



# Matematica Discreta

## Foglio 4

**Esercizio 1.** Si calcoli la nona riga del triangolo di Pascal-Tartaglia.

**Esercizio 2.** Sia  $X$  un insieme con  $n$  elementi, dove  $n$  è dispari.

- (a) Se  $n = 9$ , quanti sottoinsiemi con almeno 5 elementi ci sono?  
(b) Si dimostri che il numero di sottoinsiemi con almeno  $\frac{n+1}{2}$  elementi è  $2^{n-1}$ .

**Esercizio 3.** In una certa lotteria ogni settimana si sorteggiano successivamente 5 palline da un insieme di 12 palline. Le palline sono verdi o rosse, e su ogni pallina si trova una cifra da 0 a 7. Le palline rosse hanno le cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5 e le palline verdi hanno le cifre 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ogni biglietto della lotteria ha un unico numero da 00000 a 77777 composto di 5 cifre, ognuna colorata in verde o rosso.

- (a) Quanti biglietti ci sono in totale?  
(b) Quanti biglietti ci sono con tutte le cifre verdi?  
(c) Quanti biglietti ci sono con due cifre rosse e tre cifre verdi?  
(d) Quanti biglietti ci sono contenenti solo le cifre 2, 3, 4 e 5?

**Esercizio 4.** In un certo sistema solare, esistono due civiltà di extraterrestri che hanno due lingue diverse basate sullo stesso alfabeto, con 10 lettere.

- (a) La lingua della civiltà A soddisfa le seguenti proprietà:
- Tutti gli abbinamenti di 2, 3, 4 o 5 lettere formano una parola, e tutte le parole hanno fra 2 e 5 lettere.
  - Le lettere si possono ripetere in una stessa parola.
  - Nelle parole con 2 lettere l'ordine delle lettere non cambia il significato della parola.
  - Nelle parole con 3, 4 o 5 lettere si deve tenere in conto l'ordine delle lettere.

(continua sul retro)

(b) La lingua della civilizzazione B soddisfa le seguenti proprietà:

- Tutti gli abbinamenti di 3, 4, 5 o 6 lettere formano una parola, e tutte le parole hanno fra 3 e 6 lettere.
- Le lettere non si possono ripetere in una stessa parola se la parola ha 3 o 4 lettere. Invece, le ripetizioni sono permesse per parole con 5 o 6 lettere.
- Si deve sempre tenere in conto l'ordine delle lettere.

Si calcoli il numero di parole nel dizionario di ogni civilizzazione.

**Esercizio 5.** Si sviluppi l'espressione  $(x + y)^9$ .

**Esercizio 6.** Si determinino se i seguenti sono gruppi e, in caso affermativo, si trovi l'elemento neutro e l'inverso di un elemento generico.

- (a)  $(\mathbb{N}, *)$  dove  $a * b = ab + 1$  per ogni  $a, b \in \mathbb{N}$ ;
- (b)  $(\mathbb{Z}, *)$  dove  $a * b = a - b$  per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}$ ;
- (c)  $(\mathbb{R}, *)$  dove  $a * b = ab$  per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ ;
- (d)  $(\{-1, 1\}, *)$  dove  $a * b = ab$  per ogni  $a, b \in \{-1, 1\}$ ;
- (e)  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$  dove  $a * b = ab$  per ogni  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- (f)  $(\mathbb{R}^2, *)$  dove  $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$  per ogni  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ ;
- (g)  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, *)$  dove  $(a, b) * (c, d) = (ac, bd)$  per ogni  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ;
- (h)  $(S^1, *)$  dove  $S^1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$  e  $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$  per ogni  $(a, b), (c, d) \in S^1$ .

**Esercizio 7.** Si scriva ognuna delle seguenti permutazioni in  $S_7$  come un prodotto di cicli disgiunti e come un prodotto di trasposizioni. Si trovino le loro permutazioni inverse e si determini se sono permutazioni pari o dispari.

- (a)  $(12)(2761)(265)$
- (b)  $(2473)(35)$
- (c)  $(1267)(456)$
- (d)  $(34567)(1234)(34)(45)$
- (e)  $(12)(23)(456)(241)$
- (f)  $(47)(35)(134)(67)(21)(23)$