

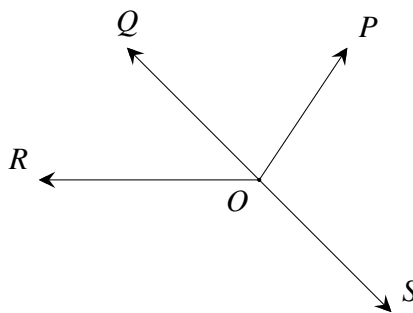
Capitolo 4

Vettori, coordinate e geometria

In questo capitolo vedremo come, passando per i cosiddetti vettori geometrici, si possano introdurre nel piano e nello spazio sistemi di coordinate che permettono la traduzione di oggetti e problemi geometrici in oggetti numerici e problemi algebrici. Tale costruzione, oltre ad essere di fondamentale importanza per le applicazioni alla grafica, ci permetterà di introdurre alcune nozioni basilari della cosiddetta *algebra lineare* che saranno approfondite nei capitoli successivi e che presentano a loro volta numerose applicazioni in tutte le scienze applicate e in informatica in particolare.

4.1 Vettori geometrici

Un **vettore geometrico applicato nel piano** è un segmento orientato che va da un punto fissato O verso un secondo punto P del piano, come nel disegno seguente¹.

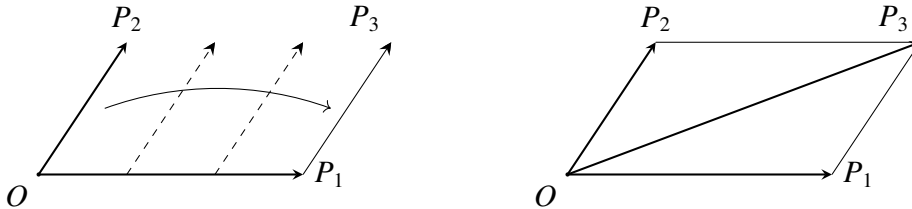


Analogamente, parliamo di **vettori geometrici applicati nello spazio** se il punto P (e quindi il segmento) è libero di variare in tutto lo spazio tridimensionale. In entrambi i casi il vettore sarà denotato con \vec{OP} . Si noti che il punto finale P può essere uguale a O , ovvero il vettore può essere “schiacciato” sul punto O .

¹L'orientazione viene messa in evidenza con una freccia

I vettori orientati sono importanti in fisica, dove vengono usati per rappresentare forze applicate sul punto O . Ad esempio si può immaginare che in O si trovi un oggetto sul quale viene esercitata una forza che lo “trascina” nella direzione e nel verso dati dalla freccia, mentre l'intensità della forza esercitata è rappresentata dalla lunghezza del segmento.

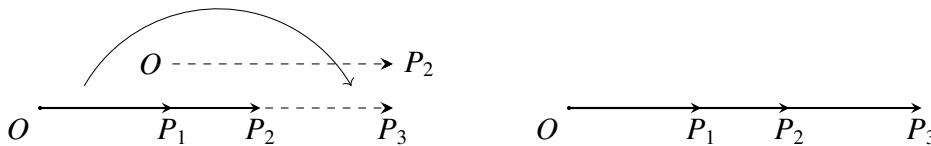
Con questa interpretazione, è naturale chiedersi cosa succede quando su O si esercitano contemporaneamente due forze rappresentate da due vettori geometrici \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 . In tal caso si verifica sperimentalmente che la forza totale “percepita” da O è quella rappresentata dal terzo vettore \vec{OP}_3 ottenuto nel modo seguente. Si trasla parallelamente uno dei due vettori, diciamo \vec{OP}_2 , in modo da spostare il suo punto di applicazione da O nel punto finale P_1 dell'altro vettore e si individua così il punto P_3 . Si noti che si otterrebbe lo stesso punto se traslassimo invece \vec{OP}_1 spostando il suo punto di applicazione in P_2 . Dal momento che \vec{OP}_3 rappresenta la forza totale esercitata su O quando si applicano contemporaneamente \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 , è naturale pensare \vec{OP}_3 come la somma di \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 . Scriveremo cioè



$$\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$$

definendo in tal modo un'operazione di somma sull'insieme dei vettori geometrici (del piano o dello spazio).

Per vettori che non hanno la stessa direzione, si osserva che OP_3 è la diagonale del parallelogramma che ha OP_1 e OP_2 come lati (si parla infatti anche di **regola del parallelogramma**). Il metodo descritto funziona comunque anche per sommare due vettori che hanno la stessa direzione:

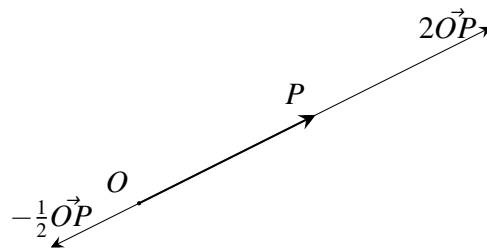


$$\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$$

Un'altra operazione che si può introdurre nell'insieme dei vettori geometrici è il prodotto del vettore per un numero reale: nel contesto delle forze, l'idea è quella di rappresentare una variazione dell'intensità e eventualmente del verso della forza rappresentata dal vettore.

Più precisamente, dati un vettore geometrico \vec{OP} e un numero reale $c \in \mathbb{R}$, definiamo $c \cdot \vec{OP}$ come il vettore che sta sulla stessa retta a cui appartiene \vec{OP} , ma avente

- (1) stesso verso e lunghezza c volte la lunghezza di \vec{OP} , se c è positivo;
- (2) verso opposto e lunghezza $-c$ volte quella di \vec{OP} , se c è negativo;
- (3) lunghezza nulla se $c = 0$, cioè $0\vec{OP} = \vec{OO}$.



In questo contesto, i numeri reali si chiamano anche **scalari**.

Ora, come sappiamo e abbiamo visto in vari esempi nei capitoli precedenti, ogni volta che si introducono delle operazioni su un insieme è bene conoscere le proprietà di cui godono tali operazioni. Per quelle che abbiamo appena introdotto, si può verificare (con dimostrazioni di geometria euclidea, che omettiamo) che valgono le seguenti:

- (1) La somma è *associativa*:

$$(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) + \vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + (\vec{OP}_2 + \vec{OP}_3). \quad (4.1)$$

- (2) La somma è *commutativa*:

$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_2 + \vec{OP}_1. \quad (4.2)$$

- (3) Il vettore \vec{OO} è l'elemento neutro della somma:

$$\vec{OP} + \vec{OO} = \vec{OO} + \vec{OP} = \vec{OP}. \quad (4.3)$$

- (4) Per ogni vettore \vec{OP} , il vettore $(-1)\vec{OP}$ (ovvero il vettore che si ottiene da \vec{OP} semplicemente invertendo il verso, senza modificare direzione e lunghezza) è il suo inverso additivo (o opposto):

$$\vec{OP} + (-1)\vec{OP} = (-1)\vec{OP} + \vec{OP} = \vec{OO} \quad (4.4)$$

(5) Dati due numeri reali c_1, c_2 e un vettore \vec{OP} , si ha

$$c_1(c_2\vec{OP}) = (c_1c_2)\vec{OP} \quad (4.5)$$

(una sorta di proprietà associativa del prodotto).

(6) Per ogni vettore \vec{OP} , si ha

$$1\vec{OP} = \vec{OP} \quad (4.6)$$

ovvero il numero 1 funge da elemento neutro rispetto al prodotto per scalari.

(7) Dati due numeri reali c_1, c_2 e un vettore \vec{OP} , si ha

$$(c_1 + c_2)\vec{OP} = c_1\vec{OP} + c_2\vec{OP}. \quad (4.7)$$

(8) Dati un numero reale c e due vettori \vec{OP}_1, \vec{OP}_2 si ha

$$c(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) = c\vec{OP}_1 + c\vec{OP}_2. \quad (4.8)$$

(le ultime due ci dicono che vale la proprietà distributiva rispetto alla somma di numeri reali o rispetto alla somma di vettori).

Osservazione 4.1. Ispirati dall'esempio dei vettori geometrici, si definisce **spazio vettoriale** un qualunque insieme i cui elementi possano essere sommati tra loro e moltiplicati per numeri reali (o più in generale per gli elementi di un campo), in modo che valgano proprietà analoghe alle (4.1)-(4.8). Tuttavia in questo corso non approfondiamo tale approccio astratto.

Come esempio di applicazione delle proprietà appena elencate, mostriamo che in una uguaglianza tra vettori, esattamente come si fa in un'uguaglianza tra numeri, si possono "spostare i vettori" da un membro all'altro cambiandoli di segno:

$$\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = \vec{OP}_3 \rightarrow \vec{OP}_1 = \vec{OP}_3 - \vec{OP}_2$$

dove, come si fa anche per i numeri, stiamo scrivendo $\vec{OP}_3 - \vec{OP}_2$ come forma semplificata di $\vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$.

Per vederlo, sommiamo il vettore $(-1)\vec{OP}_2$ ad entrambi i membri:

$$(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) + (-1)\vec{OP}_2 = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$

e applichiamo la proprietà associativa (4.1) al primo membro:

$$\vec{OP}_1 + (\vec{OP}_2 + (-1)\vec{OP}_2) = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2.$$

Ora applichiamo la proprietà (4.4) che afferma che $(-1)\vec{OP}_2$ è l'opposto di \vec{OP}_2 per ottenere

$$\vec{OP}_1 + \vec{OO} = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$

e infine applichiamo la (4.3) che ci dice che il vettore nullo funge da elemento neutro:

$$\vec{OP}_1 = \vec{OP}_3 + (-1)\vec{OP}_2$$

come volevamo.

4.2 Coordinate

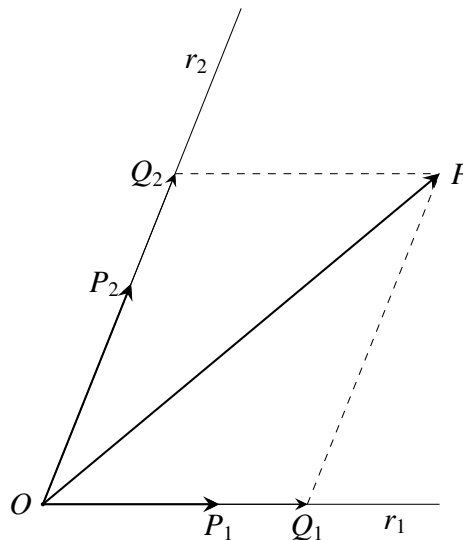
Consideriamo ora due vettori geometrici \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 nel piano, e supponiamo che \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 non abbiano la stessa direzione.

Affermiamo che ogni altro vettore \vec{OP} può essere ottenuto sommando multipli opportuni di \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 , ovvero

$$\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$$

dove c_1, c_2 sono opportuni numeri reali.

Questo può essere visto graficamente. Come nel disegno seguente, prolunghiamo i vettori \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 disegnando le due rette r_1 e r_2 . Proiettiamo quindi il punto P su r_1 seguendo la direzione parallela a \vec{OP}_2 , e chiamiamo il punto proiettato Q_1 . Analogamente, proiettiamo il punto P su r_2 seguendo la direzione parallela a \vec{OP}_1 , e chiamiamo il punto proiettato Q_2 .

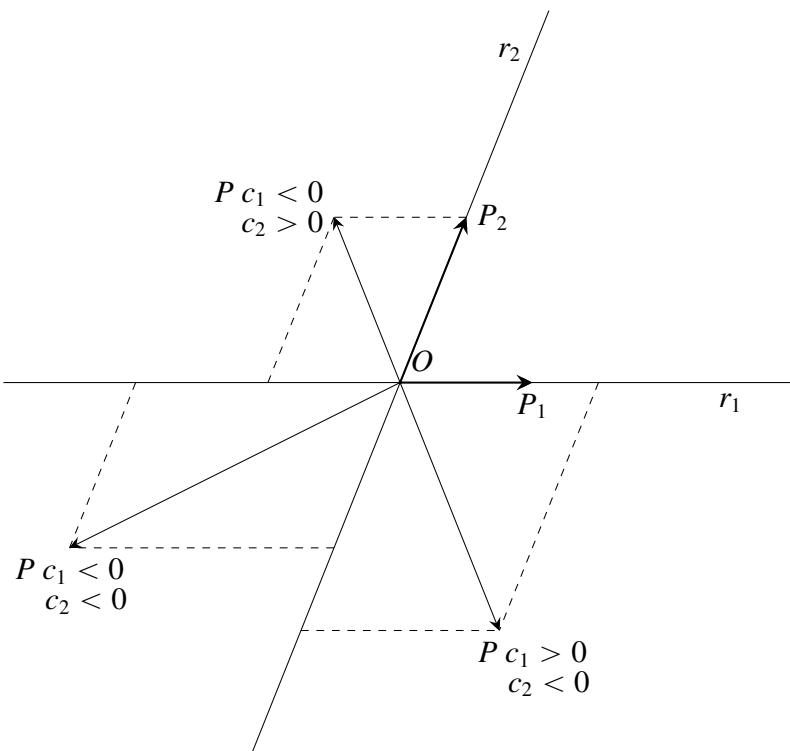


Avendo fatto le due proiezioni parallelamente a $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$, risulta determinato un parallelogramma che ha $O\vec{Q}_1$ e $O\vec{Q}_2$ come lati e $O\vec{P}$ come diagonale. Quindi per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $O\vec{P} = O\vec{Q}_1 + O\vec{Q}_2$.

Ma dal momento che $O\vec{Q}_1$ si trova sulla stessa retta di $O\vec{P}_1$ e per definizione di prodotto dei vettori per i numeri reali, esisterà un numero reale c_1 tale che $O\vec{Q}_1 = c_1 O\vec{P}_1$. Qui c_1 dipende solamente dal rapporto tra la lunghezza di $O\vec{Q}_1$ e quella di $O\vec{P}_1$ e dal loro verso. Analogamente esisterà un numero reale c_2 tale che $O\vec{Q}_2 = c_2 O\vec{P}_2$ (dove c_2 dipende dal rapporto tra la lunghezza di $O\vec{Q}_2$ e quella di $O\vec{P}_2$ e dal loro verso).

Abbiamo quindi concluso, come volevamo, che $O\vec{P} = c_1 O\vec{P}_1 + c_2 O\vec{P}_2$.

Si noti che, nella situazione considerata nel disegno, $c_1, c_2 > 0$ in quanto $O\vec{Q}_1$ e $O\vec{Q}_2$ hanno lo stesso verso di $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$ rispettivamente. In generale, la stessa costruzione può essere effettuata per qualunque vettore $O\vec{P}$ del piano e i coefficienti c_1 e c_2 potranno anche essere negativi² a seconda del quadrante nel quale si trova $O\vec{P}$, ovvero a seconda che la proiezione di P sulle rette r_1, r_2 cada dalla stessa parte o dalla parte opposta dei punti P_1 e P_2 .

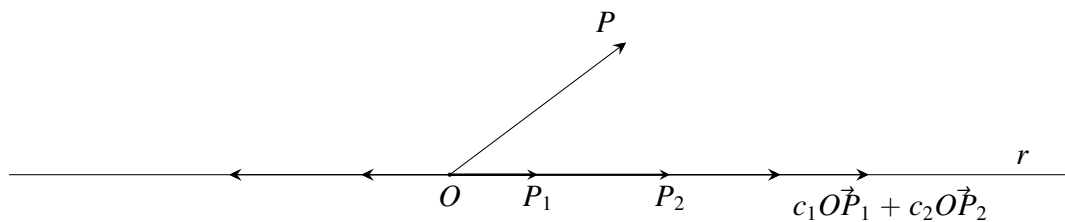


In ogni caso si avrà sempre $O\vec{P} = c_1 O\vec{P}_1 + c_2 O\vec{P}_2$.

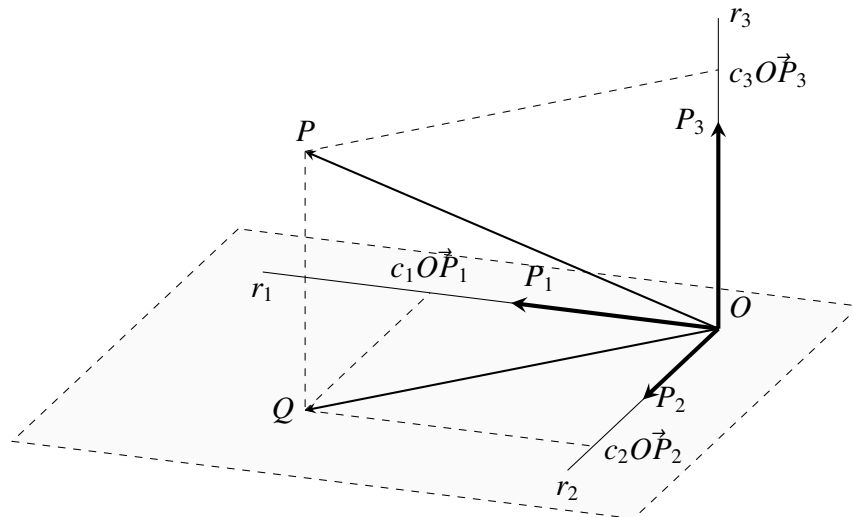
²Può essere anche $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$. Nel primo caso, si ha $O\vec{P} = c_2 O\vec{P}_2$, nel secondo $O\vec{P} = c_1 O\vec{P}_1$. Cioè $O\vec{P}$ non sta all'interno di uno dei quadranti in cui le rette r_1, r_2 dividono il piano, ma sta sulla retta r_2 (se $O\vec{P} = c_2 O\vec{P}_2$) o sulla retta r_1 (se $O\vec{P} = c_1 O\vec{P}_1$).

Definizione 4.2. Una coppia \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 di vettori non allineati nel piano si dice **base**. La coppia (c_1, c_2) di numeri reali tale che $\vec{OP} = c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$ si dice la **coppia delle coordinate** del vettore \vec{OP} rispetto a tale base (sottointendendo la base fissata, scriveremo anche $\vec{OP} \equiv (c_1, c_2)$).

Osservazione 4.3. Si noti che se i due vettori \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 stanno sulla stessa retta r , allora non è più vero che ogni vettore \vec{OP} si può scrivere come loro combinazione. Infatti, qualunque multiplo $c_1\vec{OP}_1$ di \vec{OP}_1 sta ancora sulla retta r . Analogamente qualunque multiplo $c_2\vec{OP}_2$ di \vec{OP}_2 sta su r . Quindi starà su r anche la somma $c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2$, e non riusciremo mai a ottenere i vettori \vec{OP} che stanno fuori dalla retta come combinazione di \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 .



Un risultato analogo a quello appena visto per i vettori nel piano può essere ottenuto anche nel caso dei vettori geometrici nello spazio tridimensionale. In questo caso non dobbiamo però partire da una coppia di vettori non allineati ma da una terna di vettori \vec{OP}_1 , \vec{OP}_2 e \vec{OP}_3 che non stiano tutti e tre sullo stesso piano. In questo caso è facile vedere graficamente, utilizzando proiezioni come abbiamo fatto nel caso di due vettori nel piano, che ogni vettore \vec{OP} dello spazio può essere scritto come combinazione $c_1\vec{OP}_1 + c_2\vec{OP}_2 + c_3\vec{OP}_3$.



Come rappresentato nel disegno, si proietta il punto P sul piano su cui stanno $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$ seguendo la direzione di $O\vec{P}_3$ e si individua così un punto Q . Proiettando poi P sulla retta r_3 parallelamente al vettore $O\vec{Q}$, risulta individuato un parallelogramma, che ci dice che $O\vec{P}$ si scrive come somma $O\vec{P} = O\vec{Q} + c_3O\vec{P}_3$ di $O\vec{Q}$ e di un opportuno multiplo $c_3O\vec{P}_3$ di $O\vec{P}_3$. A questo punto si osserva che $O\vec{Q}$, stando sul piano di $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$ si scriverà come loro combinazione lineare $O\vec{Q} = c_1O\vec{P}_1 + c_2O\vec{P}_2$, e sostituendo nella $O\vec{P} = O\vec{Q} + c_3O\vec{P}_3$ si conclude che $O\vec{P} = c_1O\vec{P}_1 + c_2O\vec{P}_2 + c_3O\vec{P}_3$.

In modo analogo a quanto già fatto per vettori geometrici del piano, possiamo allora dare la seguente

Definizione 4.4. Una terna $O\vec{P}_1, O\vec{P}_2, O\vec{P}_3$ di vettori non complanari nello spazio si dice **base**. La terna (c_1, c_2, c_3) di numeri reali tale che $O\vec{P} = c_1O\vec{P}_1 + c_2O\vec{P}_2 + c_3O\vec{P}_3$ si dice la **terna delle coordinate** del vettore $O\vec{P}$ rispetto a tale base (sottointendendo la base fissata, scriveremo anche $O\vec{P} \equiv (c_1, c_2, c_3)$).

L'importanza delle coordinate consiste nel fatto che esse, rappresentando i vettori mediante coppie o terne di numeri, ci permettono di tradurre in calcoli numerici i calcoli tra vettori. Innanzitutto questa è un'importante semplificazione per noi, in quanto è più semplice lavorare con le coordinate che con costruzioni o dimostrazioni di geometria euclidea che sarebbero altrimenti necessarie per lavorare con i vettori, che sono oggetti geometrici. Inoltre, tale traduzione è indispensabile se si vogliono far trattare tali problemi a un computer.

Un esempio di tale semplificazione è dato dal seguente risultato.

Proposizione 4.5. *Si fissi una base B nell'insieme dei vettori del piano. Allora*

- (1) *Se $O\vec{P}$ e $O\vec{P}'$ hanno coordinate rispettivamente (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) rispetto a B , le coordinate di $O\vec{P} + O\vec{P}'$ rispetto a B sono date dalla coppia $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$ ottenuta sommando componente per componente le coppie delle coordinate dei due vettori.*
- (2) *Se $O\vec{P}$ ha coordinate (x_1, x_2) rispetto a B e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate di $cO\vec{P}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2) ottenuta moltiplicando per c le componenti delle coordinate di $O\vec{P}$.*

Dimostrazione. Siano $O\vec{P}_1$ e $O\vec{P}_2$ i vettori che costituiscono la base B fissata. Per definizione il fatto che $O\vec{P}$ abbia coordinate (x_1, x_2) rispetto a B significa che $O\vec{P} = x_1O\vec{P}_1 + x_2O\vec{P}_2$, e, analogamente, il fatto che $O\vec{P}'$ abbia coordinate (x'_1, x'_2) rispetto a B significa che $O\vec{P}' = x'_1O\vec{P}_1 + x'_2O\vec{P}_2$. Ma allora

$$O\vec{P} + O\vec{P}' = (x_1O\vec{P}_1 + x_2O\vec{P}_2) + (x'_1O\vec{P}_1 + x'_2O\vec{P}_2) =$$

(riordiniamo gli addendi e raccogliamoli diversamente sfruttando le proprietà associative e commutativa della somma tra vettori)

$$= (x_1 \vec{OP}_1 + x'_1 \vec{OP}_1) + (x_2 \vec{OP}_2 + x'_2 \vec{OP}_2) =$$

(sfruttiamo la proprietà (4.7) sia nella prima parentesi che nella seconda)

$$= (x_1 + x'_1) \vec{OP}_1 + (x_2 + x'_2) \vec{OP}_2.$$

Ma questo, per definizione di coordinate, significa proprio che le coordinate di $\vec{OP} + \vec{OP}'$ sono date dalla coppia $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2)$, come affermato nella (1).

Per dimostrare la (2), ricordiamo ancora le coordinate di \vec{OP} sono date da (x_1, x_2) rispetto a B se abbiamo $\vec{OP} = x_1 \vec{OP}_1 + x_2 \vec{OP}_2$. Allora

$$c\vec{OP} = c(x_1 \vec{OP}_1 + x_2 \vec{OP}_2) =$$

(applichiamo la proprietà (4.8))

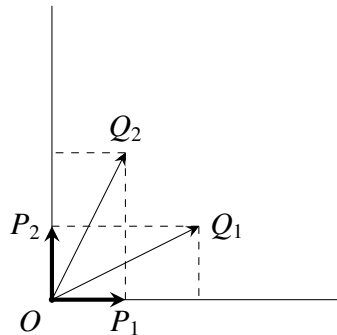
$$= c(x_1 \vec{OP}_1) + c(x_2 \vec{OP}_2) =$$

(applicando la (4.5) a entrambi gli addendi)

$$= (cx_1) \vec{OP}_1 + (cx_2) \vec{OP}_2$$

Ma questo, per definizione di coordinate, ci dice proprio che le coordinate di $c\vec{OP}$ sono date dalla coppia (cx_1, cx_2) , come affermato nella (2). □

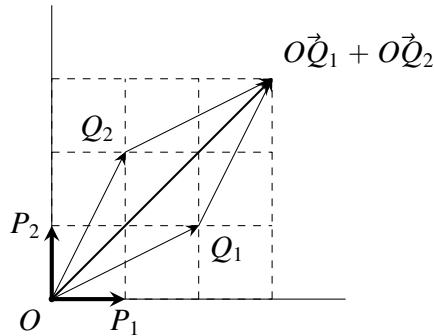
Esempio 4.6. Si considerino come nel disegno seguente la base $B = \{\vec{OP}_1, \vec{OP}_2\}$ e i due vettori \vec{OQ}_1 e \vec{OQ}_2 .



Come si vede graficamente, si ha $\vec{OQ}_1 = 2\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$ e $\vec{OQ}_2 = \vec{OP}_1 + 2\vec{OP}_2$. Ovvero le coordinate di \vec{OQ}_1 rispetto alla base B sono date dalla coppia $(2, 1)$, mentre le coordinate di \vec{OQ}_2 rispetto alla base B sono date dalla coppia $(1, 2)$.

Allora, in base alla (1) della Proposizione 4.5, la somma $O\vec{Q}_1 + O\vec{Q}_2$ ha coordinate (sempre rispetto alla base B) date da $(2 + 1, 1 + 2) = (3, 3)$, ovvero si ha $O\vec{Q}_1 + O\vec{Q}_2 = 3O\vec{P}_1 + 3O\vec{P}_2$.

In effetti, questo può essere verificato graficamente costruendo con la regola del parallelogramma la somma $O\vec{Q}_1 + O\vec{Q}_2$, come nel disegno seguente.



La cosa notevole è che siamo stati in grado di individuare il vettore $O\vec{Q}_1 + O\vec{Q}_2$ (in coordinate) con un semplicissimo conto aritmetico, ancora prima di disegnarlo con la costruzione geometrica del parallelogramma.

Osservazione 4.7. Affermazioni del tutto analoghe a quelle della Proposizione 4.5 valgono anche nel caso dei vettori nello spazio tridimensionale, e la dimostrazione è perfettamente analoga a quella appena vista per il piano. Più precisamente, si ha che fissata una base B nell'insieme dei vettori dello spazio tridimensionale, allora

- (1) Se $O\vec{P}$ e $O\vec{P}'$ hanno coordinate rispettivamente (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) rispetto a B , le coordinate di $O\vec{P} + O\vec{P}'$ rispetto a B sono date dalla terna $(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3)$ ottenuta sommando componente per componente le terne delle coordinate dei due vettori.
- (2) Se $O\vec{P}$ ha coordinate (x_1, x_2, x_3) rispetto a B e $c \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora le coordinate di $cO\vec{P}$ sono date dalla terna (cx_1, cx_2, cx_3) ottenuta moltiplicando per c le componenti delle coordinate di $O\vec{P}$.

Osservazione 4.8. Il fatto che, fissata una base B , ogni vettore del piano (risp. dello spazio tridimensionale) sia determinato in modo univoco da una coppia (risp. una terna) di numeri reali, ci dice che **l'insieme dei vettori del piano (risp. dello spazio tridimensionale) si può identificare con l'insieme \mathbb{R}^2 (risp. \mathbb{R}^3)**. La Proposizione 4.5 ci dice inoltre che lavorare con l'insieme dei vettori geometrici dotato della somma e del prodotto per scalari definito all'inizio del capitolo è la stessa cosa che lavorare con \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 dotati della somma e del prodotto per numeri reali definiti nel modo seguente:

$$(x_1, x_2) + (x'_1, x'_2) := (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2), \quad c(x_1, x_2) := (cx_1, cx_2)$$

$$(x_1, x_2, x_3) + (x'_1, x'_2, x'_3) := (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3), \quad c(x_1, x_2, x_3) := (cx_1, cx_2, cx_3).$$

In generale, in uno spazio n -dimensionale avremmo dovuto usare lo spazio \mathbb{R}^n dotato della somma e del prodotto definiti da

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) := (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n) \\ c(x_1, x_2, \dots, x_n) := (cx_1, cx_2, \dots, cx_n).$$

Notiamo che lo spazio \mathbb{R}^n può rappresentare le coordinate di un ipotetico spazio n -dimensionale (che per alcune teorie fisiche è una possibilità concreta). Inoltre può rappresentare un qualunque insieme o sistema in cui servano più di 3 parametri indipendenti (che non necessariamente rappresentano una posizione spaziale). Ad esempio, \mathbb{R}^4 potrebbe rappresentare l'insieme dei punti dello spazio tridimensionale con un'informazione aggiuntiva (la quarta componente) che può, ad esempio, essere la temperatura in quel punto (o la frequenza di un colore da associare a quel punto, se stiamo traducendo numericamente un disegno).

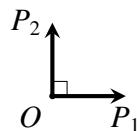
4.3 Lunghezze e angoli

Lavorare in coordinate rispetto a una base ci permette di tradurre numericamente costruzioni geometriche con i vettori e risolvere numericamente problemi relativi ai vettori. Questo è vero qualunque sia la base scelta, tuttavia a seconda del problema che dobbiamo risolvere, alcune basi possono essere più convenienti di altre. Questo accade in particolare quando si vuole rispondere, lavorando in coordinate, alle domande seguenti: qual è la lunghezza di un vettore dato? qual è l'angolo tra due vettori dati?

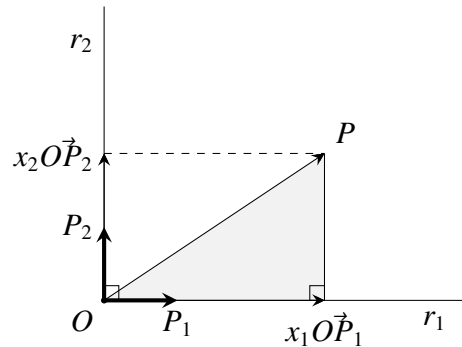
In tal caso, le basi più convenienti da usare, come stiamo per vedere, sono quelle della tipologia seguente.

Definizione 4.9. Una base di vettori del piano (o dello spazio) si dice **ortogonale** se i suoi vettori sono tra loro ortogonali (ovvero formano tra loro angoli di 90 gradi). Se, inoltre, i vettori della base hanno lunghezza 1 rispetto ad un'unità di misura scelta, allora la base si dice **ortonormale**.

Consideriamo una base ortonormale nel piano



Ora, consideriamo un vettore \vec{OP} di coordinate (x_1, x_2) rispetto a tale base (ovvero, per definizione di coordinate, $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$). È possibile calcolare la lunghezza del vettore \vec{OP} a partire dalle coordinate? Per rispondere a tale domanda, consideriamo il seguente disegno, nel quale è rappresentata la decomposizione $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$.



Come abbiamo visto nella sezione precedente proiettiamo P sulla retta r_1 che contiene \vec{OP}_1 seguendo la direzione di \vec{OP}_2 . Dal momento che abbiamo scelto i vettori di base perpendicolari tale proiezione incontra r_1 con un angolo di 90 gradi. Si viene quindi a formare un triangolo rettangolo (evidenziato nel disegno) avente come ipotenusa proprio \vec{OP} e al quale possiamo quindi applicare il teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza di \vec{OP} , che denoteremo con $|\vec{OP}|$.

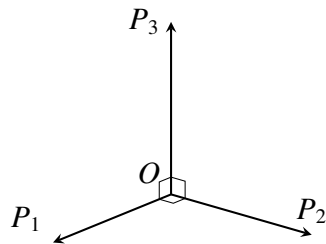
A questo scopo, notiamo che il cateto orizzontale di tale triangolo è dato dal vettore $x_1\vec{OP}_1$, e quindi la sua lunghezza è data dal prodotto di x_1 per la lunghezza di \vec{OP}_1 . Per cui, avendo scelto i vettori di base di lunghezza unitaria, la lunghezza di tale cateto è semplicemente x_1 . Per quanto riguarda il cateto verticale, esso per costruzione ha la stessa lunghezza del vettore $x_2\vec{OP}_2$, ovvero x_2 (in quanto \vec{OP}_2 ha lunghezza 1). Quindi per il teorema di Pitagora

$$|\vec{OP}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (4.9)$$

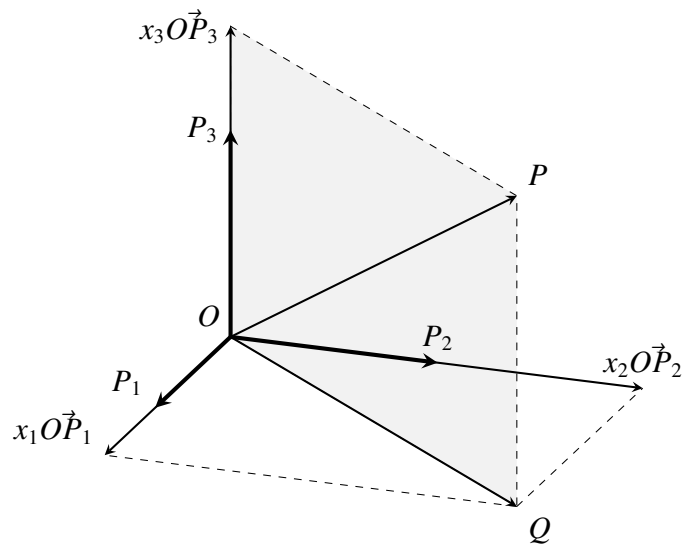
che rappresenta la formula cercata, ovvero fornisce la lunghezza di \vec{OP} in funzione delle sue coordinate.

Si noti che nei ragionamenti che abbiamo fatto è stato fondamentale aver scelto una base fatta di vettori ortogonali (in modo da costruire un triangolo rettangolo a cui applicare il teorema di Pitagora) e di lunghezza 1 (in modo da esprimere le lunghezze dei cateti in funzione delle sole coordinate).

Vediamo adesso come si ottiene una formula analoga nello spazio tridimensionale. Sia $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ una base ortonormale B per i vettori applicati nello spazio tridimensionale: B è composta di vettori ortogonali tra loro e di lunghezza 1.



Dato un vettore \vec{OP} calcoliamone la lunghezza, che denotiamo ancora con $|\vec{OP}|$, in funzione delle sue coordinate x_1, x_2, x_3 rispetto alla base B scelta. Per definizione di coordinate, \vec{OP} si decompone come somma $\vec{OP} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$, come nel disegno seguente.



La decomposizione è stata ottenuta graficamente come segue. Si proietta P sul piano su cui stanno P_1 e P_2 parallelamente a \vec{OP}_3 ottenendo il punto Q . Si noti che l'angolo in Q è retto perché \vec{OP}_3 è ortogonale sia a \vec{OP}_1 che a \vec{OP}_2 . Si ottiene così un rettangolo, ombreggiato nel disegno, da cui si evince che $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3$. Dal momento che \vec{OQ} giace sul piano di \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 lo si può decomporre come $\vec{OQ} = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2$ (sempre ottenendo angoli retti in quanto \vec{OP}_1 e \vec{OP}_2 sono perpendicolari). Quindi $\vec{OP} = \vec{OQ} + x_3\vec{OP}_3 = x_1\vec{OP}_1 + x_2\vec{OP}_2 + x_3\vec{OP}_3$ come volevamo.

Ora, essendo OP l'ipotenusa del triangolo OPQ rettangolo in Q , per il teorema di Pitagora avremo

$$|OP|^2 = |OQ|^2 + |PQ|^2 \quad (4.10)$$

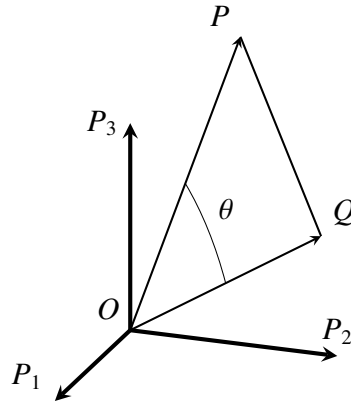
Ora da una parte, il segmento PQ , essendo un lato del rettangolo ombreggiato in figura, è lungo esattamente quanto il vettore $x_3\vec{O\vec{P}}_3$, ovvero x_3 (in quanto $\vec{O\vec{P}}_3$ ha lunghezza 1). D'altra parte, OQ è la diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori $x_1\vec{O\vec{P}}_1$ e $x_2\vec{O\vec{P}}_2$ di lunghezze rispettivamente x_1 e x_2 (in quanto $\vec{O\vec{P}}_1$ e $\vec{O\vec{P}}_2$ hanno lunghezza 1). Quindi, sempre per il teorema di Pitagora, si ha $|OQ|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Combinando queste osservazioni con la (4.10), si ha $|OP|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ovvero

$$|\vec{OP}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (4.11)$$

Questa formula, analoga alla (4.9), fornisce la lunghezza di un vettore geometrico \vec{OP} dello spazio in funzione delle sue coordinate rispetto alla base ortonormale scelta.

Ora, poniamoci il problema di calcolare l'angolo tra due vettori non nulli \vec{OP} e \vec{OQ} una volta note le loro coordinate rispetto ad una stessa base ortonormale. Supponiamo che tali coordinate siano rispettivamente (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) .

Consideriamo il triangolo OPQ del disegno seguente.

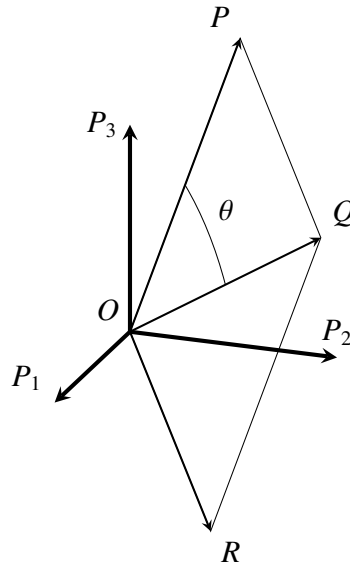


Per un risultato di trigonometria, l'angolo θ tra \vec{OP} e \vec{OQ} è collegato alle lunghezze dei segmenti OP , OQ e PQ dalla formula³

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2 \cos \theta |OP| \cdot |OQ|. \quad (4.12)$$

Ora, per la (4.11), si ha $|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ e $|OQ| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. Ci resta da calcolare la lunghezza $|PQ|$. Dal momento che la (4.11) ci consente di calcolare lunghezze solo dei vettori applicati in O , tracciamo come nel disegno seguente

³Si tratta di una sorta di "teorema di Pitagora per triangoli qualunque". Infatti, se il triangolo è rettangolo in O , ovvero $\theta = \frac{\pi}{2}$, allora $\cos \theta = 0$ e la formula si riduce a $|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2$, il classico teorema di Pitagora.



il vettore \vec{OR} parallelo al segmento PQ e avente la sua stessa lunghezza, ovvero $|PQ| = |\vec{OR}|$.

Ora, essendo \vec{OR} parallelo a PQ e della stessa lunghezza, il quadrilatero di vertici O, R, Q, P è un parallelogramma che ha \vec{OR} e \vec{OP} come lati e \vec{OQ} come diagonale. Quindi, dalla definizione di somma tra vettori applicati, si ha $\vec{OQ} = \vec{OR} + \vec{OP}$, ovvero $\vec{OR} = \vec{OQ} - \vec{OP}$.

Per l'Osservazione 4.7, le coordinate di $\vec{OR} = \vec{OQ} - \vec{OP}$ sono date dalle coordinate di \vec{OQ} meno le coordinate di \vec{OP} , ovvero $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$. Infine dalla (4.11) otteniamo

$$|PQ| = |\vec{OR}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}. \quad (4.13)$$

La formula (4.12) diventa allora

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2 \cos \theta \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Poichè il primo membro, per la formula del quadrato di binomio, è uguale a

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 + x_3^2 + y_3^2 - 2x_3y_3,$$

semplificando con i quadrati al secondo membro si ottiene

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 = -2 \cos \theta \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}. \quad (4.15)$$

Da quest'ultima si ricava

$$\cos \theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}} \quad (4.16)$$

che è la formula che esprime l'angolo tra due vettori in funzione delle loro coordinate rispetto alla base data.

Lo stesso calcolo si traduce mutatis mutandis nel caso bidimensionale per ottenere la formula analoga

$$\cos \theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}. \quad (4.17)$$

Esempio 4.10. Consideriamo i vettori \vec{OP} e \vec{OQ} aventi coordinate $(1, 0, 1)$ e, rispettivamente, $(1, -1, 0)$ rispetto a una base ortonormale $\{\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3\}$. In base alla definizione di coordinate, sono quindi $\vec{OP} = 1\vec{OP}_1 + 0\vec{OP}_2 + 1\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_3$ e $\vec{OQ} = 1\vec{OP}_1 + (-1)\vec{OP}_2 + 0\vec{OP}_3 = \vec{OP}_1 - \vec{OP}_2$.

Allora l'angolo tra \vec{OP} e \vec{OQ} , in base alla (4.16), è dato da

$$\cos \theta = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

ovvero, dalla trigonometria, $\theta = \frac{\pi}{3}$ (in gradi, 60°)

Le formule (4.16) e (4.17) ci forniscono anche un criterio per verificare in coordinate se due vettori sono perpendicolari: l'angolo θ è $\frac{\pi}{2}$ (ovvero 90 gradi) se e solo se $\cos \theta = 0$. Questo si verifica solo se i numeratori della (4.16) e della (4.17) sono nulli.

Nello spazio, abbiamo che due vettori $\vec{OP} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{OQ} \equiv (y_1, y_2, y_3)$ sono perpendicolari se e solo se si verifica

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0. \quad (4.18)$$

Ad esempio, i due vettori di coordinate $(1, 2, 1)$ e $(3, 1, -5)$ sono perpendicolari in quanto

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 3 + 2 - 5 = 0.$$

Osservazione 4.11. In base al criterio (4.18), il vettore nullo \vec{OO} risulta essere perpendicolare a qualunque altro vettore \vec{OP} . Questo perché le sue coordinate sono $(0, 0, 0)$ e, qualunque siano le coordinate (x_1, x_2, x_3) di \vec{OP} si ottiene $x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$. Tuttavia, si noti che le formule (4.16) e (4.17) sono applicabili per calcolare un angolo solo se nessuno dei due vettori è nullo in quanto le lunghezze dei vettori appaiono al denominatore.

Il numeratore che compare nella (4.16), o nella (4.17) nel caso del piano, può essere interpretato come una nuova operazione che date due terne (due coppie nel caso del piano) di numeri reali, ci dà come risultato un numero reale. Se denotiamo con $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ le due terne (nel caso del piano, $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$), possiamo definire

$$x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad (4.19)$$

(nel caso del piano, $x \cdot y := x_1y_1 + x_2y_2$).

Per quello che riguarda i denominatori della (4.16) e della (4.17), dal momento che $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ rappresenta la lunghezza di un vettore \vec{OP} , che abbiamo denotato con $|\vec{OP}|$, possiamo definire

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (4.20)$$

(nel caso del piano, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$).

Con queste notazioni, sia la formula (4.16) che la (4.17) si riscrivono come

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|}. \quad (4.21)$$

Definizione 4.12. L'operazione $x \cdot y$ tra coppie o terne di vettori (cioè su \mathbb{R}^2 e su \mathbb{R}^3) definita da (4.19) si chiama **prodotto scalare**. Il nome è dovuto al fatto che il risultato è un numero reale, ovvero uno scalare.

Si noti che non solo il prodotto scalare compare a numeratore dell'espressione dell'angolo tra due vettori in coordinate, ma anche la lunghezza $|x|$ di un vettore può essere espressa in funzione di esso, in quanto

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3} = \sqrt{x \cdot x}$$

Osservazione 4.13. Il prodotto scalare $x \cdot y$ che abbiamo definito sopra è solo un caso particolare di una nozione più generale.

Più precisamente, noi abbiamo definito $x \cdot y$ solo per $x, y \in \mathbb{R}^2$ o $x, y \in \mathbb{R}^3$, perché stiamo lavorando con vettori nel piano o nello spazio che, fissata una base, vengono descritti rispettivamente da coppie o terne di numeri reali, e vogliamo tramite questo prodotto calcolare lunghezze e angoli. Come abbiamo visto nell'Osservazione 4.8, può capitare di avere a che fare con oggetti e situazioni che richiedono più di tre parametri indipendenti per essere descritti. In questi casi si deve ricorrere a \mathbb{R}^n con $n > 3$.

Anche in tali situazioni può emergere l'esigenza di introdurre una "misura" sulle n -uple (x_1, x_2, \dots, x_n) che rappresentano gli oggetti o gli stati del nostro sistema, magari allo

scopo di controllare, o massimizzare o minimizzare qualche quantità che tenga conto di tutti i parametri usati.

Ispirandoci al prodotto scalare definito sopra per misurare le lunghezze e gli angoli tra vettori, potremmo porre anche in tale situazione generale $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, da cui $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Tuttavia a seconda del significato delle componenti della n -upla potremmo voler assegnare loro pesi diversi. Ad esempio considerando 4-uple, invece di prendere $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ potremmo porre $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_4y_4$ per far pesare di più il contributo della quarta componente. Potremmo anche voler far interagire i parametri tra loro in modo più complesso e usare espressioni più complicate, per esempio $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + x_4y_4$. In generale, possiamo definire $x \cdot y$ in base alle nostre esigenze, ma con un avvertimento: $x \cdot y$ deve essere tale da poter poi definire la lunghezza tramite la $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ e, qualunque significato vogliamo dargli nel nostro contesto, l'angolo tramite $\cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|}$. Quindi, ad esempio, deve essere $x \cdot x \geq 0$ (perché questa quantità possa stare sotto radice) e $-1 \leq \frac{x \cdot y}{|x||y|} \leq 1$ (affinché questa quantità possa essere un coseno, che è appunto sempre compreso tra -1 e 1).

Ebbene, si dimostra che queste e altre importanti proprietà sono garantite se assumiamo che il prodotto $x \cdot y$ che stiamo scegliendo goda delle seguenti proprietà:

- Il prodotto è commutativo: $x \cdot y = y \cdot x$.
- Il prodotto è distributivo rispetto alla somma: $x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y'$.
- Il prodotto è compatibile con la moltiplicazione per scalari: $x \cdot (cy) = (cx) \cdot y = c(x \cdot y)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.
- Il prodotto soddisfa $x \cdot x \geq 0$ e $x \cdot x = 0$ se e solo se $x = (0, 0, \dots, 0)$.

In generale un **prodotto scalare** è una qualunque operazione che abbia esattamente queste proprietà, ma non approfondiamo ulteriormente questo argomento.

Vediamo ora che in \mathbb{R}^3 è possibile introdurre anche un'altra operazione molto utile nella grafica ma anche in altre applicazioni (soprattutto in fisica). Questa è il **prodotto vettoriale**, che date due terne di numeri reali dà come risultato non uno scalare (come nel caso del prodotto scalare) ma una nuova terna (cioè un nuovo vettore, come suggerisce il nome). La definizione è la seguente: se $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ allora si pone

$$x \wedge y := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \quad (4.22)$$

Ad esempio, se $x = (1, 2, 3)$ e $y = (2, 5, -1)$, si ha

$$x \wedge y := (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5, 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2) = (-17, 7, 1)$$

Il motivo di questa particolare definizione è che si vuole che la terna $x \wedge y$ rappresenti (in coordinate) un vettore che è perpendicolare sia al vettore rappresentato da x che a quello rappresentato da y .

Per verificarlo, basta usare il criterio di perpendicolarità visto nella (4.19), cioè moltiplicare le rispettive componenti di x e $x \wedge y$ (la prima con la prima, la seconda con la seconda, la terza con la terza) e sommare:

$$\begin{aligned} x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = \\ x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_2x_1y_3 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 = 0 \end{aligned}$$

in quanto come si vede facilmente tutti i termini si semplificano.

Analogamente, per verificare che anche il vettore di coordinate y è perpendicolare al vettore rappresentato dal prodotto vettoriale $x \wedge y$, svolgiamo il prodotto scalare tra y e $x \wedge y$:

$$\begin{aligned} y_1(x_2y_3 - x_3y_2) + y_2(x_3y_1 - x_1y_3) + y_3(x_1y_2 - x_2y_1) = \\ y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2 + y_2x_3y_1 - y_2x_1y_3 + y_3x_1y_2 - y_3x_2y_1 = 0 \end{aligned}$$

come volevamo.

È facile verificare che il prodotto vettoriale *non* è commutativo bensì *anticommutativo*, cioè si ha

$$x \wedge y = -y \wedge x.$$

In altre parole, quando cambiamo l'ordine dei fattori il risultato finale cambia di segno. Questo segue immediatamente dalla seguente equazione.

$$\begin{aligned} x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) = \\ -(-x_2y_3 + x_3y_2, -x_3y_1 + x_1y_3, -x_1y_2 + x_2y_1) = -y \wedge x. \end{aligned}$$

Ad esempio, per i due vettori $x = (1, 2, 3)$ e $y = (2, 5, -1)$ per cui sopra abbiamo già calcolato $x \wedge y$, si ha

$$y \wedge x = (5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2, -1 \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = (17, -7, -1)$$

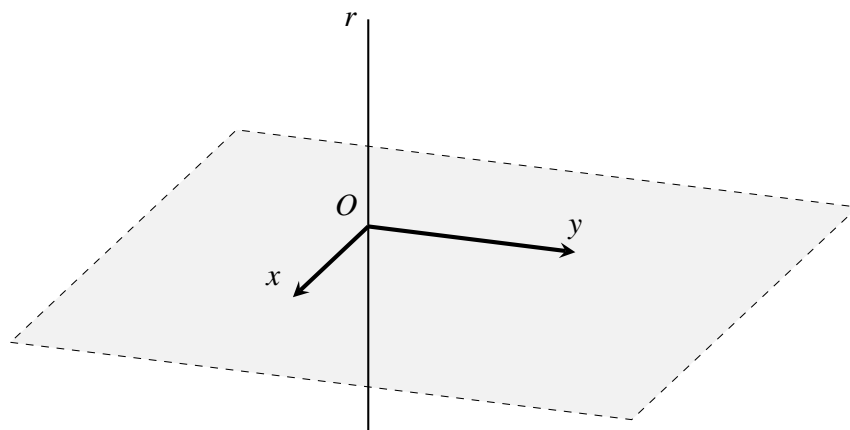
cioè proprio l'opposto della terna $(17, 7, -1)$ ottenuta sopra.

Ancora, nei calcoli è necessario fare attenzione al fatto che il prodotto vettoriale *non* è neanche associativo, cioè in generale si ha

$$x \wedge (y \wedge z) \neq (x \wedge y) \wedge z.$$

Ad esempio, se prendiamo $x = (1, 0, 0)$ e $y = z = (0, 1, 0)$, si vede facilmente che $x \wedge y = (0, 0, 1)$ e $(x \wedge y) \wedge z = (-1, 0, 0)$, mentre dall'altra si ha $y \wedge z = (0, 0, 0)$ e $x \wedge (y \wedge z) = (0, 0, 0)$.

Abbiamo detto che il prodotto vettoriale $x \wedge y$ di due terne $x, y \in \mathbb{R}^3$ ci dà le coordinate di un vettore perpendicolare a entrambi i vettori rappresentati da x e da y , e che quindi si trova sulla retta rappresentata nel disegno seguente.



Conoscendo quindi la direzione di tale vettore, per determinarlo completamente dobbiamo trovarne lunghezza e verso.

Per quanto riguarda la lunghezza, sappiamo come calcolarla mediante la formula (4.20). In base a tale formula e alla (4.22), si ha

$$|x \wedge y|^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Svolgendo i conti (omettiamo i passaggi), non è difficile vedere che tale espressione è uguale a

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

ovvero, ricordando le notazioni introdotte nella (4.19) e nella (4.20),

$$|x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2.$$

Riscrivendo questa espressione come

$$|x|^2|y|^2 \left(1 - \frac{(x \cdot y)^2}{|x|^2|y|^2} \right)$$

e ricordando la (4.21), concludiamo che

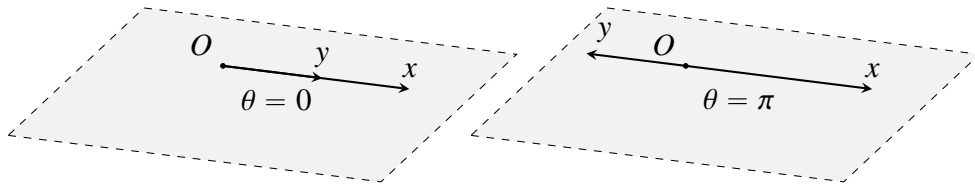
$$|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2(1 - \cos^2 \theta) = |x|^2|y|^2 \sin^2 \theta$$

(dove abbiamo usato l'identità trigonometrica $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$). A questo punto, estraendo la radice a entrambi i membri, si ottiene

$$|x \wedge y| = |x||y| \sin \theta \quad (4.23)$$

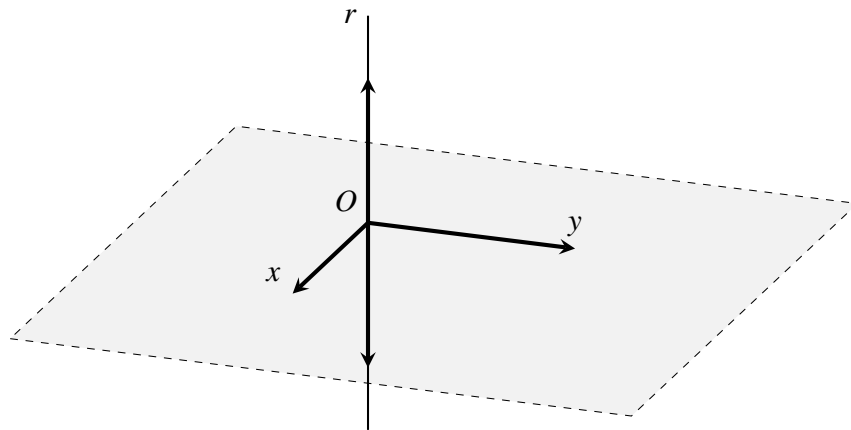
che è una formula semplice per la lunghezza del vettore rappresentato in coordinate da $x \wedge y$, in funzione della lunghezza $|x|$ del vettore rappresentato da x , della lunghezza $|y|$ del vettore rappresentato da y e dell'angolo θ formato da questi due vettori.

Tale formula ci dice ad esempio che $|x \wedge y| = 0$ (ovvero $x \wedge y = (0, 0, 0)$) rappresenta il vettore nullo \vec{OO} esattamente quando $\sin \theta = 0$. Questo, come ci dice la trigonometria, avviene quando $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$ (180 gradi). Come si vede nel disegno seguente



questo equivale a dire che i vettori sono allineati.

Conoscendo direzione e lunghezza del vettore rappresentato da $x \wedge y$, per il verso abbiamo solo due possibilità:



Come vedremo, il verso del vettore rappresentato da $x \wedge y$ non è determinabile in modo univoco, ma dipende da quale base ortonormale abbiamo scelto per tradurre i vettori in coordinate.

4.4 Sistemi di riferimento nello spazio e equazioni di rette e piani

Quanto visto nella sezione precedente ci consente di tradurre problemi geometrici in problemi numerici e risolverli mediante equazioni algebriche.

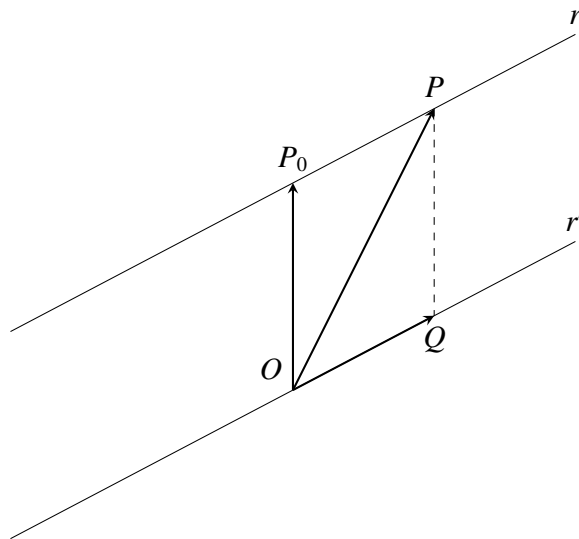
Per assegnare coordinate a un punto P (del piano o dello spazio) bisogna fissare un punto O , e una base B per i vettori applicati in O (sarà $B = \{\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3\}$ se siamo nello spazio tridimensionale e $B = \{\vec{OP}_1, \vec{OP}_2\}$ se siamo nel piano). Queste due scelte definiscono un **sistema di riferimento**, e il punto O si dice **origine del sistema**.

A questo punto, diciamo che le **coordinate del punto P** rispetto al sistema di riferimento fissato sono semplicemente le coordinate del vettore \vec{OP} rispetto alla base scelta.

Scriveremo $P \equiv (x, y, z)$ (nel piano, $P \equiv (x, y)$) per dire che x, y, z (rispettivamente, x, y) sono le coordinate di P rispetto al sistema di riferimento fissato. In altre parole, in base alla definizione appena data, $\vec{OP} = x\vec{OP}_1 + y\vec{OP}_2 + z\vec{OP}_3$ (rispettivamente, $\vec{OP} = x\vec{OP}_1 + y\vec{OP}_2$).

Chiaramente, le coordinate di P dipendono sia dalla scelta iniziale dell'origine O (cambiando O , cambia il vettore \vec{OP} di cui dobbiamo calcolare le coordinate) che dalla scelta della base. Solitamente, il sistema di riferimento è scelto in modo da semplificare il più possibile il problema che si vuole risolvere.

Ora che, fissato un sistema di riferimento, ogni punto dello spazio (o del piano) ha una sua terna (rispettivamente, coppia) di coordinate, ci chiediamo se sia possibile ricavare una formula che ci dia le coordinate dei punti di una retta r data. A questo scopo, fissiamo un punto P_0 della retta r . Osserviamo che, dato un qualunque altro punto P su r , il vettore \vec{OP} si decompone come somma di \vec{OP}_0 e un vettore \vec{OQ} che giace sulla retta r' parallela a r e passante per O .



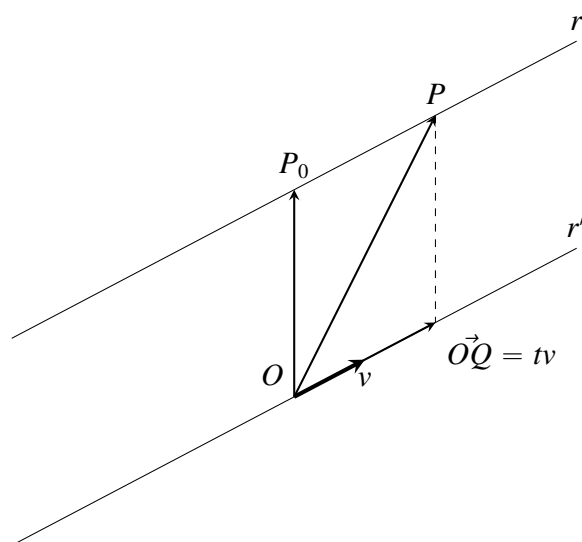
Fissato P_0 , quindi, esiste una corrispondenza tra i punti P della retta e i vettori \vec{OQ} che giacciono su r' , data proprio da

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{OQ}. \quad (4.24)$$

Il vantaggio di passare dai punti della retta r ai vettori \vec{OQ} che giacciono su r' consiste nel fatto che tali vettori \vec{OQ} sono tutti multipli tra loro. Basta quindi fissarne uno (non nullo), diciamo v , e si avrà sempre $\vec{OQ} = tv$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Quindi, la (4.24) può essere riscritta come

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + tv. \quad (4.25)$$



Vogliamo ora esprimere questa uguaglianza in coordinate rispetto a un sistema di riferimento utilizzando le proprietà delle coordinate dei vettori viste nell'Osservazione 4.7. Supponiamo di essere nello spazio e diciamo che le coordinate di \vec{OP}_0 e v sono date rispettivamente da (x_0, y_0, z_0) e (l, m, n) . Quindi le coordinate di tv sono $t(l, m, n)$. Ora da $\vec{OP} = \vec{OP}_0 + tv$ abbiamo che le coordinate (x, y, z) di \vec{OP} sono uguali alle coordinate di \vec{OP}_0 più le coordinate di tv , ovvero

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) = (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt). \quad (4.26)$$

La (4.26) ci dice quindi che i punti della retta sono dati esattamente dalle terne (x, y, z) per le quali si ha $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.

È convenzione comune riunire queste tre condizioni nella forma

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad (4.27)$$

Dal momento che le (4.27) ci danno esplicitamente le coordinate di tutti i punti della retta r al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, queste prendono il nome di **equazioni parametriche** della retta r .

Se invece stiamo lavorando nel piano, si procede nello stesso modo per arrivare ad un risultato simile ma con una coordinata in meno. Denotiamo con (x_0, y_0) le coordinate di \vec{OP}_0 e con (l, m) quelle di v . Da $\vec{OP} = \vec{OP}_0 + tv$ abbiamo che le coordinate (x, y) di \vec{OP} sono date dalla somma delle coordinate di \vec{OP}_0 con quelle di tv , ovvero

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(l, m) = (x_0 + lt, y_0 + mt). \quad (4.28)$$

La (4.28) ci dice quindi che i punti della retta sono dati esattamente dalle coppie (x, y) per le quali si ha $x = x_0 + lt$ e $y = y_0 + mt$ per qualche $t \in \mathbb{R}$.

Come nel caso dello spazio, è convenzione comune riunire queste condizioni nella forma

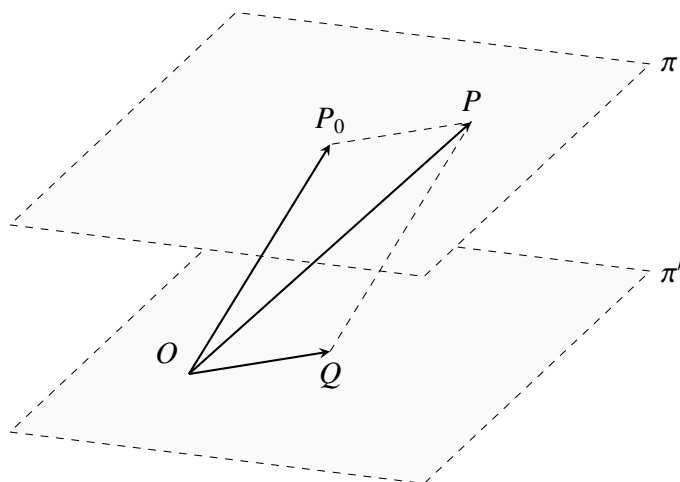
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \quad (4.29)$$

e si parla sempre di **equazioni parametriche** di r .

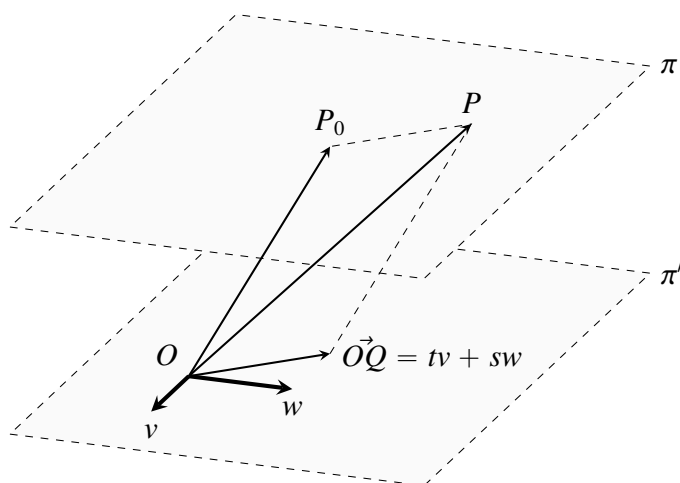
Osservazione 4.14. Si osservi che è ragionevole, per individuare la retta r , dover scegliere un punto P_0 e un vettore v sulla retta a lei parallela e passante per l'origine. Infatti, fissato un punto P_0 esistono infinite rette passanti per P_0 , e il vettore v ha il ruolo di fissare la direzione della retta. Per questo motivo, il vettore v deve essere non nullo, ovvero non devono essere nulle le sue coordinate l, m, n . Questa è l'unica condizione che deve essere soddisfatta affinché una terna di uguaglianze come le (4.27) rappresenti effettivamente una retta r .

Vediamo ora come determinare i punti di un piano π nello spazio con un procedimento analogo.

Come nel disegno seguente, fissiamo un punto P_0 del piano π . Osserviamo che per ogni $P \in \pi$, il vettore \vec{OP} si decompone come somma $\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{OQ}$ di \vec{OP}_0 e di un vettore \vec{OQ} che giace sul piano π' parallelo a π e passante per O .



Esattamente come nel caso della retta, il vantaggio di ricondurre la descrizione dei punti P del piano π ai vettori \vec{OQ} che giacciono su π' consiste nel fatto che tali vettori possono essere ottenuti come combinazione di due vettori non allineati v e w fissati. Ovvero $\vec{OQ} = tv + sw$, per opportuni $t, s \in \mathbb{R}$.



Riassumendo, per tutti i punti P sul piano π vale la relazione

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + tv + sw. \quad (4.30)$$

Ora, come fatto sopra per la retta, traduciamo tale uguaglianza in coordinate rispetto al sistema di riferimento fissato. Usando ancora le proprietà delle coordinate viste nell'Osservazione 4.7, da $\vec{OP} = \vec{OP}_0 + tv + sw$ abbiamo che le coordinate (x, y, z) di \vec{OP} sono uguali alle coordinate, diciamo (x_0, y_0, z_0) , di \vec{OP}_0 più le coordinate di tv , (che sono uguali a t per le coordinate, diciamo (l, m, n) , di v), più le coordinate di sw (che sono uguali a s per le coordinate, diciamo (l', m', n') , di w). In formule

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t(l, m, n) + s(l', m', n') \\ &= (x_0 + lt + l's, y_0 + mt + m's, z_0 + nt + n's).\end{aligned}\quad (4.31)$$

La (4.31) ci dice quindi che i punti del piano sono dati esattamente dalle terne (x, y, z) per le quali si ha $x = x_0 + lt + l's$, $y = y_0 + mt + m's$, $z = z_0 + nt + n's$ per certi $t, s \in \mathbb{R}$.

È convenzione comune riunire queste tre condizioni nella forma

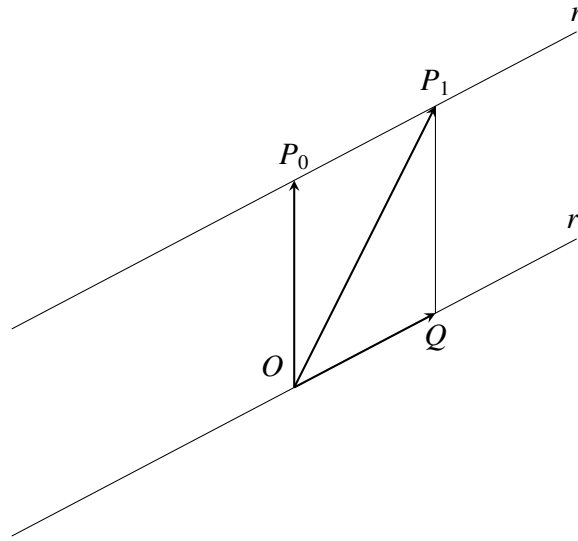
$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l's \\ y = y_0 + mt + m's \\ z = z_0 + nt + n's \end{cases} \quad (4.32)$$

Come nel caso della retta, dal momento che le (4.32) ci danno esplicitamente le coordinate di tutti i punti del piano π al variare dei parametri $t, s \in \mathbb{R}$, si dice che tali uguaglianze sono le **equazioni parametriche** di π .

Osservazione 4.15. Una retta è determinata da un suo punto e da un vettore che ne determina la direzione. Allo stesso modo un piano π è determinato da un punto e da due vettori v e w che, individuando il piano π' parallelo al piano dato e passante per l'origine, determinano la cosiddetta **giacitura**. In altre parole, come il piano giace, cioè come è orientato o disposto, nello spazio: non avrebbe senso parlare di direzione del piano perché questo si sviluppa in due dimensioni e non in una sola. Poiché i vettori v e w devono generare il piano per O , essi non devono essere allineati. Questo equivale a dire che le terne (l, m, n) e (l', m', n') che rappresentano i vettori non devono essere proporzionali. Questa è l'unica condizione che deve essere soddisfatta affinché una terna di uguaglianze come le (4.32) rappresenti effettivamente un piano.

La geometria euclidea classica ci dice che dati due punti distinti P_0 e P_1 nel piano o nello spazio, esiste un'unica retta r che li contiene. Ci proponiamo ora di determinare questa retta a partire dalle coordinate dei due punti, che supponiamo note.

Supponiamo quindi che sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$. Per determinare le equazioni parametriche della retta, come sappiamo, ci servono le coordinate (l, m, n) di un vettore non nullo che giaccia sulla retta r' parallela a r e passante per l'origine O del sistema di riferimento. A questo scopo, tracciamo la retta r' e, come nel disegno seguente, tracciamo partendo da P_1 il segmento P_1Q parallelo a OP_0 .



Chiaramente, possiamo usare il vettore \vec{OQ} come generatore della giacitura. Essendo il quadrilatero OP_0P_1Q un parallelogramma, per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $\vec{OQ} + \vec{OP}_0 = \vec{OP}_1$, da cui otteniamo $\vec{OQ} = \vec{OP}_1 - \vec{OP}_0$.

Le coordinate (l, m, n) di \vec{OQ} saranno quindi, per la Proposizione 4.5, uguali alle coordinate (x_1, y_1, z_1) di \vec{OP}_1 meno le coordinate (x_0, y_0, z_0) di \vec{OP}_0 . Cioè

$$(l, m, n) = (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Sostituendo nell'espressione generale (4.27) delle equazioni parametriche di una retta si trova allora

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \quad (4.33)$$

che sono quindi le equazioni della retta nello spazio che passa per P_0 e P_1 .

Nel piano, si ha lo stesso risultato ma con una coordinata in meno. Ovvero le uguaglianze

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \quad (4.34)$$

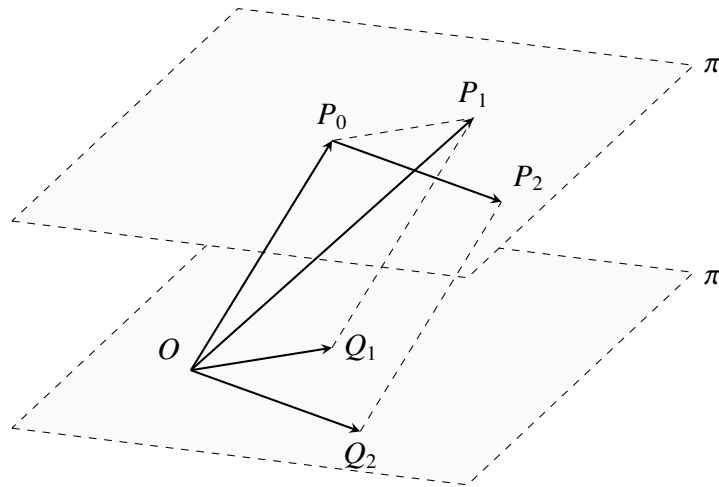
determinano la retta nel piano passante per i punti $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$.

Si noti che se i punti non fossero distinti il vettore $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, che si ottiene sottraendo le loro coordinate, sarebbe nullo e non potrebbe servire da vettore direzione della retta.

Analogamente, la geometria euclidea classica ci dice che dati tre punti P_0, P_1, P_2 non allineati (ovvero che non appartengono alla stessa retta), allora esiste un unico piano π che li contiene. Troviamo ora le equazioni parametriche di questo piano a partire dalle coordinate dei tre punti.

Supponiamo che sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0), P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$.

Per determinare le equazioni parametriche del piano, come sappiamo, ci servono le coordinate $(l, m, n), (l', m', n')$ di due vettori non proporzionali che giacciono sul piano π' parallelo a π e passante per l'origine O del sistema di riferimento. A questo scopo, disegniamo il piano π' e, analogamente a quanto fatto nel caso della retta, consideriamo i parallelogrammi $OP_0P_1Q_1$ e $OP_0P_2Q_2$.



I due vettori $O\vec{Q}_1$ e $O\vec{Q}_2$, rispettivamente paralleli ai segmenti P_0P_1 e P_0P_2 , giacciono sul piano π' e non sono proporzionali, poichè i tre punti P_0, P_1, P_2 sono non allineati. Quindi possiamo usarli come generatori della giacitura.

Per determinare le coordinate di tali vettori, osserviamo che per definizione di somma tra vettori geometrici si ha $O\vec{Q}_1 + O\vec{P}_0 = O\vec{P}_1$ e $O\vec{Q}_2 + O\vec{P}_0 = O\vec{P}_2$, da cui $O\vec{Q}_1 = O\vec{P}_1 - O\vec{P}_0$ e $O\vec{Q}_2 = O\vec{P}_2 - O\vec{P}_0$.

Allora, le coordinate (l, m, n) e (l', m', n') di $O\vec{Q}_1$ e $O\vec{Q}_2$ rispettivamente saranno

$$\begin{aligned} (l, m, n) &= (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \\ (l', m', n') &= (x_2, y_2, z_2) - (x_0, y_0, z_0) = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0). \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione generale (4.32) delle equazioni parametriche di un piano si trova allora

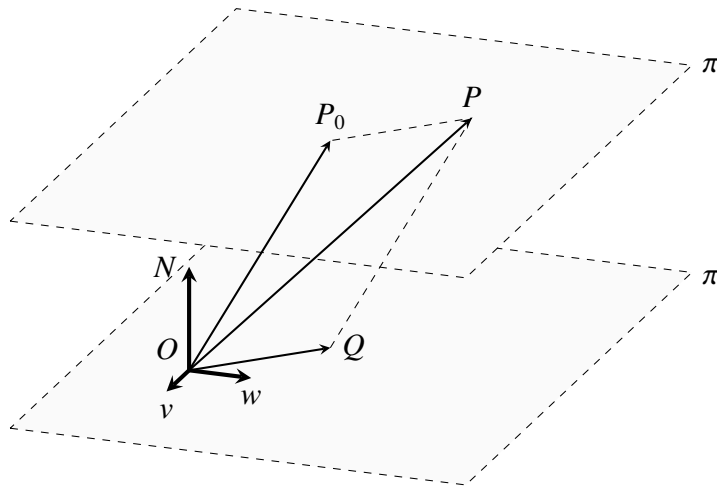
$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)s \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)s \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)s \end{cases} \quad (4.35)$$

Queste sono quindi le equazioni del piano che passa per P_0, P_1 e P_2 .

Vediamo ora un modo alternativo per descrivere rette e piani, quello dato dalle cosiddette **equazioni cartesiane**, note anche come **equazioni implicite**.

Iniziamo dai piani. Come visto nel disegno a pagina 154, fissato un punto P_0 del piano, per ogni altro suo punto P il vettore \vec{OP} si decompone come somma $\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{OQ}$, dove \vec{OQ} è un vettore che sta sul piano parallelo al piano dato e passante per O .

Avevamo poi osservato che ogni tale \vec{OQ} si scrive come somma $tv + sw$ di due vettori v e w non allineati, ottenendo così le parametriche. L'osservazione alternativa che facciamo ora invece, è che tutti i vettori \vec{OQ} sono perpendicolari a un qualunque vettore N perpendicolare al piano.



Quindi i punti P del piano sono caratterizzati dalla condizione che $\vec{OP} - \vec{OP}_0 = \vec{OQ}$ è perpendicolare a N . Ora, esprimiamo tale condizione in coordinate. Se denotiamo con (x, y, z) le coordinate di P (ovvero le coordinate del vettore \vec{OP}) e con (x_0, y_0, z_0) le coordinate di P_0 (ovvero le coordinate del vettore \vec{OP}_0), le coordinate del vettore $\vec{OP} - \vec{OP}_0$ sono date, come sappiamo dalle proprietà delle coordinate, dalla terna $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Diciamo (a, b, c) le coordinate del vettore N e supponiamo che la base fissata per il nostro sistema di riferimento sia ortonormale. Allora, per la (4.18), la condizione che $\vec{OP} - \vec{OP}_0$ sia perpendicolare a N equivale a

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Questa quindi è la condizione che devono soddisfare le coordinate (x, y, z) di un punto P perché il punto appartenga al piano.

Svolgendo i conti otteniamo

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

ovvero, portando a secondo membro tutti i termini che non contengono x, y, z ,

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Denotando $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$, otteniamo infine

$$ax + by + cz = d. \quad (4.36)$$

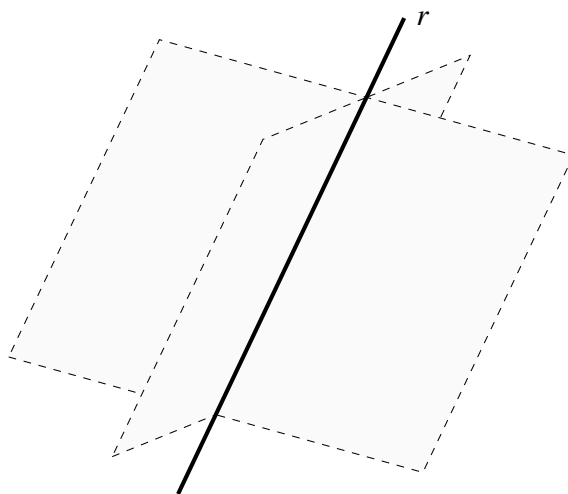
In conclusione, i punti di un piano dato sono caratterizzati dal fatto che le loro coordinate (x, y, z) soddisfano un'equazione di primo grado in tre incognite. Se la base del nostro sistema di riferimento è ortonormale, i coefficienti di x, y, z nell'equazione, ovvero a, b, c , rappresentano le coordinate di un vettore perpendicolare al piano (detto anche una **normale al piano**). Inoltre il termine noto d dell'equazione contiene l'informazione relativa a un punto per cui passa il piano, come abbiamo visto ricavando l'equazione.

Poichè piani con la stessa normale risultano paralleli, deduciamo che fissando a, b, c e facendo variare solo d “muoviamo” il piano parallelamente a se stesso.

Esempio 4.16. L'equazione $x + 2y + 3z = 6$ rappresenta un piano nello spazio, la cui giacitura è normale al vettore di coordinate $(1, 2, 3)$. Un punto che appartiene al piano è, ad esempio, $P \equiv (1, 1, 1)$, in quanto sostituendo tali coordinate al posto di x, y, z nell'equazione si ottiene $1 + 2 + 3 = 6$ che è verificata. Al contrario il punto $P \equiv (1, 2, 0)$ non appartiene al piano in quanto $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 6$ non è verificata.

L'equazione cartesiana del piano rappresenta un modo *implicito* di dare i punti del piano, diversamente dalle equazioni parametriche che ci danno i punti *esplicitamente*. Infatti, mentre nel caso delle parametriche i punti del piano sono dati semplicemente scegliendo valori reali dei parametri t e s , nel caso nelle cartesiane per ottenere i punti del piano bisogna trovare le soluzioni dell'equazione. Tale equazione rappresenta un vincolo che imponiamo ai punti dello spazio per appartenere al piano.

Anche le rette possono essere rappresentate in maniera implicita come segue.



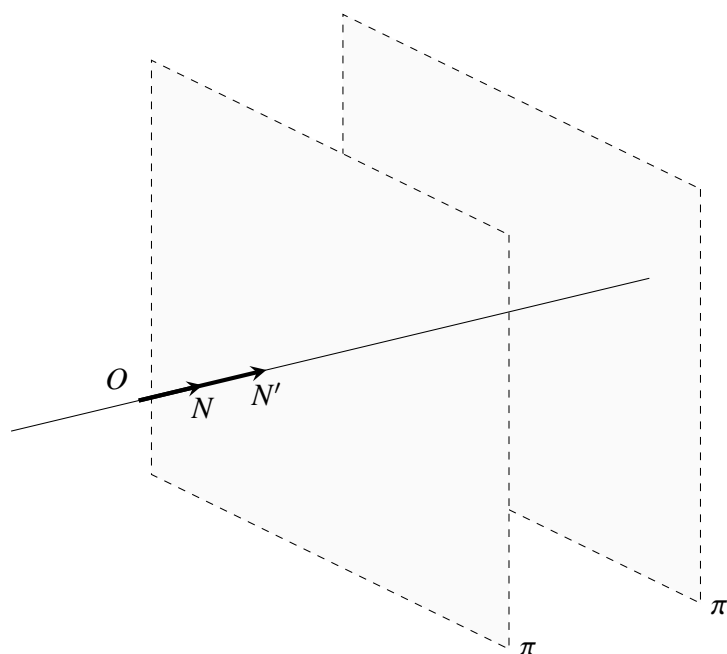
Come si vede nel disegno qualunque retta può essere pensata come intersezione di due piani (esistono infiniti piani che contengono una retta data, ma basta prenderne due per ottenere la retta come intersezione).

Supponiamo che il primo piano sia descritto dall'equazione cartesiana $ax + by + cz = d$ (ovvero i punti del primo piano sono, in coordinate, le soluzioni di questa equazione) e il secondo piano dall'equazione $a'x + b'y + c'z = d'$ (ovvero i punti del secondo piano sono, in coordinate, le soluzioni di quest'altra equazione). Allora i punti della retta, essendo i punti che appartengono ad entrambi i piani, sono dati dalle soluzioni comuni a queste due equazioni, ovvero dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Abbiamo quindi dimostrato che, oltre che esplicitamente attraverso equazioni parametriche, una retta nello spazio può essere descritta implicitamente mediante un sistema di due equazioni di primo grado in tre incognite.

Osservazione 4.17. Per rappresentare una retta come intersezione di due piani, è ovviamente necessario che i due piani non siano paralleli (l'intersezione sarebbe l'insieme vuoto) o addirittura coincidenti. Questo accade solo se le normali dei due piani sono uguali o al più una è mutiplo dell'altra (cambiarebbe lunghezza o verso ma la direzione rimarrebbe la stessa).



Esempio 4.18. Il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

non rappresenta una retta pur essendo un sistema di due equazioni di primo grado in tre incognite. Si noti infatti che la normale al piano rappresentato dalla prima equazione è $N \equiv (1, -1, 2)$ mentre la normale al piano rappresentato dalla seconda equazione è $N' \equiv (2, -2, 4)$. Essendo le coordinate di N' date dalle coordinate di N moltiplicate per 2, deduciamo che $N' = 2N$ e quindi i due piani, avendo normali con la stessa direzione, sono paralleli e non si incontrano lungo una retta.

Invece il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

rappresenta una retta nello spazio. Il punto $(1, 1, 1)$ appartiene alla retta in quanto le sue coordinate soddisfano entrambe le equazioni. D'altro canto il punto $(2, 0, 1)$ non appartiene alla retta in quanto benché le sue coordinate soddisfino la prima equazione non soddisfano la seconda.

Quanto visto sino ad ora suggerisce che per risolvere problemi geometrici riguardanti rette e piani è necessario saper risolvere i sistemi di equazioni di primo grado. Infatti, nelle espressioni delle parametriche i parametri t ed s compaiono con grado 1, e le

cartesiane sono sistemi di equazioni di primo grado. Inoltre se volessimo capire, ad esempio, se un piano e una retta dati rispettivamente da equazioni cartesiane $ax + by + cz = d$ e

$$\begin{cases} a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

si intersecano, e trovare gli eventuali punti di intersezione, dovremmo risolvere il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

che si ottiene mettendo insieme tutte le equazioni (in quanto i punti comuni al piano e alla retta sono i punti che soddisfano sia l'equazione del piano che le due equazioni della retta).

Anche in parametriche, il problema di individuare i punti comuni si traduce in un sistema di equazioni di primo grado. Ad esempio, per trovare i punti in comune a due piani, definiti dalle parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + t - s \\ z = t + 2s \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -2 + t + 3s \\ y = 1 - t - s \\ z = 1 + t + s \end{cases}$$

si deve capire se esistono valori di t ed s nelle prime e valori t' ed s' nelle seconde (eventualmente diversi dai t e s scelti nelle prime) che danno gli stessi valori di x, y, z . In altre parole bisognerebbe impostare le uguaglianze

$$\begin{cases} 1 + t + s = -2 + t' + 3s' \\ 2 + t - s = 1 - t' - s' \\ t + 2s = 1 + t' + s' \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} t + s - t' - 3s' = -3 \\ t - s + t' + s' = -1 \\ t + 2s - t' - s' = 1 \end{cases}$$

che è un sistema di tre equazioni di primo grado in quattro incognite.

Emerge quindi l'esigenza di saper risolvere sistemi di primo grado con un qualsiasi numero di equazioni in qualunque numero di incognite. Sarà questo lo scopo del prossimo capitolo.

4.5 Appendice: il campo dei numeri complessi

Successivamente alla Definizione 3.2 abbiamo citato vari esempi di campo. Oltre all'insieme dei razionali \mathbb{Q} e dei reali \mathbb{R} abbiamo nominato il campo dei numeri complessi \mathbb{C} . In questa sezione presentiamo in dettaglio questo campo.

Il campo dei **numeri complessi**, denotato con \mathbb{C} , può essere definito come l'insieme delle espressioni del tipo

$$x + iy$$

dove x e y sono numeri reali e i (detta **unità immaginaria**) è un numero che soddisfa l'identità $i^2 = -1$. Si noti che questa identità non è soddisfatta da nessun numero reale: il quadrato di un qualunque numero reale è un numero non negativo. Ad esempio, sono numeri complessi

$$2 + i3, \quad \sqrt{2} - i, \quad \frac{1}{5} - i\pi, \dots$$

In ogni numero complesso $x + iy$, il numero reale x si chiama **parte reale** e il numero reale y **parte immaginaria**.

Ovviamente, x e y possono essere nulli. In particolare, quando y è nullo si ha $x + i0 = x \in \mathbb{R}$. Quindi i numeri reali sono particolari numeri complessi, quelli con parte immaginaria nulla (in altre parole, vale l'inclusione $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).

Per poter dotare \mathbb{C} della struttura di campo, dobbiamo la somma e il prodotto tra numeri complessi e poi verificare che per tali operazioni valgono le proprietà della Definizione 3.2.

Definiamo la somma di due numeri complessi come il numero complesso ottenuto sommando le loro parti reali e le loro parti immaginarie. In altre parole dati due numeri complessi $x + iy$ e $x' + iy'$ la loro somma è

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y').$$

Ad esempio

$$(2 + i3) + (4 + i5) = (2 + 4) + i(3 + 5) = 6 + i8.$$

Il prodotto di due numeri complessi $x + iy$ e $x' + iy'$ è definito come segue

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = (xx' - yy') + i(yx' + xy').$$

In altri termini per moltiplicare due numeri complessi, basta prima eseguire il prodotto come se si trattasse di un'espressione algebrica nell'incognita i :

$$(x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' + ixy' + iyx' + i^2yy'$$

e poi sostituire $i^2 = -1$ e raccogliere la parte reale e quella immaginaria

$$xx' + ixy' + iyx' + i^2yy' = xx' + ixy' + iyx' - yy' = (xx' - yy') + i(yx' + xy').$$

Per esempio, dati i due numeri complessi $(2 + 3i)$ e $(4 + 5i)$ si ha

$$(2 + 3i) \cdot (4 + 5i) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5i + 3i \cdot 4 + 3i \cdot 5i = 8 + 10i + 12i + 15i^2$$

e poi ricordando che $i^2 = -1$:

$$8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 + 22i - 15 = -7 + 22i.$$

In questo modo abbiamo definito una somma e un prodotto che, come si verifica facilmente, soddisfano tutte le proprietà della definizione di campo.

Ad esempio, c'è un elemento neutro per la somma: lo 0 (come numero complesso, sarebbe $0 + 0i$).

Per quello che riguarda tutte le altre proprietà, verifichiamo solo l'esistenza dell'opposto (cioè dell'inverso rispetto alla somma) e dell'inverso rispetto al prodotto (per ogni numero complesso diverso da zero). Chiaramente, l'opposto di un numero complesso $z = x + iy$ è il numero complesso $-x - iy$ che si ottiene da z cambiando di segno la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Per come abbiamo definito la somma, è immediato vedere che la somma di questi due numeri è uguale a zero, come prevede la definizione di opposto:

$$(x + iy) + (-x - iy) = (x - x) + i(y - y) = 0 + i0 = 0.$$

Ad esempio

$$(2 + i3) + (-2 - i3) = (2 + (-2)) + i(3 + (-3)) = 0 + i0 = 0.$$

Per quanto riguarda l'inverso di un numero complesso, affermiamo che se $x + iy \neq 0$ (cioè x e y non sono entrambi nulli) allora il suo inverso è il numero complesso

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.37)$$

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Per verificarlo, scriviamo, ponendo tutto a un unico denominatore, la (4.37) nella forma

seguinte

$$\frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \quad (4.38)$$

Allora, è facile verificare che moltiplicando $x + iy$ per tale numero si ottiene 1 (come prevede la definizione di inverso):

$$(x + iy) \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{(x + iy)(x - iy)}{x^2 + y^2} =$$

(sfruttando la nota formula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ nel caso $a = x$ e $b = iy$)

$$= \frac{x^2 - i^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $i^2 = -1$.

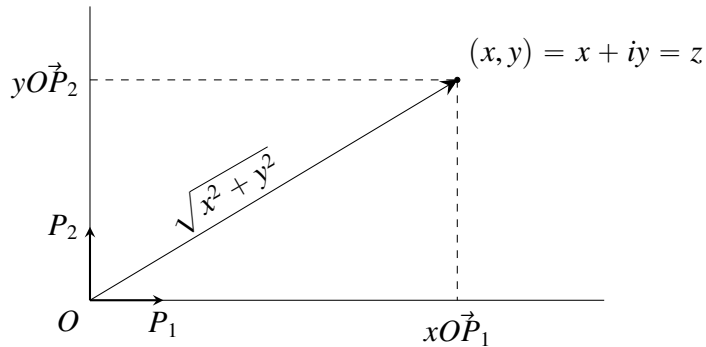
Ad esempio se $x + iy = 2 + i3$, ovvero $x = 2, y = 3$, si ha $x^2 + y^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ e quindi in base alla formula

$$\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{2}{13} - i \frac{3}{13}$$

è l'inverso di $2 + i3$.

L'espressione $x - iy$ che compare a numeratore della (4.38) si dice il **complesso coniugato** del numero complesso $x + iy$. Il coniugato di un numero $z \in \mathbb{C}$ si ottiene quindi semplicemente cambiando di segno la parte immaginaria di z . Il complesso coniugato di z si denota con \bar{z} .

Si chiama invece **norma** di un numero complesso $z = x + iy$ il numero reale $\sqrt{x^2 + y^2}$ e si denota con $|z|$ (analogamente alla notazione usata per il valore assoluto di un numero reale). La norma può essere visualizzata geometricamente come segue. Nel linguaggio delle sezioni precedenti, si fissi una base ortonormale del piano. Allora ogni numero complesso $z = x + iy$ è determinato da due numeri reali, la sua parte reale x e la sua parte immaginaria y . Per cui possiamo identificarlo con la coppia ordinata (x, y) e rappresentarlo quindi sul piano dove (x, y) è la coppia delle coordinate di un punto P rispetto ad una certa base ortonormale fissata $\{\vec{OP}_1, \vec{OP}_2\}$. Allora, come si vede nel disegno seguente



la norma $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ è, in base a quanto visto precedentemente, la lunghezza del segmento che congiunge l'origine O del piano cartesiano con il punto che identifica z . Essa rappresenta quindi la “lunghezza” del numero complesso.

Si noti che

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

come il seguente conto dimostra

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2.$$

Non è difficile verificare che l'operazione di coniugato gode delle seguenti proprietà rispetto alla somma e al prodotto di due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$(1) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

□

$$(2) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= (x_1 x_2 - (-y_1)(-y_2)) + i(x_1(-y_2) + x_2(-y_1)) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2.\end{aligned}$$

□