrazione della misurabilità della funzione $f'(x)$, derivata di una funzione derivabile $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$.

24/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 10:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Interpretazione geometrica dell'integrale di Lebesgue. Confronto con l'integrale di Riemann. Teorema della convergenza monotona (1/2)

Descrizione attività:

Interpretazione geometrica dell'integrale di Lebesgue. Confronto con l'integrale di Riemann.

Dimostrazione del teorema della convergenza monotona a partire dall'interpretazione geometrica dell'integrale di Lebesgue. Controesempi volti a sottolineare l'importanza delle ipotesi.

25/05/2022 - lezione -**Docente:** GRECO ANTONIO**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 11:45**Ore accademiche:** 1**Titolo attività:**

Teorema della convergenza monotona (2/2)

Descrizione attività:

Il teorema della convergenza monotona per una successione decrescente di funzioni $f_n \geq 0$.

Dimostrazione riferita alla continuità della misura (lezione del 20/05/2022). Controesempio volto ad illustrare l'importanza della sommabilità delle funzioni f_n .

25/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 11:45

Ora fine: 12:30

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Il lemma di Fatou e il teorema della convergenza dominata

Descrizione attività:

Enunciato e dimostrazione del lemma di Fatou.

Enunciato e dimostrazione del teorema della convergenza dominata.

27/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 10:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Funzioni definite mediante integrali

Descrizione attività:

Uso dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale per stabilire la continuità e la derivabilità di una funzione definita mediante un integrale dipendente da un parametro. Esempi. Cenni ad alcune trasformate integrali.

27/05/2022 - lezione -

Docente: GRECO ANTONIO

Ora inizio: 10:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 1

Titolo attività:

Proprietà dell'integrale. I teoremi di Fubini e di Tonelli

Descrizione attività:

Sintesi delle principali proprietà dell'integrale di Lebesgue.

Enunciato del teorema di Fubini.

Enunciato del teorema di Tonelli.

Esempio illustrativo dell'importanza dell'integrabilità della funzione integranda ai fini della validità del teorema di Fubini.
