Passaggio al limite sotto il segno del differenziale, alias differenziabilità termine a termine in $\mathbb{R}^N$

Antonio Greco

Dipartimento di Matematica e Informatica
via Ospedale 72, 09124 Cagliari
e-mail: greco@unica.it

11–15 aprile 2022

Consideriamo, per semplicità, un aperto convesso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Il seguente teorema si può estendere ad un dominio (aperto connesso) limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sufficientemente regolare.

Teorema 1. *Se una successione di funzioni $f_k(x, y)$ converge in almeno un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, e se le successioni delle derivate parziali $\partial f_k/\partial x$ e $\partial f_k/\partial y$ convergono uniformemente nell'aperto convesso e limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, allora:*

a) le f_k convergono uniformemente in Ω ad una funzione $f(x, y)$;

b) la funzione f è differenziabile in Ω, e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y). \tag{1}$$

Dimostrazione. La parte a del teorema e la formula (1) seguono dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata che si trova, ad esempio, sui testi [FMS, pag. 10], [PS, teorema 1.6, pag. 128], e [R, teorema 7.17, pag. 149]: infatti il teorema citato si può applicare lungo ogni segmento incluso in Ω, e mostra, in particolare, che f è derivabile in ogni punto di Ω nella direzione di qualunque versore $v \in \mathbb{S}^1 = \partial B_1(0, 0)$. Resta da dimostrare che f è differenziabile.

Prima parte: f è differenziabile secondo Gâteaux. Infatti, essendo f_k differenziabile per ipotesi, vale la cosiddetta *formula del gradiente*: cioè, posto $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $\theta \in [\,0, 2\pi)$, si ha

$$\frac{\partial f_k}{\partial v}(x, y) = \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y)\, \cos\theta + \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y)\, \operatorname{sen}\theta. \tag{2}$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, e ricordando che le derivate direzionali convergono, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, \operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

come volevasi dimostrare. Ulteriori dettagli sul differenziale di Gâteaux si possono trovare in [AP1] (o anche [AP2] scrivendo y^2 al posto di y^4 nella funzione a pag. 6).

Seconda parte: le derivate direzionali convergono uniformemente rispetto alla direzione v. Infatti sottraendo la (3) dalla (2) si trova

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial v}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial v}(x,y)\right| \le \left|\frac{\partial f_k}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial f_k}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$$

e la tesi segue perché le due derivate parziali $\partial f_k/\partial x$ e $\partial f_k/\partial y$ convergono uniformemente in Ω.

Terza parte: f è differenziabile. Per vederlo, fissiamo un punto $(x_1, y_1) \in \Omega$. Per ogni $(x, y) \in \Omega \setminus \{(x_1, y_1)\}$ e per ogni n, k applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione differenza $f_n(x, y) - f_k(x, y)$ lungo il segmento che va dal punto (x_1, y_1) al punto (x, y): lungo il suddetto segmento esiste dunque un punto (ξ, η) tale che

$$\begin{aligned} f_n(x,y) - f_k(x,y) &= f_n(x_1,y_1) - f_k(x_1,y_1) \\ &\quad + \Big(\frac{\partial f_n}{\partial v}(\xi,\eta) - \frac{\partial f_k}{\partial v}(\xi,\eta)\Big)\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\,, \end{aligned}$$

essendo v il versore dipendente da (x, y) dato da

$$v = \frac{(x - x_1,\ y - y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}.$$

Poiché le derivate direzionali $\partial f_k/\partial v$ convergono uniformemente rispetto a v, possiamo applicare il criterio di Cauchy uniforme e dedurre che la successione dei rapporti

$$\frac{f_k(x,y) - f_k(x_1,y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} \tag{4}$$

converge uniformemente in $\Omega \setminus \{(x_1, y_1)\}$. Ancora per la convergenza uniforme di $\partial f_k/\partial v$, ne segue che anche la successione

$$\begin{aligned} &\frac{f_k(x,y) - f_k(x_1,y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} - \frac{\partial f_k}{\partial v}(x_1,y_1) \\ &= \frac{f_k(x,y) - f_k(x_1,y_1) - \frac{\partial f_k}{\partial x}(x_1,y_1)\,(x-x_1) - \frac{\partial f_k}{\partial y}(x_1,y_1)\,(y-y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} \end{aligned}$$

converge uniformemente in $\Omega \setminus \{(x_1, y_1)\}$. A questo punto possiamo applicare il teorema sullo scambio (o inversione) dei limiti, che si trova in [FMS, pag. 4] ed in [PS, teorema 1.4, pag. 127] in dimensione 1, e che si estende facilmente a dimensione N (vedere [R, teorema 7.11, pag. 146]). Otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} \frac{f(x,y) - f(x_1,y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1)\,(x-x_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1)\,(y-y_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = 0$$

come volevasi dimostrare. □

Osservazione. Fissato $(x_1, y_1) \in \Omega$, la convergenza delle successioni numeriche

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}(x_1, y_1), \qquad \frac{\partial f_k}{\partial y}(x_1, y_1).$$

implica che le funzioni

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}(x_1, y_1)\,\frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial y}(x_1, y_1)\,\frac{y - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}$$

convergono, rispettivamente, a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)\,\frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)\,\frac{y - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}$$

uniformemente rispetto a $(x, y) \in \Omega \setminus \{(x_1, y_1)\}$, in quanto le frazioni di cui sopra sono limitate. Questa osservazione, unitamente alla convergenza uniforme dei rapporti (4), conduce nuovamente alla tesi.

Bibliografia

[AP1] A. Ambrosetti, G. Prodi, A Primer of Nonlinear Analysis, Cambridge University Press 1993.

[AP2] A. Ambrosetti, G. Prodi, Analisi Non Lineare. I quaderno della Scuola Normale Superiore, Pisa 1973.

[FMS] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Lezioni di analisi matematica due, Zanichelli 2020.

[PS] C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica, vol. 2, Masson 1998.

[R] W. Rudin, Principi di analisi matematica, McGraw-Hill 1991.