Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Equazioni differenziali

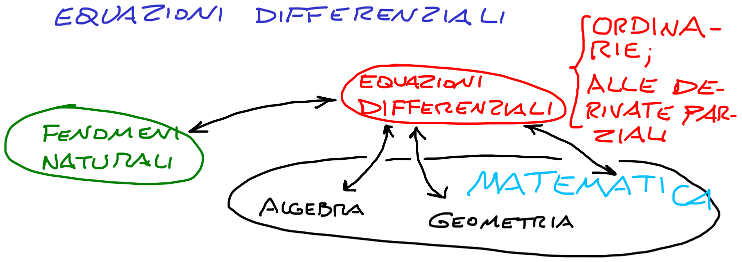
prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

MA 01 MAR 2022

IL SETTORE PIÙ AMPIO DI TUTTA LA MATEMATICA È QUELLO DELLE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI



DEFINIZIONE: UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA È UN'EQUAZIONE AVENTE LA FORMA

$$F\big(x, y(x), y'(x), \dots, \underbrace{y^{(n)}(x)}_{n\text{ ORDINE DELL'EQ.}}\big) = 0$$

DOVE $y(x)$ È UNA FUNZIONE INCOGNITA, E $x \in (a,b)$ INTERVALLO DATO.

DEFINIZIONE: UNA FUNZIONE $y:(a,b) \to \mathbb{R}$ DOTATA DELLE DERIVATE $y', \dots, y^{(n)}$ IN (a,b) CHE SODDISFA L'EQUAZIONE IN OGNI $x \in (a,b)$ SI DICE « SOLUZIONE » (NON IMPORTA COME LA SI SIA OTTENUTA!)

DEFINIZIONE: LE EQUAZIONI AVENTI LA FORMA

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big)$$

SI DICONO « IN FORMA NORMALE »: IMPORTANTISSIMO PER I TEOREMI DI ESISTENZA E UNICITÀ!

ESEMPIO: $y' = y$. STIAMO CERCANDO UNA $y(x)$ TALE CHE LA SUA DERIVATA $y'(x)$ SODDISFI $y'(x) = y(x)$ PER OGNI x

L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI È BEN NOTO, E SI RAPPRESENTA CON

$$y(x) = k e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}$$

QUASI MAI CON $\{ y:\mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{R} \ \ y(x) = k e^x \ \forall x \in \mathbb{R} \}$

DIMOSTRIAMO L'ASSERTO. ① LE SUDDETTE FUNZIONI SONO SOLUZIONI. PARTO DA $y(x) = k e^x$, CON UN $k \in \mathbb{R}$, TROVO, PER DERIVAZIONE, $y'(x) = k e^x$ E CONSTATO CHE RISULTA $y'(x) = y(x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. ② NON VI SONO ALTRE SOLUZIONI. INFATTI, OGNI $y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI PUÒ SCRIVERE $\boxed{y(x) = a(x) e^x}$ AVENDO POSTO $\boxed{a(x) = y(x) e^{-x}}$. ESEMPIO: $y(x) = \operatorname{sen} x$ SI PUÒ SCRIVERE $\frac{\operatorname{sen} x}{e^x} \cdot e^x$.

SE LA $y(x)$ SODDISFA $y' = y$, VERIFICHIAMO CHE $a(x)$ È COSTANTE. VERIFICHIAMO CHE $a(x) = y(x) e^{-x}$ È DERIVABILE, E LA SUA DERIVATA È $a'(x) = y'(x) e^{-x} - y(x) e^{-x} =$

$$= \big(y'(x) - y(x)\big) e^{-x} = 0 \text{ PER OGNI } x.$$

QUINDI $a(x) \equiv k \in \mathbb{R}$ E DI CONSEGUENZA $y(x) = a(x) e^x = k e^x$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

NON SI SA RISOLVERE OGNI EQUAZIONE DIFFERENZIALE! VI SONO TIPI NOTEVOLI E CONOSCIUTI: NE VEDREMO ALCUNI.

IL TIPO PIÙ SEMPLICE È QUELLO DELLE EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARABILI, CIOÈ DELLA FORMA

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$

CON $f \in C^0((a,b))$ E $g \in C^0(\mathbb{R})$.

SI DEFINISCE $C^0(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} : f$ È CONTINUA IN TUTTO L'INTERVALLO $I \}$.

L'EQUAZIONE $y' = y$ È DI TALE TIPO, CON $f(x) \equiv 1$ E $g(y) = y$. SI NOTI CHE, PONENDO $g(y) \equiv 1$, L'EQUAZIONE SI RIDUCE A $\boxed{y'(x) = f(x)}$ LE CUI SOLUZIONI SONO LE PRIMITIVE DI f. L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI È DUNQUE L'INTEGRALE INDEFINITO $\int f(x)\,dx$. NON È AFFATTO DETTO CHE SI OTTENGANO FUNZIONI ELEMENTARI! SE POI f NON È CONTINUA, L'EQUAZIONE $y'(x) = f(x)$ PUÒ NON AVERE SOLUZIONI: SI PENSI, AD ESEMPIO, ALL'EQUAZIONE $y'(x) = H(x)$ DOVE $H(x) =$

$$= \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

ESSA NON HA SOLUZIONE IN $(-\varepsilon, \varepsilon)$ PER NESSUN $\varepsilon \in (0, +\infty)$.

VERIFICHIAMO CHE, QUALUNQUE SIA $\varepsilon \in (0, +\infty)$, L'EQUAZIONE $y'(x) = H(x)$ NON HA SOLUZIONI IN $(-\varepsilon, \varepsilon)$. INFATTI NELL'INTERVALLO $(0, \varepsilon)$ L'EQUAZIONE SI RIDUCE A $y'(x) \equiv 1$ E QUINDI $y(x) = x + C$. DI CONSEGUENZA $y'(0^+) = 1$.

DERIVATA DESTRA DATA $y : [x_0, b) \to \mathbb{R}$, SE ESISTE FINITO IL LIMITE

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

IL SUO VALORE SI CHIAMA DERIVATA DESTRA E SI INDICA CON $f'(x_0^+)$. NOTA: NON È RICHIESTO CHE f SIA DERIVABILE IN (x_0, b), CIOÈ NON SI INTENDE CHE $f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$. SI PUÒ DIMOSTRARE (ESERCIZIO!) CHE: SE ESISTE $f'(x)$ IN (x_0, b) E SE f È CONTINUA IN x_0, SE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

ALLORA ESISTE ANCHE

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ED HA LO STESSO VALORE (ANCHE INFINITO).

L'EQUAZIONE $y'(x) = H(x)$ SULL'INTERVALLO $(-\varepsilon, 0)$ DIVENTA $y'(x) \equiv 0$ E LE SUE SOLUZIONI SONO $y(x) \equiv C$ E QUINDI $y'(0^-) = 0$.

QUINDI NON ESISTE UNA FUNZIONE DERIVABILE (ANCHE NELL'ORIGINE) CHE SODDISFI $y' = H(x)$ IN $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

ME 02 MAR 2022

ALLO STESSO RISULTATO SI PERVIENE IMMEDIATAMENTE INVOCANDO IL TEOREMA DI DARBOUX: LA DERIVATA $y'(x)$ DI UNA FUNZIONE $y(x)$ IN UN INTERVALLO (a,b) ASSUME TUTTI I VALORI INTERMEDI. APPLICAZIONE: NON ESISTE UNA $y(x)$ DERIVABILE IN $(-2,2)$ E TALE CHE $y'(x) \in \{0,1\}$ PER OGNI $x \in (-2,2)$ E $y'(x_0)=0$ E $y'(x_1)=1$ PER QUALCHE $x_0, x_1 \in (-2,2)$.

ESERCIZIO (DIFFICILE): DIMOSTRARE IL TEOREMA DI DARBOUX.

SOTTO L'IPOTESI CHE $f \in C^0((a,b))$ E $g \in C^0(\mathbb{R})$, LA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ SI PUÒ SVOLGERE CON IL SEGUENTE PROCEDIMENTO (CHE RICHIEDE ALCUNE INTEGRAZIONI), DETTO SEPARAZIONE DELLE VARIABILI.

① RICERCA DELLE SOLUZIONI BANALI, CIOÈ LE $y(x) \equiv y_0 \in \mathbb{R}$ DOVE $g(y_0)=0$.

SI VEDE SUBITO CHE $y'(x) = 0$ E INOLTRE $f(x) \cdot g(y(x)) = 0$.

ESEMPIO: IN $y'=y$ ABBIAMO $f(x) \equiv 1$ E $g(y)=y$, QUINDI $y_0 = 0$, E INFATTI LA FUNZIONE $y(x) \equiv 0$ SODDISFA L'EQUAZIONE.

② SUPPONIAMO CHE CI SIA UNA SOLUZIONE $y(x)$ ED UN PUNTO $x_0 \in (a,b)$ TALI CHE $g(y(x_0)) \neq 0$. PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO, RISULTA $g(y(x)) \neq 0$ IN UN INTORNO DI x_0 E POSSIAMO EFFETTUARE LA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI: CIOÈ SCRIVERE

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$$

MA $y'(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA, QUINDI AMBO I MEMBRI AMMETTONO PRIMITIVA, E RISULTA $\displaystyle\int \frac{y'(x)\,dx}{g(y(x))} = \int f(x)\,dx$

$= F(x) + C$, ESSENDO $F(x)$ UNA PRIMITIVA DI f. NEL PRIMO INTEGRALE PONIAMO $y = y(x)$ $\left(t = y(x)\right)$, QUINDI $dy = y'(x)\,dx$ $\left(dt = y'(x)\,dx\right)$

E OTTENIAMO

$$\left(\int \frac{dy}{g(y)}\right)_{y=y(x)} = \int \frac{dt}{g(t)} = F(x) + C$$

PONIAMO $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = G(y) + C$, ESSENDO $G(y)$ UNA PRIMITIVA DI $\dfrac{1}{g(y)}$,

E OTTENIAMO $G(y(x)) = F(x) + C$

SFIDA: TROVATE $g(y)$ TALE CHE L'EQUAZIONE $y'(x)=g(y(x))$ NON ABBIA SOLUZIONI

③ ESPLICITIAMO LA SOLUZIONE $y(x)$ DA

$$G(y(x))=F(x)+C.$$

MA $G(y)$ È INVERTIBILE! INFATTI $G'(y)=\frac{1}{g(y)}\neq 0$. QUINDI POSSIAMO SCRIVERE

$$y(x)=G^{-1}(F(x)+C).$$

QUINDI OGNI EVENTUALE SOLUZIONE NON BANALE HA LA FORMA DI CUI SOPRA. VERIFICHIAMO CHE LE FUNZIONI DEFINITE COME SOPRA SODDISFANO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE. CALCOLIAMO $y'(x)=$

$$\frac{d}{dx}G^{-1}(F(x)+C)=$$

$$=\frac{F'(x)}{G'(G^{-1}(F(x)+C))}=$$

$$=\frac{f(x)}{G'(y(x))}=f(x)\cdot g(y(x))$$

QUINDI L'EQUAZIONE È SODDISFATTA.

IN PRATICA SI PREFERISCE USARE LA NOTAZIONE DI LEIBNIZ

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\,g(y)$$

E MANIPOLARE DISINVOLTAMENTE I DIFFERENZIALI, SCRIVENDO

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)\,dx$$

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI, SI RITROVA IL RISULTATO PRECEDENTE.

ESEMPIO: L'EQUAZIONE $y'(x)=a(x)\,y(x)+f(x)$ NON È, IN GENERALE, A VARIABILI SEPARABILI. PERÒ, NEL CASO PARTICOLARE $a(x)\equiv m\in\mathbb{R}$ E $f(x)\equiv q\in\mathbb{R}$, DIVENTA $y'(x)=g(y(x))$ CON $g(y)=my+q$. UN ALTRO CASO NOTEVOLE È $f(x)\equiv 0$: L'EQUAZIONE DIVENTA $y'(x)=a(x)\,y(x)$.

1 STUDIAMO L'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI $y'=my+q$, CON $m,q\in\mathbb{R}$.

SE $m=0$ ESSA SI RIDUCE A $y'=q$ LE CUI SOLUZIONI SONO $y(x)=qx+C$, CON $C\in\mathbb{R}$. SE $m\neq 0$ PROCEDIAMO COME SOPRA. ① LA FUNZIONE $g(y)=my+q$ HA UN UNICO ZERO: $y_0=-\frac{q}{m}$ CUI CORRISPONDE LA SOLUZIONE BANALE $y(x)=-\frac{q}{m}$ PER $x\in\mathbb{R}$.

VE 04 MAR 2022

(2) PER TROVARE LE ALTRE SOLUZIONI, SCRIVIAMO $\frac{dy}{dx} = my + q$ E SEPARIAMO LE VARIABILI: OTTENIAMO

$$\frac{dy}{my+q} = dx$$

E, INTEGRANDO, $\frac{1}{m}\log|my(x)+q| = x + C$, $C \in \mathbb{R}$. (3) PER ESPLICITARE $y(x)$, MOLTIPLICHIAMO AMBO I MEMBRI PER m E SCRIVAMO

$$\log|my(x)+q| = mx + C,$$

$C \in \mathbb{R}$, DA CUI SEGUE

$$|my(x)+q| = k e^{mx}, \quad k = e^{C}$$

SE $my(x)+q > 0$, POSSIAMO SCRIVERE $my(x)+q = ke^{mx}$, $k \in (0,+\infty)$

ALTRIMENTI $my(x)+q = -ke^{mx}$,

QUINDI $y(x) = -\frac{q}{m} + \frac{k}{m}e^{mx}$ CON $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. SI VEDE CHE CON $k=0$ SI RAPPRESENTA $y(x) = -\frac{q}{m}$. IN CONCLUSIONE LE SOLUZIONI (BANALI E NON) SONO $y(x) = -\frac{q}{m} + \frac{k}{m}e^{mx}$, CON $k \in \mathbb{R}$. SI VEDE FACILMENTE CHE $y'(x) = ke^{mx} = my(x)+q$

2 $y'(x) = a(x)y(x)$ CON $a(x)$ CONTINUA IN UN INTERVALLO APERTO DATO. (1) ESSENDO $g(y) = y$, L'UNICA SOLUZIONE BANALE È $y(x) \equiv 0$. (2) SCRIVIAMO $\frac{dy}{dx} = a(x)y(x)$ E SEPARIAMO LE VARIABILI:

$$\frac{dy}{y} = a(x)\,dx$$

INTEGRANDO SI TROVA $\log|y(x)| = \int a(x)\,dx = A(x) + C$, ESSENDO $A(x)$ UNA PRIMITIVA DI $a(x)$. (3) ESPLICITIAMO $|y(x)| = k\,e^{A(x)}$ CON $k = e^{C}$ E TROVIAMO $y(x) = k\,e^{A(x)}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. SI CONCLUDE CHE LE SOLUZIONI (BANALI E NON) SONO $y(x) = k\,e^{A(x)}$, $k \in \mathbb{R}$.

VE 04 MAR 2022

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

DELL'EQUAZIONE $y' = f(x,y)$

(DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE)

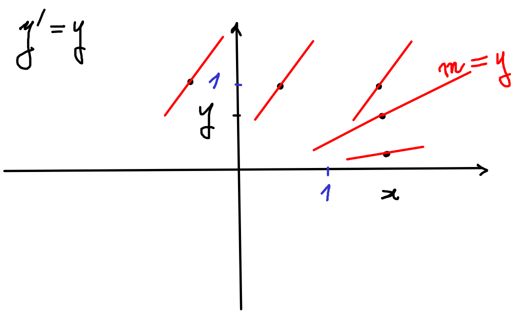
CON $f : (a,b) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

OPPURE $f : (a,b) \times (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$.

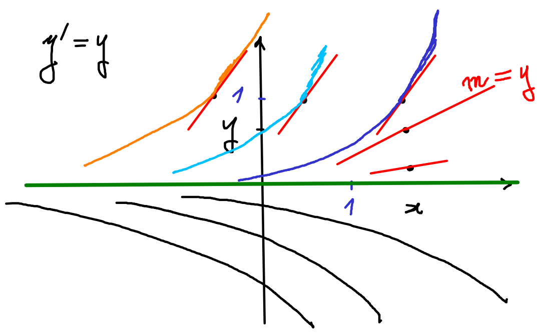
ESEMPIO: $y' = a(x)\, y(x) + b(x)$

QUI $f(x,y) = a(x)\, y + b(x)$, $x \in (a,b)$

LA $f(x,y)$ ASSEGNA, NELLA STRISCIA $S = (a,b) \times \mathbb{R}$ OVVERO NEL RETTANGOLO $R = (a,b) \times (c,d)$, UN CAMPO DI DIREZIONI, DETTO ANCHE « DISTRIBUZIONE ». PER L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA DERIVATA, L'EQUAZIONE $y'(x) = f(x, y(x))$ PRESCRIVE IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $y(x)$. PER FISSARE LE IDEE, CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE $y' = y$, DUNQUE $f(x,y) = y$.



UN CAMPO DI DIREZIONI È UN'APPLICAZIONE f CHE AD OGNI PUNTO DI S O DI R ASSOCIA UNA DIREZIONE. SAPPIAMO CHE LE SOLUZIONI DI $y' = y$ SONO $y(x) = k e^{x}$:



VE 04 MAR 2022

EQUAZIONI LINEARI

COSTITUISCONO UN CASO NOTEVOLE E AMPIAMENTE STUDIATO. AD ESEMPIO, L'EQUAZIONE DEL PENDOLO SEMPLICE IN ASSENZA DI ATTRITO NON È $y''(t) = -\omega^2 y$, MA È INVECE $\vartheta''(t) = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \vartheta(t)$, LA QUALE NON È LINEARE E FU RISOLTA DA C. G. J. JACOBI NELL'OTTOCENTO, E SI APPROSSIMA CON LA PRECEDENTE, DETTA « EQUAZIONE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI » PERCHÉ L'APPROSSIMAZIONE È VALIDA PER ϑ (OVVERO y) PICCOLA. QUELLA È LINEARE.

DEFINIZIONE. IN GENERALE, UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI ORDINE n HA LA FORMA

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$$

DOVE I COEFFICIENTI $a_k(x)$ ED IL TERMINE NOTO $f(x)$ SONO DATI. SUPPORREMO CHE SIANO CONTINUI. ESEMPIO: $y'' = -\omega^2 y$ HA LA FORMA $\sum_{k=0}^{2} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$ CON $f(x) \equiv 0$ (SI DICE OMOGENEA) E $a_2(x) \equiv 1$, $a_1(x) \equiv 0$ E $a_0(x) \equiv \omega^2$ (SI DICE A COEFFICIENTI COSTANTI).

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE IN FORMA NORMALE, A COEFFICIENTI CONTINUI

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + f(x)$$

SAPPIAMO CHE, SE $f(x) \equiv 0$, LE SOLUZIONI SONO $y(x) = k\, e^{A(x)}$ CON $k \in \mathbb{R}$ E $A(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $a(x)$. LASCIAMO CADERE L'IPOTESI CHE $f(x) \equiv 0$ E USIAMO IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE, DOVUTO A LAGRANGE. UNA FUNZIONE QUALUNQUE $y(x)$ SI PUÒ SCRIVERE

$y(x) = \varphi(x)\, e^{A(x)}$ CON $\varphi(x) = y(x)\, e^{-A(x)}$

SE PERÒ $y' = a(x)\, y(x) + f(x)$, COME SARÀ IL COEFFICIENTE φ ? AVREMO:

$$y'(x) = \varphi'(x)\, e^{A(x)} + \varphi(x)\, a(x)\, e^{A(x)}$$

MA ANCHE: $y' = a(x)\, \varphi(x)\, e^{A(x)} + f(x)$

DUNQUE $\varphi'(x)\, e^{A(x)} = f(x)$

DA CUI $\varphi'(x) = f(x)\, e^{-A(x)}$ E QUINDI

$\varphi(x) = \int f(x)\, e^{-A(x)}\, dx$. SI CONCLUDE CHE LE SOLUZIONI $y(x)$ DEVONO ESSERE $y(x) = e^{A(x)} \int f(x)\, e^{-A(x)}\, dx$.

ESERCIZIO: DERIVARE, E VERIFICARE CHE L'EQUAZIONE È SODDISFATTA.

SVOLGIMENTO. DERIVANDO LA FUNZIONE

$$y(x) = e^{A(x)} \int f(x)\, e^{-A(x)}\, dx$$

TROVIAMO $y'(x) =$

$$= a(x)\, e^{A(x)} \int f(x)\, e^{-A(x)}\, dx \; +$$

$$+ \; e^{A(x)} f(x)\, e^{-A(x)} =$$

$= f(x) + a(x)\, y(x)$ QUINDI L'EQUAZIONE È SODDISFATTA.

MA 08 MAR 2022

RIFORMULIAMO IL RISULTATO INDICANDO CON $B(x)$ UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE $f(x)\, e^{-A(x)}$, COSICCHÉ

$$\int f(x)\, e^{-A(x)}\, dx = B(x) + C.$$

ALLORA L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI $y'(x) = a(x) y(x) + f(x)$ SI PUÒ INDICARE CON

$$y(x) = e^{A(x)} \left(B(x) + C \right) =$$

$$= C\, e^{A(x)} + e^{A(x)} B(x)$$

FONDAMENTALE INTERPRETAZIONE: LE SOLUZIONI DI $y'(x) = a(x)\, y(x) + f(x)$ SONO SOMMA DI UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $y'(x) = a(x)\, y(x)$ E DI UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $z_0(x) = e^{A(x)} B(x)$ DELL'EQUAZIONE COMPLETA.

SUSSISTE UN ISOMORFISMO L (UNA TRASLAZIONE) FRA L'INSIEME DELLE $y(x) = C\, e^{A(x)}$ SOLUZIONI DI $y'(x) = a(x)\, y(x)$ E L'INSIEME DELLE SOLUZIONI $z(x)$ DI $z'(x) = a(x)\, z(x) + f(x)$, DATO DA $L: y \longmapsto y + z_0$. QUESTO RISULTATO HA UNA VALIDITÀ GENERALE:

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE LINEARE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$$

E SUPPONIAMO CHE ESISTA ALMENO UNA SOLUZIONE $z_0(x)$.

ALLORA UNA FUNZIONE $z(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE SE E SOLO SE, POSTO $y(x) = z(x) - z_0(x)$, RISULTA $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. ① SUPPONIAMO CHE $z(x)$ SODDISFI L'EQUAZIONE. POSTO $y(x) = z(x) + - z_0(x)$, SI HA $y^{(k)}(x) = z^{(k)}(x) - z_0^{(k)}(x)$.

MOLTIPLICANDO PER $a_k(x)$ E SOMMANDO SU k SI TROVA $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x) z^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x) z_0^{(k)}(x)$$

$= f(x) - f(x) = 0$. ② FISSATE $z_0(x)$ E $y(x)$ TALI CHE $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) z_0^{(k)}(x) = f(x)$ E $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$, PONIAMO $z(x) = y(x) + z_0(x)$ E VERIFICHIAMO CHE $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) z^{(k)}(x) = f(x)$.

N.B. SI SUOLE DEFINIRE L'OPERATORE $\mathcal{L}$ CHE ALLA FUNZIONE $y(x)$ ASSOCIA LA FUNZIONE $\mathcal{L}y$ DATA DA $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x)$.

ESSENDO $\mathcal{L}$ UN OPERATORE LINEARE, SI HA $\mathcal{L}z = \mathcal{L}(y + z_0) = \mathcal{L}y + \mathcal{L}z_0 = 0 + f = f$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

OSSERVAZIONE: L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $\mathcal{L}y = 0$ È UNO SPAZIO VETTORIALE. INFATTI, PRESE DUE SOLUZIONI y_1, y_2 E DUE SCALARI $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ SI TROVA $\mathcal{L}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = = \lambda_1 \mathcal{L}y_1 + \lambda_2 \mathcal{L}y_2 = 0$.

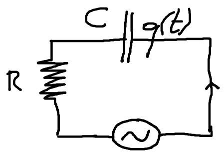
TEOREMA: SE I COEFFICIENTI SONO CONTINUI IN UN INTERVALLO (a,b), E SE $a_n(x) \neq 0$ IN (a,b) ALLORA LA DIMENSIONE DI TALE SPAZIO È PROPRIO n.

SCHEMA DELLA DIMOSTRAZIONE: Ⓐ DIMOSTRARE L'ESISTENZA DI n SOLUZIONI $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ LINEARMENTE INDIPENDENTI.

Ⓑ PRESA UNA SOLUZIONE QUALUNQUE $y(x)$, ESISTONO $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ TALI CHE $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j(x)$ PER OGNI $x \in (a,b)$.

 MA 08 MAR 2022

APPLICAZIONE. CIRCUITO RC IN CORRENTE ALTERNATA.



$i(t) = q'(t)$

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \,\mathrm{sen}\,\omega t$

PER LA SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF, POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{1}{C} q(t) + R\, q'(t) = \mathcal{E}_0 \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

OVVERO $q'(t) = \frac{-1}{RC} q(t) + \frac{\mathcal{E}_0}{R}\,\mathrm{sen}\,\omega t$.

L'INTEGRALE GENERALE (LA GENERICA SOLUZIONE) DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $q'(t) = \frac{-1}{RC} q(t)$ È $q(t) = k\, e^{-\frac{t}{RC}}$. PER PROSEGUIRE, ESPRIMIAMO LE SOLUZIONI $y(t)$ DELL'EQUAZIONE COMPLETA NELLA FORMA $y(t) = \varphi(t)\, e^{-\frac{t}{RC}}$. DERIVANDO, TROVIAMO

$$y'(t) = \varphi'(t)\, e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC}\, y(t).$$

PERCIÒ L'EQUAZIONE $y' = \frac{-1}{RC}\, y + \frac{\mathcal{E}_0}{R}\,\mathrm{sen}\,\omega t$ SI TRADUCE NELLA CONDIZIONE $\varphi'(t)\, e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\,\mathrm{sen}\,\omega t$, CIOÈ $\varphi'(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\, e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}\,\omega t$, DA CUI $\varphi(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\int e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}\,\omega t\, dt$.

INTEGRANDO DUE VOLTE PER PARTI, TROVIAMO

$$\int e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}\,\omega t\, dt = RC\, e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}\,\omega t + {}$$

$$- \omega RC \int e^{\frac{t}{RC}} \cos\omega t\, dt = RC\, e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}\,\omega t + {}$$

$$- \omega (RC)^2 e^{\frac{t}{RC}} \cos\omega t - (\omega RC)^2 \int e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}\,\omega t\, dt$$

QUINDI $\left[1 + (\omega RC)^2\right] \int e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}\,\omega t\, dt =$

$$= RC\, e^{\frac{t}{RC}} \left(\mathrm{sen}\,\omega t - \omega RC \cos\omega t\right) + k.$$

DIVIDENDO PER $\sqrt{1 + (\omega RC)^2}$ TROVIAMO

$$\sqrt{1 + (\omega RC)^2} \int e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}\,\omega t\, dt =$$

$$= RC\, e^{\frac{t}{RC}} \left(\frac{\mathrm{sen}\,\omega t}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} - \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos\omega t \right) + k$$

$= RC\, e^{\frac{t}{RC}}\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha) + k$, DOVE $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

È INDIVIDUATO DALLE CONDIZIONI

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

CON TALE ESPRESSIONE, TROVIAMO

$$\varphi(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(\frac{RC\, e^{\frac{t}{RC}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha) + k \right)$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0 C\, e^{\frac{t}{RC}}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha) + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

E PERCIÒ LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DATA SONO:

$$y(t) = \frac{\mathcal{E}_0 C\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha)}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} + k\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

MA 08 MAR 2022

DUE DOMANDE SULLE EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI:

1 SE, DALL'ESPRESSIONE $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$ VALIDA PER LE SOLUZIONI NON BANALI, SI POSSANO RICAVARE QUELLE BANALI PARTICOLARIZZANDO LA COSTANTE C;

2 SE LE SOLUZIONI NON BANALI ESISTONO IN TUTTO L'INTERVALLO I, DOMINIO DI $f(x)$.

L'EQUAZIONE È $y'(x) = f(x)\, g(y(x))$

ME 09 MAR 2022

LE RISPOSTE SONO NEGATIVE. PER ESEMPIO, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}$.

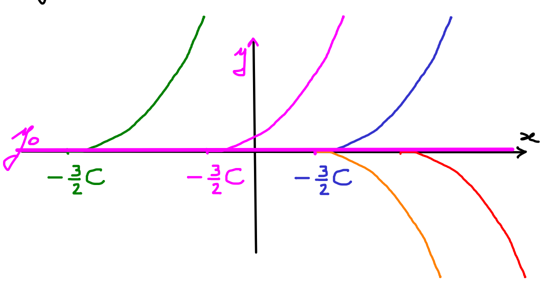
QUI LA FUNZIONE $g(y) = \sqrt[3]{y}$ HA L'UNICO ZERO $y_0 = 0$, QUINDI ESISTE UN'UNICA SOLUZIONE BANALE: $y(x) \equiv 0$. PER TROVARE QUELLE NON BANALI, DIVIDIAMO PER $\sqrt[3]{y}$ E TROVIAMO $\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = x + C$. D'ALTRO CANTO, SI HA $\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{3}{2} y^{2/3} + C$,

QUINDI $0 \le \frac{3}{2} y^{2/3}(x) = x + C$.

POSSIAMO GIÀ OSSERVARE CHE $x \geq -C$.

ESPLICITANDO $y(x)$ TROVAMO:

$$y(x) = \pm \left(\frac{2}{3} x + C\right)^{3/2}$$



ME 09 MAR 2022

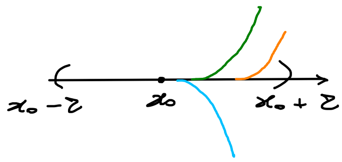
OSSERVAZIONE: QUALUNQUE SIA $C \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3} x + C\right)^{3/2}, & x \geq -\frac{3}{2} C \\ 0, & x < -\frac{3}{2} C \end{cases}$$

È UNA SOLUZIONE DI $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. IDEM $-y(x)$. IN ALTRI TERMINI, QUALUNQUE SIA $x_0 \in \mathbb{R}$, IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt[3]{y(x)} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

HA INFINITE SOLUZIONI IN OGNI INTORNO DI x_0.



TERMINOLOGIA: IL PROBLEMA $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

CON x_0 E y_0 DATI, SI DICE « PROBLEMA AI VALORI INIZIALI » O ANCHE « PROBLEMA DI CAUCHY », E LA CONDIZIONE $y(x_0) = y_0$ SI DICE « CONDIZIONE INIZIALE »

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE, SE $f(x,y)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA RISPETTO ALLA COPPIA (x,y) IN UN INTORNO (BIDIMENSIONALE) DEL PUNTO (x_0, y_0), E SE SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ, ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY HA UN'UNICA SOLUZIONE.

LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ: ESISTE UNA COSTANTE $L \in (0, +\infty)$ TALE CHE PER OGNI x, y_1, y_2 E CIOÈ PER OGNI $(x, y_1), (x, y_2)$ SI HA

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\, |y_1 - y_2|$$

EQUIVALENTEMENTE, DEVE AVVENIRE CHE

$$\frac{\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|}{|y_1-y_2|}\le L$$

PER OGNI x, y_1, y_2 CON $y_1 \neq y_2$. OVVERO

$$\sup_{(x,y_1)\neq(x,y_2)} \frac{\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|}{|y_1-y_2|} < +\infty$$

NOTA: SE IL DOMINIO DI f È UN RETTANGOLO $R=(a,b)\times(c,d)$ O UNA STRISCIA $S=$ $=(a,b)\times\mathbb{R}$, E SE ESISTE IVI LA DERIVATA $\frac{\partial f}{\partial y}$, PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

SI HA $$\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x))$$

QUINDI LA LIPSCHITZIANITÀ DI f RISPETTO ALLA y EQUIVALE ALLA LIMITATEZZA DI $\frac{\partial f}{\partial y}$. ESERCIZIO: VERIFICARE!

SE, POI, LA $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ È CONTINUA, ALLORA È LOCALMENTE LIMITATA E QUINDI f È LOCALMENTE LIPSCHITZIANA RISPETTO AD y.

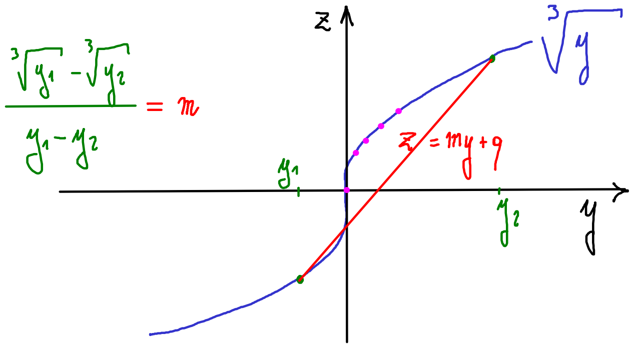
ESERCIZIO: STABILIRE SE LA FUNZIONE $f(x,y)=\sqrt[3]{y}$ È LIPSCHITZIANA. NON LO È PERCHÉ SI TROVA CHE

$$\sup_{(x,y_1)\neq(x,y_2)} \frac{\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|}{|y_1-y_2|} =$$

$$= \sup_{(x,y_1)\neq(x,y_2)} \frac{\left|\sqrt[3]{y_1}-\sqrt[3]{y_2}\right|}{|y_1-y_2|} \geq$$

$$\geq \sup_{y_1>0} \frac{\sqrt[3]{y_1}}{y_1} = \sup_{y_1>0} \frac{1}{y_1^{2/3}} = +\infty$$

PERCHÉ $\lim_{y_1\to 0} \frac{1}{y_1^{2/3}} = +\infty$.



VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE, SE $f(x,y)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA RISPETTO ALLA COPPIA (x,y) IN UN INTORNO (BIDIMENSIONALE) DEL PUNTO (x_0, y_0), E SE SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ, ALLORA IL PROBLEMA DI CAUCHY HA UN'UNICA SOLUZIONE.

PER DIMOSTRARE L'ENUNCIATO, PRENDIAMO DUE SOLUZIONI $y_1(x)$, $y_2(x)$ E VERIFICHIAMO CHE LA FUNZIONE $w(x) = y_1(x) - y_2(x)$ È IDENTICAMENTE NULLA. INNANZITUTTO, OCCORRE PASSARE DALL'EQUAZIONE $y' = f(x,y)$ ALL'EQUAZIONE $\int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt = y(x) - y_0 =$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \quad \text{(EQUAZIONE INTEGRALE)}.$$

È NOTEVOLE IL FATTO CHE, SE UNA $y(x)$ CONTINUA IN UN INTORNO DI x_0 SODDISFA L'EQUAZIONE $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$, ALLORA ESSENDO LA $f(t, y(t))$ CONTINUA, PER IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE IL SECONDO MEMBRO È DERIVABILE E QUINDI SI HA

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

ESSENDO $y_{1,2}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{1,2}(t))$, PER SOTTRAZIONE SI TROVA

$$w(x) = \int_{x_0}^{x} \left[f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right] dt$$

MA $\left| f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right| \leq L \left| y_1(t) - y_2(t) \right| =$

$= L\,|w(t)|$

VE 11 MAR 2022

QUINDI, NEL CASO $x > x_0$, POSSIAMO SCRIVERE

$|w(x)| \leq \int_{x_0}^{x} L\,|w(t)|\,dt$. FISSATO $\tau > 0$ TALE CHE L'INTERVALLO $[x_0, x_0+\tau]$ STIA NEL DOMINIO DI w, PONIAMO $M = \max_{[x_0,\, x_0+\tau]} |w(t)|$ E SCRIVIAMO

$|w(x)| \leq L M |x - x_0|$. ALLO STESSO RISULTATO SI PERVIENE SE $x \in [x_0 - \tau, x_0]$. PROCEDENDO PER INDUZIONE SI TROVA CHE $|w(x)| \leq M \dfrac{(L|x-x_0|)^k}{k!}$.

INFATTI, AMMESSA LA TESI PER UN $k \in \mathbb{Z}^+$, SI TROVA CHE $|w(x)| \leq \int_{x_0}^{x} L\,|w(t)|\,dt \leq$

$$\leq \frac{M L^{k+1}}{k!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^k\,dt = \frac{M L^{k+1}}{k!} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} =$$

$$= \frac{M\,(L(x-x_0))^{k+1}}{(k+1)!}$$ PER $x > x_0$. SAPENDO CHE

$\lim_{k \to +\infty} \dfrac{z^k}{k!} = 0$ PER OGNI $z \in \mathbb{R}$, LA TESI SEGUE.

VERIFICHIAMO CHE, SE ESISTONO n SOLUZIONI $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ LINEARMENTE INDIPENDENTI DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$ A COEFFICIENTI CONTINUI E CON $a_n(x) \neq 0$ IN (a,b), ALLORA PER OGNI SOLUZIONE $y(x)$ ESISTONO n COSTANTI $A_0, \dots, A_{n-1}$ TALI CHE

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j\, y_j(x).$$

STUDIAMO INNANZITUTTO L'EQUAZIONE $y'' = -\omega^2 y$.

SAPPIAMO CHE $y_0(x) = \cos \omega x$ E $y_1(x) = \operatorname{sen} \omega x$ SONO DUE SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI (ESERCIZIO: VERIFICARLO). VERIFICHIAMO CHE L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) = A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x$.

INDICHIAMO CON $y(x)$ UNA SOLUZIONE DI $y'' = -\omega^2 y$ E DEFINIAMO $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ TRAMITE IL SISTEMA

$$\begin{cases} \varphi_0(x) \cos \omega x + \varphi_1(x) \operatorname{sen} \omega x = y(x) \\ -\omega \varphi_0(x) \operatorname{sen} \omega x + \omega \varphi_1(x) \cos \omega x = y'(x) \end{cases}$$

LA DEFINIZIONE È BEN POSTA PERCHÉ IL DETERMINANTE

$$\begin{vmatrix} \cos \omega x & \operatorname{sen} \omega x \\ -\omega \operatorname{sen} \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega > 0$$

(DETERMINANTE WRONSKIANO). DICO CHE $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ SONO COSTANTI. INNANZITUTTO, SONO DERIVABILI (REGOLA DI CRAMER):

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega x & -\frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega x \\ \operatorname{sen} \omega x & \frac{1}{\omega} \cos \omega x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}.$$

VE 11 MAR 2022

DERIVIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} \varphi_0(x) \cos \omega x + \varphi_1(x) \operatorname{sen} \omega x = y(x) \\ -\omega \varphi_0(x) \operatorname{sen} \omega x + \omega \varphi_1(x) \cos \omega x = y'(x) \end{cases}$$

DALLA PRIMA EQUAZIONE, TROVIAMO $y'(x) = \varphi_0'(x) \cos \omega x + \varphi_1'(x) \operatorname{sen} \omega x + y'(x)$, QUINDI

$$\varphi_0'(x) \cos \omega x + \varphi_1'(x) \operatorname{sen} \omega x = 0$$

DERIVANDO LA SECONDA EQUAZIONE, TROVIAMO $y''(x)$

$$= -\omega \varphi_0'(x) \operatorname{sen} \omega x + \omega \varphi_1'(x) \cos \omega x - \omega^2 y(x)$$

$$= -\omega \varphi_0'(x) \operatorname{sen} \omega x + \omega \varphi_1'(x) \cos \omega x + y''(x)$$

DA CUI SEGUE

$$\begin{cases} \varphi_0'(x) \cos \omega x + \varphi_1'(x) \operatorname{sen} \omega x = 0 \\ -\omega \varphi_0'(x) \operatorname{sen} \omega x + \omega \varphi_1'(x) \cos \omega x = 0 \end{cases}$$

QUINDI $\varphi_0'(x) = \varphi_1'(x) = 0$ PER OGNI x, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

VE 11 MAR 2022

PER AFFRONTARE IL CASO GENERALE, PRENDIAMO n SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ E COSTRUIAMO LA MATRICE

$$\begin{pmatrix} y_0(x) & y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) \\ y_0'(x) & y_1'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) \\ y_0''(x) & y_1''(x) & \dots & y_{n-1}''(x) \\ \dots & & & \\ y_0^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

IL CUI DETERMINANTE SI DICE WRONSKIANO.

ESERCIZIO: SE LE $y_j(x)$ SONO LEGATE (NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI) IL WRONSKIANO È IDENTICAMENTE NULLO.

MA 15 MAR 2022

SVOLGIMENTO: SE LE $y_j(x)$ SONO LEGATE, ESISTONO n SCALARI $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq \bar{0}$ TALI CHE

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j(x) = 0 \in \mathbb{R} \quad \text{PER OGNI } x \in (a,b),$$

CIOÈ $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j = 0$ (= FUNZIONE NULLA)

LA TESI SEGUE PER LA LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE E LA MULTILINEARITÀ DEL DETERMINANTE.

MA 15 MAR 2022

PROBLEMA: SE LE $y_j(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, IL WRONSKIANO NON SI ANNULLA IN NESSUN PUNTO. INCIDENTALMENTE, DIMOSTRIAMO IL TEOREMA DEL WRONSKIANO, O TEOREMA DI JACOBI:

SE LE $y_j(x)$ SODDISFANO $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y_j^{(k)}(x) = 0$

PER OGNI j, ALLORA IL WRONSKIANO $W(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE $a_n(x) W'(x) + a_{n-1}(x) W(x) = 0$.

PERCIÒ, SE $a_n(x)$ E $a_{n-1}(x)$ SONO CONTINUI E $a_n(x) \neq 0$ IN (a,b), ALLORA, FISSATO UN $x_0 \in (a,b)$, SI HA $W(x) = C e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt}$, $C \in \mathbb{R}$.

MA 15 MAR 2022

PER DIMOSTRARE IL TEOREMA DI JACOBI, SERVE ESPRIMERE LA DERIVATA DELLA FUNZIONE $\det\left(a_{ij}(x)\right)$ DOVE LE $a_{ij}(x)$ SONO DERIVABILI IN UN DATO PUNTO x_0. SI TROVA CHE

$$\frac{d}{dx}\det\left(a_{ij}(x)\right) = \begin{vmatrix} a_{11}'(x) & \dots & a_{1n}'(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}'(x) & \dots & a_{2n}'(x) \\ \dots & & \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & & \\ a_{n-1,1}(x) & \dots & a_{n-1,n}(x) \\ a_{n1}'(x) & \dots & a_{nn}'(x) \end{vmatrix}.$$

INFATTI SI HA CHE

$$\frac{d}{dx}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{|\sigma|}a_{1\sigma(1)}(x)\,a_{2\sigma(2)}(x)\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}(x) =$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{|\sigma|}\Big(a_{1\sigma(1)}'(x)\,a_{2\sigma(2)}(x)\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}(x) +$$

$$+\dots+a_{1\sigma(1)}(x)\cdot\ldots\cdot a_{n-1,\sigma(n-1)}(x)\,a_{n\sigma(n)}'(x)\Big) =$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{|\sigma|}a_{1\sigma(1)}'(x)\,a_{2\sigma(2)}(x)\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}(x) +$$

$$+\dots+\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{|\sigma|}a_{1\sigma(1)}(x)\cdot\ldots\cdot a_{n-1,\sigma(n-1)}(x)\,a_{n\sigma(n)}'(x)$$

CHE È LA TESI.

PER DIMOSTRARE IL TEOREMA DI JACOBI, ESPRIMIAMO $w'(x)$ TRAMITE LA FORMULA PRECEDENTE:

$$w'(x) = \begin{vmatrix} y_0'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) \\ y_0'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) \\ \dots & & \\ y_0^{(n-1)}(x) & \dots & y_0^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_0(x) & \dots & y_{n-1}(x) \\ \dots & & \\ y_0^{(n-1)}(x) & \dots & y_0^{(n-1)}(x) \\ y_0^{(n-1)}(x) & \dots & y_0^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_0(x) & \dots & y_{n-1}(x) \\ \dots & & \\ y_0^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) \\ y_0^{(n)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

MOLTIPLICO PER $a_n(x)$ E OTTENGO $a_n(x)\,w'(x) =$

$$\begin{vmatrix} y_0(x) & \dots & y_{n-1}(x) \\ \dots & & \\ y_0^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) \\ a_n(x)\,y_0^{(n)}(x) & \dots & a_n(x)\,y_{n-1}^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

MA SICCOME $a_n(x)\,y_j^{(n)}(x)$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\,y_j^{(i)}(x)$$ PER CIASCUN $j\in\{0,\dots,n-1\}$,

POSSIAMO SCRIVERE $a_n(x)\,w'(x) =$

$$\begin{vmatrix} y_0(x) & \dots & y_{n-1}(x) \\ \dots & & \\ y_0^{(n-2)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) \\ -a_{n-1}(x)\,y_0^{(n-1)}(x) & \dots & -a_{n-1}(x)\,y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$= -a_{n-1}(x)\,w(x)$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

PRENDIAMO DUNQUE n SOLUZIONI LINEARMENTE INDIPENDENTI $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ DELL'EQUAZIONE

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0.$$

ALLORA $W(x) \neq 0$ PER OGNI x E PERCIÒ, INDICATA CON $y(x)$ UNA QUALUNQUE SOLUZIONE, RESTANO INDIVIDUATE LE FUNZIONI $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ DAL SISTEMA

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(i)}(x) = y^{(i)}(x), \quad i = 0, \dots, n-1$$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE $\varphi_j(x) = \text{COST.}$ PER OGNI j.

1) LE φ_j SONO DERIVABILI (REGOLA DI CRAMER):

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \dots \\ \varphi_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \left(y_j^{(i)}(x) \right)^{-1} \begin{pmatrix} y(x) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

2) PER OGNI $i = 0, \dots, n-2$ SI HA:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(i)}(x) = y^{(i)}(x) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(i+1)}(x) = y^{(i+1)}(x) \end{cases}$$

DERIVANDO LA PRIMA, E USANDO LA SECONDA, TROVIAMO

$$y^{(i+1)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(i)}(x) + y^{(i+1)}(x)$$

QUINDI $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(i)}(x) = 0$ PER $i \leq n-2$

3) DERIVANDO $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(n-1)}(x) = y^{(n-1)}(x)$,

E USANDO L'EQUAZIONE $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y_j^{(k)}(x) = 0$,

TROVIAMO $\displaystyle y^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(n)}(x)$ E QUINDI $a_n(x)\, y^{(n)}(x) =$

$$= a_n(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=0} \varphi_j(x)\, a_n(x)\, y_j^{(n)}(x)$$

$$= a_n(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y_j^{(i)}(x) =$$

$$= a_n(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(i)}(x)$$

$$= a_n(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x)$$ DA CUI

$$a_n(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x).$$ QUINDI

LE $\varphi_j'(x)$ SODDISFANO IL SISTEMA

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(i)}(x) = 0 \quad \text{PER } i \leq n-2 \\ \displaystyle a_n(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) \end{cases}$$

MA SE $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) \overset{*}{=} 0$ IN (a,b), LE $\varphi_j'(x)$ SONO NULLE, E LE $\varphi_j(x)$ COSTANTI.

N.B. SOLO QUI SI USA L'EQUAZIONE PER $y(x)$

ME 16 MAR 2022

LA BUONA POSITURA DEL SISTEMA PRECEDENTE SI FONDA SULLA INVERTIBILITÀ DELLA MATRICE

$$\left(y_j^{(i)}(x)\right)_{i,j=0,\dots,n-1} \quad \text{PER OGNI } x \in (a,b).$$

DIMOSTRIAMO CHE, SE ESSA NON È INVERTIBILE IN UN $x_0 \in (a,b)$, ALLORA ESISTONO $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq \bar{O}$ TALI CHE $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j(x) = 0$ PER OGNI $x \in (a,b)$. INFATTI, SE I VETTORI COLONNA

$$\bar{V}_j(x_0) = \begin{pmatrix} y_j(x_0) \\ y_j'(x_0) \\ \cdots \\ y_j^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

NON SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, ESISTONO $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq \bar{O}$ TALI CHE $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \bar{V}_j(x_0) = \bar{O}$. LI USO PER DEFINIRE IN (a,b) LA FUNZIONE $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j(x)$

CHE HA DUE PROPRIETÀ: (I) $\sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)}(x) = 0$

(II)
$$\begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \begin{pmatrix} y_j(x_0) \\ y_j'(x_0) \\ \cdots \\ y_j^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \bar{V}_j(x_0) = \bar{O},$$

QUINDI È SOLUZIONE DEL PROBLEMA

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i(x)}{a_n(x)} y^{(i)}(x) \\ y^{(i)}(x_0) = 0 \quad \text{PER } i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

SICCOME IL SUDDETTO PROBLEMA HA LA SOLUZIONE BANALE IDENTICAMENTE NULLA, ALLORA, PER IL TEOREMA DI UNICITÀ DELLA SOLUZIONE, POSSIAMO SCRIVERE

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j y_j(x) = 0 \text{ IN } (a,b)$$

E QUINDI LE FUNZIONI $y_j(x)$ SONO LEGATE.

CONTRONOMINALE: SE LE $y_j(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, LA MATRICE $\left(y_j^{(i)}(x)\right)_{i,j=0,\dots,n-1}$ È INVERTIBILE PER OGNI $x \in (a,b)$.

OSSERVAZIONI SULL'UNICITÀ DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA
$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i(x)}{a_n(x)} y^{(i)}(x) \\ y^{(i)}(x_0) = 0 \quad \text{PER } i=0,\dots,n-1 \end{cases}$$

INNANZITUTTO, LA FUNZIONE $f(x, y_0, \dots, y_{n-1}) = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i(x)}{a_n(x)} y_i$ DEFINITA SULLO STRATO $S = (a,b) \times \mathbb{R}^n$ È DERIVABILE (CON CONTINUITÀ) RISPETTO ALLE y_i

E SI HA CHE $\frac{\partial f}{\partial y_i} = -\frac{a_i(x)}{a_n(x)}$ QUINDI È LIPSCHITZIANA IN OGNI SOTTOSTRATO $[\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^n \subset (a,b) \times \mathbb{R}^n$ (TEOREMA DI WEIERSTASS: VEDI LEZIONE 09/03).

LA DIMOSTRAZIONE DELLA NULLITÀ DELLA SOLUZIONE $y(x)$ SEGUE LA STESSA STRATEGIA DEL 11/03:

PONIAMO $\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$, $\bar{y}'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \dots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \dots \\ -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i(x)}{a_n(x)} y^{(i)}(x) \end{pmatrix}$$
PERCIÒ LA NORMA DI $\bar{y}'(x)$ SI CONTROLLA CON (È $\leq$ DI UNA COSTANTE PER) LA NORMA DI $\bar{y}(x)$. INOLTRE, PER IL TEOREMA FONDAMENTALE, $\bar{y}(x) = \bar{y}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \bar{y}'(t)\, dt$ E LA CONDIZIONE INIZIALE È $\bar{y}(x_0) = \bar{0}$ QUINDI LA NORMA DI $\bar{y}(x)$ SI CONTROLLA CON QUELLA DI $\bar{y}'(x)$ E SI RAGIONA COME VENERDÌ 11/03.

RELAZIONE COL TEOREMA FONDAMENTALE DELLE CURVE IN FORMA PARAMETRICA

DATA UNA CURVA PIANA $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(s) \in \mathbb{R}^2$ DERIVABILE DUE VOLTE E CON VELOCITÀ $\bar{\varepsilon}'(s) \neq 0$ PER OGNI $s \in (a,b)$, NON È RESTRITTIVO SUPPORRE CHE $\|\hat{t}(s)\| = \|\bar{\varepsilon}'(s)\| = 1$ PER OGNI s.

SE $\hat{t}'(s) \neq \bar{0}$, RESTA UNIVOCAMENTE DEFINITO IL VERSORE NORMALE $\hat{n}(s) = \frac{\hat{t}'(s)}{\|\hat{t}'(s)\|}$ E SI PUÒ SCRIVERE $\hat{t}'(s) = k(s)\, \hat{n}(s)$ DOVE $k(s) = \|\hat{t}'(s)\|$.

SICCOME $\langle \hat{t}(s), \hat{n}(s) \rangle = \hat{t}(s) \times \hat{n}(s) = \hat{t}(s) \cdot \hat{n}(s) = 0$ PER OGNI s, DERIVANDO AMBO I MEMBRI SI TROVA CHE $\langle \hat{n}'(s), \hat{t}(s) \rangle = -\langle \hat{t}'(s), \hat{n}(s) \rangle = -\langle k(s)\hat{n}(s), \hat{n}(s) \rangle = -k(s)$, QUINDI $\hat{n}'(s) = -k(s)\, \hat{t}(s)$. SI OTTIENE QUINDI UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE:
$$\begin{cases} \hat{t}'(s) = k(s)\, \hat{n}(s) \\ \hat{n}'(s) = -k(s)\, \hat{t}(s) \end{cases}$$

IL QUALE, POSTO $\bar{y}(s) = \begin{pmatrix} \hat{t}(s) \\ \hat{n}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \\ y_4(s) \end{pmatrix}$

E QUINDI $\bar{y}'(s) = \begin{pmatrix} \hat{t}'(s) \\ \hat{n}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1'(s) \\ t_2'(s) \\ n_1'(s) \\ n_2'(s) \end{pmatrix}$, DIVENTA

$$\bar{y}'(s) = \begin{pmatrix} k(s)\, n_1(s) \\ k(s)\, n_2(s) \\ -k(s)\, t_1(s) \\ -k(s)\, t_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(s)\, y_3(s) \\ k(s)\, y_4(s) \\ -k(s)\, y_1(s) \\ -k(s)\, y_2(s) \end{pmatrix} = F(s, \bar{y}(s))$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE ASSERISCE CHE, ASSEGNATA LA FUNZIONE CONTINUA $k(s) > 0$, FISSATO IL PUNTO INIZIALE $\bar{z}(s_0) = \bar{z}_0 \in \mathbb{R}^2$, LA VELOCITÀ INIZIALE $\hat{t}(s_0) = \hat{t}_0$ E LA NORMALE INIZIALE $\hat{n}(s_0) = \hat{n}_0$, ESISTE UN'UNICA CURVA $\bar{z} = \bar{z}(s)$ TALE CHE $\bar{z}(s_0) = \bar{z}_0$, $\hat{t}(s_0) = t_0$, $\hat{n}(s_0) = \hat{n}_0$ E LA CUI CURVATURA COINCIDA CON $k(s)$ PER OGNI s. PER VEDERLO, VERIFICHIAMO CHE IL SISTEMA PRECEDENTE VERIFICA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ IN GRANDE:

1. CONTINUITÀ DI $\bar{F}(s, \bar{y})$ NELLO STRATO $(a, b) \times \mathbb{R}^4$. SEGUE DALLA CONTINUITÀ DELLE QUATTRO COMPONENTI $f_1(s, \bar{y}) = k(s) \cdot y_3$, $f_2(s, \bar{y}) = k(s)\, y_4$, $f_3(s, \bar{y}) = -k(s)\, y_1$ E $f_4(s, \bar{y}) = -k(s)\, y_2$ E QUESTA SEGUE DALLA CONTINUITÀ DI $k(s)$.
2. LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ È AUTOMATICA PERCHÉ $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \frac{\partial f_1}{\partial y_4} = 0$ E $\frac{\partial f_1}{\partial y_3} = k(s)$ LOCALMENTE LIMITATA. IDEM PER f_2, f_3, f_4. LA CONDIZIONE INIZIALE $\bar{y}(s_0)$ È DATA DA $\bar{y}(s_0) = \begin{pmatrix} \hat{t}_0 \\ \hat{n}_0 \end{pmatrix}$.

ESERCIZIO: RISOLVERE L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PRECEDENTE PONENDO $s_0 = 0$, $\hat{t}_0 = (1, 0)$, $\hat{n}_0 = (0, 1)$ E $k(s) \equiv 0$.

VE 18 MAR 2022

EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(x) = f(x)$$ FUNZIONE CONTINUA E $a_n \neq 0$. LE SOLUZIONI SI OTTENGONO DA UNA DI ESSE, AGGIUNGENDO QUELLE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA $\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(x) = 0$.

QUESTE ULTIME SI POSSONO CARATTERIZZARE CON UN METODO DOVUTO AD EULERO. LA CARATTERIZZAZIONE È PARTICOLARMENTE ELEGANTE SE SI USANO I NUMERI COMPLESSI $\lambda = \alpha + i\beta$ E LA FORMULA $e^{i\beta} = \cos\beta + i \operatorname{sen}\beta$. INFATTI LA FUNZIONE $y(x) = e^{\lambda_0 x}$ SODDISFA $\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(x) = 0$ SE E SOLO SE IL PARAMETRO $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ È UNA RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$. DIMOSTRAZIONE: ESSENDO $y^{(k)}(x) = \lambda_0^k e^{\lambda_0 x}$ PER $k = 0, 1, 2, \ldots$ SI TROVA PER SOSTITUZIONE

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)}(x) = e^{\lambda_0 x} \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_0^k.$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA ASSICURA L'ESISTENZA DI n RADICI $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ NON NECESSARIAMENTE DISTINTE.

ESEMPIO: STUDIAMO L'EQUAZIONE $y'' - 2y' = 0$. POICHÉ MANCA LA $y^{(0)}(x)$, CONVIENE PORRE $z(x) = y'(x)$ E DI CONSEGUENZA $z'(x) = y''(x)$. L'EQUAZIONE DIVENTA $z' = 2z$ LE CUI SOLUZIONI SONO $z(x) = Ce^{2x}$. NE DEDUCIAMO CHE $y'(x) = Ce^{2x}$ E QUINDI

$$y(x) = Ae^{2x} + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

VERIFICA: $y'(x) = 2Ae^{2x}$, $y''(x) = 4Ae^{2x} = 2y'(x)$. VEDIAMO IL POLINOMIO CARATTERISTICO: $a_2 = 1$, $a_1 = -2$, $a_0 = 0$ QUINDI $\lambda^2 - 2\lambda$. LE RADICI SONO $\lambda_0 = 0$ E $\lambda_1 = 2$ QUINDI, PER IL TEOREMA PRECEDENTE, DUE SOLUZIONI SONO $e^{\lambda_0 x} \equiv 1$ E $e^{\lambda_1 x} = e^{2x}$. ESSE GENERANO LO SPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI: $y(x) = B \cdot 1 + Ae^{2x} = Ae^{2x} + B$.

ESEMPIO: RISOLVIAMO $y'' = 0$. QUESTA SI INTEGRA DUE VOLTE, COME DEL RESTO ANCHE $y''(x) = f(x)$ (CADUTA DEI GRAVI: $y'' = -g$).

LA PRIMA INTEGRAZIONE PORGE $y'(x) = F(x) + C$ ESSENDO $F(x)$ UNA PRIMITIVA DI $f(x)$. CON LA SECONDA INTEGRAZIONE TROVIAMO $y(x) = \int_{x_0}^{x} F(t)\,dt + Cx + D$.

VE 18 MAR 2022

IN PARTICOLARE, LE SOLUZIONI DI $y'' = 0$ SONO $y(x) = mx + q$ E QUELLE DI $y'' = -g$ SONO $y(x) = -\frac{1}{2} g x^2 + v_0 x + y_0$, CON $v_0, y_0 \in \mathbb{R}$. NOTAZIONE: $y_0 = y(0)$, $v_0 = y'(0)$.

IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI $y'' = 0$, ESSENDO $a_2 = 1$ E $a_1 = a_0 = 0$, È λ^2 CHE HA LA RADICE DOPPIA $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. IL TEOREMA PRECEDENTE ASSICURA CHE LA FUNZIONE $y(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_2 x} \equiv 1$ È UNA SOLUZIONE, MA NON NE FORNISCE UN'ALTRA.

MA 22 MAR 2022

ESEMPIO: RISOLVIAMO L'EQUAZIONE $y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = 0$. IL POLINOMIO CARATTERISTICO È $\lambda^2 + 2\lambda + 3$ LE CUI RADICI SONO $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm i\sqrt{2}$ ALLE QUALI CORRISPONDONO LE SOLUZIONI $e^{\lambda_1 x} = e^{(-1+i\sqrt{2})x} = e^{-x} e^{i\sqrt{2}x} = e^{-x}(\cos\sqrt{2}x + i \operatorname{sen}\sqrt{2}x)$ E $e^{-x}(\cos\sqrt{2}x - i\operatorname{sen}\sqrt{2}x)$

SOMMANDOLE FRA LORO E DIVIDENDO PER 2 TROVIAMO LA SOLUZIONE $y_1(x) = e^{-x}\cos\sqrt{2}x$. SOTTRAENDO LA SECONDA DALLA PRIMA, E DIVIDENDO PER $2i$ TROVIAMO $y_2(x) = e^{-x}\operatorname{sen}\sqrt{2}x$, QUINDI L'INTEGRALE GENERALE È

$$y(x) = e^{-x}\left(A\cos\sqrt{2}x + B\operatorname{sen}\sqrt{2}x\right)$$

MA 22 MAR 2022

IN GENERALE, SE IL POLINOMIO $P(\lambda)$, DI GRADO 2, HA RADICI COMPLESSE $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \frac{-a_1}{2a_2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}$ L'INTEGRALE GENERALE DI $\sum_{k=0}^{2} a_k y^{(k)}(x) = 0$ È $y(x) = e^{-\frac{a_1}{2a_2}x}\left(A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x\right)$ DOVE $\omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}$. IN PARTICOLARE, LE SOLUZIONI DI $y'' = -\omega^2 y$, ESSENDO $P(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$, QUINDI $a_2 = 1$ E $\Delta = -4\omega^2$, SONO $y(x) =$

$$= e^{0 \cdot x}\left(A \cos \frac{\sqrt{4\omega^2}}{2} x + B \operatorname{sen} \frac{\sqrt{4\omega^2}}{2} x\right)$$

$$= A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x$$ COME È NOTO.

ESERCIZIO: RISOLVIAMO L'EQUAZIONE $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$. IL POLINOMIO CARATTERISTICO È $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ E LE SUE RADICI SONO $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$ CUI CORRISPONDONO $y_1(x) = e^{x}$ E $y_2(x) = e^{-3x}$

QUINDI L'INTEGRALE GENERALE È $y(x) =$

$$= A e^{x} + B e^{-3x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

SUL PIANO TEORICO, A PARTIRE DA UNA RADICE λ_0 DI MOLTEPLICITÀ m, SI DIMOSTRA CHE LE FUNZIONI $e^{\lambda_0 x}$, $x e^{\lambda_0 x}$, $x^2 e^{\lambda_0 x}$, ..., $x^{m-1} e^{\lambda_0 x}$ SONO SOLUZIONI.

STRUMENTI: 1) POSTO $z(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}$,

SI HA $$z^{(j)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-j)!} x^{p-j}, & j = 0, \dots, p \\ 0, & j > p \end{cases}$$

2) DATA UNA MATRICE $(a_{jk})_{j,k=0,\dots,n}$ SI HA

$$\sum_{j \le k} a_{jk} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_{jk} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_{jk}$$

(PROGRAMMAZIONE: DUE for NIDIFICATI)

3) REGOLA DI LEIBNIZ PER LA DERIVATA k-ESIMA DEL PRODOTTO $y(x) = z(x)\, g(x)$ DI DUE FUNZIONI DERIVABILI k VOLTE:

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^{(j)}(x)\, g^{(k-j)}(x)$$

SEGUE PER INDUZIONE DAL CASO $k = 1$:

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} z^{(j)}(x)\, g^{(1-j)}(x)$$

$$= z(x)\, g'(x) + z'(x)\, g(x)$$

MA 22 MAR 2022

4) CARATTERIZZAZIONE ALGEBRICA DELLA MOLTEPLICITÀ m DI UNA RADICE λ_0 DEL POLINOMIO $P(\lambda)$:

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^m Q(\lambda)$$

DERIVANDO AMBO I MEMBRI j VOLTE, $j<m$, TROVIAMO $P^{(j)}(\lambda_0)=0$. VICEVERSA: SE $P^{(j)}(\lambda_0)=0$ PER $j=0,\dots,m-1$, PER LA FORMULA DI TAYLOR SI HA $P(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}\frac{P^{(j)}(\lambda_0)}{j!}(\lambda-\lambda_0)^j$

$$=\sum_{j=m}^{n}\frac{P^{(j)}(\lambda_0)}{j!}(\lambda-\lambda_0)^j=(\lambda-\lambda_0)^m\sum_{j=m}^{n}\frac{P^{(j)}(\lambda_0)}{j!}(\lambda-\lambda_0)^{j-m}$$

$$=(\lambda-\lambda_0)^m Q(\lambda)$$

PER DIMOSTRARE L'ASSERTO, SOSTITUIAMO LA FUNZIONE $y(x)=z(x)\,e^{\lambda_0 x}$, CON $z(x)=x^p$, $p=0,\dots,m-1$, NELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n}a_k y^{(k)}(x)=0$. PER LA REGOLA DI LEIBNIZ, SI HA

$$y^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^{(j)}(x)\,\lambda_0^{k-j}e^{\lambda_0 x}$$ E QUINDI

$$\sum_{k=0}^{n}a_k y^{(k)}(x)=e^{\lambda_0 x}\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}z^{(j)}(x)\,\lambda_0^{k-j}$$

$$=e^{\lambda_0 x}\sum_{j=0}^{n}\left(z^{(j)}(x)\cdot\sum_{k=j}^{n}a_k\binom{k}{j}\lambda_0^{k-j}\right)=0$$

PERCHÉ I TERMINI DELLA $\sum_{j=0}^{n}$ SONO TUTTI NULLI:

PER $j>p$ SI HA $z^{(j)}(x)\equiv 0$; PER $j\le p<m$ SI HA $\sum_{k=j}^{n}a_k\binom{k}{j}\lambda_0^{k-j}=\frac{1}{j!}\sum_{k=j}^{n}a_k\frac{k!}{(k-j)!}\lambda_0^{k-j}$

$=\frac{1}{j!}P^{(j)}(\lambda_0)=0$ PER LA MOLTEPLICITÀ DI λ_0.

SI NOTI CHE LA DERIVATA DI $P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\lambda^k$ È $P^{(j)}(\lambda)=\sum_{k=j}^{n}a_k\frac{k!}{(k-j)!}\lambda^{k-j}$

EQUAZIONI LINEARI NON OMOGENEE

DATA L'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$ A COEFFICIENTI CONTINUI E CON $a_n(x) \neq 0$ IN (a,b), SE SONO NOTE n SOLUZIONI $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ LINEARMENTE INDIPENDENTI SI POSSONO TROVARE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$ (CONTINUA) CON IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE. VEDIAMO COME. NELLE LEZIONI DEL 15 E 16 MARZO ABBIAMO DIMOSTRATO CHE OGNI FUNZIONE $y(x)$ DERIVABILE n VOLTE SI RAPPRESENTA COME $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j(x)$ DOVE LE $\varphi_j(x)$ SONO INDIVIDUATE UNIVOCAMENTE DAL SISTEMA $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(i)}(x) = y^{(i)}$, $i = 0, \dots, n-1$. LE DERIVATE $\varphi_j'(x)$, A LORO VOLTA, SODDISFANO IL SISTEMA

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(i)}(x) = 0 \quad \text{PER } i \leq n-2 \\ \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) = \frac{1}{a_n(x)} \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) \end{cases}$$

PERCIÒ, SE $y(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$, NECESSARIAMENTE LE $\varphi_j'(x)$ SODDISFANO IL SISTEMA

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(i)}(x) = 0 \quad \text{PER } i \leq n-2 \\ \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) = \frac{1}{a_n(x)} f(x) \end{cases}$$

VICEVERSA: ESSENDO DATA $f(x)$ CONTINUA, QUEST'ULTIMO SISTEMA DETERMINA UNIVOCAMENTE LE $\varphi_j'(x)$, E SI HA

$$\bar{\varphi}'(x) = \begin{pmatrix} \varphi_0'(x) \\ \cdots \\ \varphi_{n-1}'(x) \end{pmatrix} = \left(y_j^{(i)}(x) \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n(x)} f(x) \end{pmatrix}$$

QUESTO MOSTRA LA CONTINUITÀ DI $\bar{\varphi}'(x)$ QUINDI L'ESISTENZA DI PRIMITIVE $\bar{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ DESCRITTE COMPLETAMENTE DA

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \tilde{\varphi}_0(x) + C_0 \\ \cdots \\ \varphi_{n-1}(x) = \tilde{\varphi}_{n-1} + C_{n-1} \end{cases} \quad \text{CON } C_0, \dots, C_{n-1} \in \mathbb{R}$$

E $\tilde{\varphi}_j(x)$ PRIMITIVE PARTICOLARI.

DICO CHE LE FUNZIONI $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j(x)$ SODDISFANO $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$.

ME 23 MAR 2022

 ME 23 MAR 2022

PER VERIFICARE L'ASSERTO, PARTIAMO DALLA DEFINIZIONE $y^{(0)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(0)}(x)$ E RICAVIAMO

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j'(x) \quad \text{E POI}$$

$$y''(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j''(x) \quad \text{E POI} \dots$$

...

$$y^{(n-2)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(n-2)}(x) \quad \text{E ANCORA}$$

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(n-1)}(x).$$

DERIVANDO QUEST'ULTIMA, TROVIAMO $y^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(n)}(x) + \frac{1}{a_n(x)} f(x)$. MOLTIPLICHIAMO LA RIGA k-ESIMA PER $a_k(x)$ E SOMMIAMO:

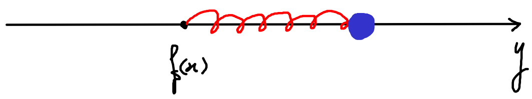
$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x)\, y_j^{(k)}(x) +$$

$$+ f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(x) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y_j^{(k)}(x)}_{=0} + f(x)$$

$= f(x)$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

PER FARE PRATICA, RISOLVIAMO L'EQUAZIONE

$$y''(x) = -\big(y(x) - f(x)\big)$$



PONIAMO, AD ESEMPIO, $f(x) = x$. L'EQUAZIONE DIVENTA: $y'' + y = x$. LE SOLUZIONI DI $y'' + y = 0$ SONO $A\cos x + B \,\mathrm{sen}\, x$, QUINDI PONIAMO $y_0(x) = \cos x$ E $y_1(x) = \mathrm{sen}\, x$

E DETERMINIAMO LE $\varphi_j'(x)$ DAL SISTEMA

$$\begin{cases} \varphi_0'(x)\cos x + \varphi_1'(x)\,\mathrm{sen}\, x = 0 \\ -\varphi_0'(x)\,\mathrm{sen}\, x + \varphi_1'(x)\cos x = x \end{cases}$$

QUINDI $\begin{pmatrix} \varphi_0'(x) \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\mathrm{sen}\, x \\ \mathrm{sen}\, x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -x\,\mathrm{sen}\, x \\ x\cos x \end{pmatrix}$ E DI CONSEGUENZA

$$\varphi_0(x) = -\int x\,\mathrm{sen}\, x\, dx = x\cos x - \int \cos x\, dx$$

$$= x\cos x - \mathrm{sen}\, x + C_0,$$

$$\varphi_1(x) = \int x\cos x\, dx = x\,\mathrm{sen}\, x - \int \mathrm{sen}\, x\, dx$$

$$= x\,\mathrm{sen}\, x + \cos x + C_1.$$

CON ESSE, COSTRUIAMO LE SOLUZIONI $y(x) =$

$$= \big(x\cos x - \mathrm{sen}\, x + C_0\big)\cos x +$$

$$+ \big(x\,\mathrm{sen}\, x + \cos x + C_1\big)\,\mathrm{sen}\, x$$

QUINDI, SEMPLICEMENTE, $y(x) = x + C_0 \cos x + C_1 \operatorname{sen} x$. ALLA STESSA CONCLUSIONE SI ARRIVA RAPIDAMENTE CON IL METODO DI SOMIGLIANZA: VISTO CHE $f(x)$ È UN POLINOMIO DI PRIMO GRADO, E CHE L'OPERATORE $\mathcal{L}y = y'' + y$ TRASFORMA POLINOMI IN POLINOMI, CERCHIAMO UN POLINOMIO $y(x) = mx + q$ CON m E q DA DETERMINARSI PER SOSTITUZIONE IN MODO TALE CHE $\mathcal{L}y = f(x)$.

SOSTITUENDO $y(x) = mx + q$ IN $y'' + y = f(x)$ TROVIAMO $(mx+q)'' + (mx+q) = x$ QUINDI $m = 1$ E $q = 0$ DA CUI $y(x) = x$.

SOMMANDO $y(x) = x$ ALL'INTEGRALE GENERALE $A\cos x + B \operatorname{sen} x$ DI $y'' + y = 0$ ESPRIMIAMO QUELLO DI $y'' + y = x$, CHE È

$$y(x) = x + A\cos x + B \operatorname{sen} x$$

ESERCIZIO: PROVARE CON $f(x) = \operatorname{sen} \omega x$, $\omega \in (0, +\infty)$. CON $\omega \neq 1$ LA SOLUZIONE HA LA FORMA $A\cos\omega x + B \operatorname{sen}\omega x$, E SI TROVA $A = 0$ E $B = \frac{1}{1-\omega^2}$. CON $\omega = 1$, LA FUNZIONE DI TALE FORMA SODDISFA $y'' + y = 0$ PER OGNI A, B. IN QUESTO CASO, LA SOLUZIONE È DEL TIPO $x(A\cos x + B \operatorname{sen} x)$

CENNI ALLE EQUAZIONI DEL TIPO DI EULERO

SONO EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI CONTINUI AVENTI LA FORMA $a_k(x) = a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$.

ESEMPI: $xy' = 1$, $\quad x^2 y'' + a_0 y = 0$.

HANNO LA PECULIARITÀ CHE, SULL'INTERVALLO $(0, +\infty)$, SI TRASFORMANO IN UN'EQUAZIONE A COEFFICIENTI COSTANTI TRAMITE IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE $x = e^t$. SULL'INTERVALLO $(-\infty, 0)$ SI PUÒ PORRE $x = -e^t$.

CONSIDERIAMO, AD ESEMPIO, $xy' = 1$. SE $y(x)$ È UNA SOLUZIONE PER $x \in (0, +\infty)$, LA FUNZIONE $z(t) = y(e^t)$ CHE EQUAZIONE SODDISFA? LA $y(x)$ SI RICAVA DA $z(t)$ PONENDO $y(x) = z(\log x)$. PER RISPONDERE ALLA DOMANDA, DERIVIAMO $z(t) = y(e^t)$ RISPETTO A t E TROVIAMO $z'(t) = e^t y'(e^t) = x y'(x)$. QUINDI L'EQUAZIONE $xy' = 1$ SI TRASFORMA IN $z'(t) = 1$ LE CUI SOLUZIONI SONO $z(t) = t + C$ E PERCIÒ SI HA $y(x) = C + \log x$. N.B.: SEPARANDO LE VARIABILI SI TROVA $y'(x) = \frac{1}{x}$ E QUINDI $y(x) = C + \log |x|$. OSSERVAZIONE: NON CI SONO SOLUZIONI IN NESSUN INTORNO DELL'ORIGINE SEBBENE I COEFFICIENTI DI $xy' = 1$ SIANO CONTINUI!

RISOLVIAMO ALLORA $xy' = 0$. SE $x \neq 0$, DIVENTA $y' = 0$ E QUINDI $y(x) = \text{cost.}$

LE COSTANTI SODDISFANO ANCHE $0 \cdot y'(0) = 0$.

I TEOREMI PRECEDENTI PRESUPPONGONO LA FORMA NORMALE!

VEDIAMO ADESSO $x^2 y''(x) + a_0 y(x) = 0$.

PONIAMO $x = e^t$ E QUINDI $z(t) = y(e^t)$.

DERIVANDO RISPETTO A t TROVIAMO $z'(t) = e^t y'(e^t)$ E QUINDI $z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) = x y'(x) + x^2 y''(x)$

PERCIÒ L'EQUAZIONE $x^2 y''(x) + a_0 y(x) = 0$ DIVENTA $z''(t) - x y'(x) + a_0 z(t) = 0$

E QUINDI $z''(t) - z'(t) + a_0 z(t) = 0$

IL CUI POLINOMIO CARATTERISTICO È $\lambda^2 - \lambda + a_0$

CHE HA $\Delta = 1 - 4a_0$.

VE 25 MAR 2022

$$\boxed{\text{TEOREMI DI ESISTENZA}}$$

CONSIDERIAMO IL PROBLEMA AI VALORI INIZIALI

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DOVE x_0, y_0 SONO DATI, ED $f(x,y)$ È DEFINITA IN UN INTORNO DI (x_0, y_0).

1. TEOREMA DI PEANO: SE f È CONTINUA NEL SUDDETTO INTORNO, ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE NELL'INTORNO $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ CON UN OPPORTUNO $\delta > 0$. CE NE POSSONO ESSERE PIÙ DI UNA:
$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

QUESTO È UN TEOREMA DI ESISTENZA IN PICCOLO.

ESEMPIO: $\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\quad f(x,y) = 1 + y^2$ DEFINITA IN $\mathbb{R}^2$

$$\int_0^x \frac{y'(t)\,dt}{1 + y^2(t)} = \int_0^x dt = x \qquad \text{sost. } y = y(t)$$

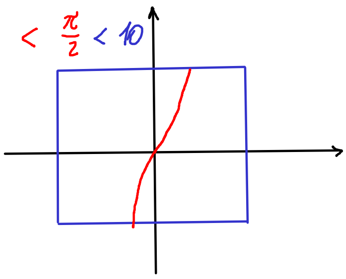
$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{1+y^2} = \arctg y(x) = x, \quad \text{DA CUI}$$

SEGUE $y(x) = \tg x$ IL CUI INTERVALLO DI ESISTENZA È $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

② TEOREMA DI CAUCHY: SE $f(x,y)$ È CONTINUA (IN (x,y)) IN UN INTORNO DI (x_0,y_0) E SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ, ESISTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE IN UN INTORNO $(x_0-\delta, \ x_0+\delta)$ CON $\delta > 0$ OPPORTUNO.

ESEMPIO: $f(x,y) = 1+y^2$ SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ NEL RETTANGOLO $R = [-10, 10] \times [10, 10]$. LA SOLUZIONE $y = \operatorname{tg} x$ ESISTE NELL'INTORNO $(-\delta, \delta)$ CON

$\delta = \operatorname{arctg} 10 < \frac{\pi}{2} < 10$



SI TRATTA, DUNQUE, DI UN TEOREMA DI ESISTENZA IN PICCOLO.

③ ESISTENZA IN GRANDE: SE $f(x,y)$ È CONTINUA NELLA STRISCIA $S = (a,b) \times \mathbb{R}$ E SODDISFA IVI LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ, ESISTE UNA E UNA SOLA SOLUZIONE DEFINITA IN TUTTO (a,b). NOTA: LE IPOTESI SI POSSONO RIDURRE A LOCALE LIPSCHITZIANITÀ PIÙ SUBLINEARITÀ, CIOÈ $|f(x,y)| \leq A + B|y|$

VE 25 MAR 2022

UNA DELLE APPLICAZIONI PRINCIPALI È ALLE EQUAZIONI E AI SISTEMI LINEARI.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)\, y(x) + f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA ③ (COEFFICIENTI CONTINUI !)

ESERCIZIO: SE f È LIPSCHITZIANA NELLA STRISCIA S, ALLORA È SUBLINEARE IN OGNI $[\alpha,\beta] \times \mathbb{R} \subset S$.

MA 29 MAR 2022

SCHEMA DELLA DIMOSTRAZIONE:

① SI DEFINISCE UNA SUCCESSIONE $y_n(x)$ PER RICORRENZA.

② SI DIMOSTRA CHE $y_n(x)$ CONVERGE (TEOREMA DI CAUCHY) O ALMENO HA UNA SOTTOSUCCESSIONE $y_{n_k}(x)$ CONVERGENTE (TEOREMA DI PEANO)

③ SI DIMOSTRA CHE LA FUNZIONE LIMITE $y(x)$ È UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY.

DETTAGLI: ① LA $y_n(x)$ SI PUÒ DEFINIRE IN VARI MODI: $\boxed{A}$ $y_n(x)$ È LA FUNZIONE LINEARE A TRATTI CHE INTERPOLA I PUNTI (x_i, η_i) OTTENUTI COL METODO DI EULERO PER LA RISOLUZIONE NUMERICA (NOTAZIONE DEL COMINCIOLI). SI PARLA DI METODO DI CAUCHY–LIPSCHITZ. $\boxed{B}$ SI DEFINISCE

$$\begin{cases} y_0(x) \equiv y_0, & x \in [x_0-a,\ x_0+a] \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt \end{cases}$$

ISTANTE INIZIALE

(METODO DI PEANO–PICARD).

PER FISSARE LE IDEE, AMMETTIAMO CHE f SIA DEFINITA NEL CILINDRO (= RETTANGOLO) $Q = [x_0-a,\ x_0+a] \times [y_0-b,\ y_0+b]$, CON $a, b \in (0, +\infty)$.

OSSERVAZIONE: SE IL NUMERO $M = \max_Q |f(x,y)| = 0$ VUOL DIRE CHE $f \equiv 0$ E UNA SOLUZIONE È $y(x) \equiv y_0$. SIA DUNQUE $M > 0$.

PER ASSICURARE LA BUONA POSITURA DELLA DEFINIZIONE DI $y_n(x)$ È SUFFICIENTE PRENDERE x TALE CHE $|x-x_0| \le \frac{b}{M}$. BASE DELL'INDUZIONE: LA $y_1(x)$ È BEN DEFINITA E SI HA CHE

$$|y_1(x) - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\,dt \le$$

$$\le M|x-x_0| \le b \quad \text{PER } x \ge x_0$$

PASSO INDUTTIVO: SE $y_n(x) \in [y_0-b,\ y_0+b]$ ALLORA

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))|\,dt \le M|x-x_0| \le b.$$

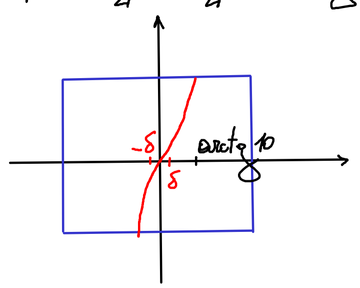
QUINDI SI DEFINISCE $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ E SI RAGIONA NELL'INTERVALLO $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$.

ESEMPIO: $f(x,y) = 1 + y^2$, $Q = [-10, 10]^2$,

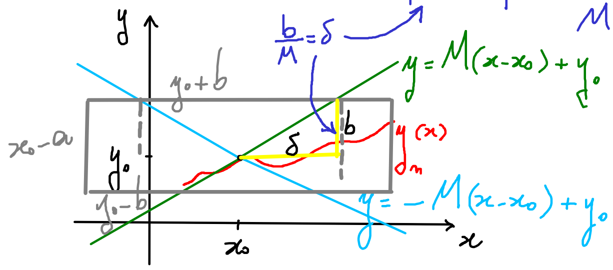
$$M = 101, \quad a = b = 10, \quad \delta = \min\left\{10, \frac{10}{101}\right\}$$

$$= \frac{10}{101} < \frac{10}{100} = \frac{1}{10} < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 <$$

$$< \operatorname{arctg} 10$$



INTERPRETAZIONE GRAFICA DI $|x-x_0| \le \frac{b}{M}$



MA 29 MAR 2022

IN POCHI CASI NOTEVOLI, SI PUÒ TROVARE $y_n(x)$ ESPLICITAMENTE: UNO DI QUESTI È IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

LA CUI SOLUZIONE È $y(x) = e^x$. ESERCIZIO: TROVARE $y_n(x)$.

② SOTTO L'IPOTESI DELLA CONTINUITÀ DI $f(x,y)$ SI HA CHE: I. $|y_n(x) - y_0| \leq b$ CIOÈ

$|y_n(x)| \leq |y_0| + b$ EQUILIMITATEZZA

II. $|y_n'(x)| = |f(x, y_{n-1}(x))| \leq M$

UNIFORME EQUICONTINUITÀ E SONO SODDISFATTE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ASCOLI–ARZELÀ.

TESI: ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE UNIFORMEMENTE CONVERGENTE. SE $f(x,y)$ È ANCHE LIPSCHITZIANA RISPETTO AD y, LA SUCCESSIONE $y_n(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE. NOTA: UNA SUCCESSIONE (a_n) SI PUÒ CONSIDERARE LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI DELLA SUCCESSIONE $a'_n = a_{n+1} - a_n$ (DIFFERENZA PRIMA).

INFATTI $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_1 - a_0) + a_0 = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a'_k$. IL CARATTERE DI a_n È LO STESSO DELLA SERIE $\sum_{k=1}^{+\infty} a'_k$.

SCRIVIAMO $y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(y_k(x) - y_{k-1}(x) \right)$

E VERIFICHIAMO CHE LA SERIE $\sum_{k=1}^{n} |y_k(x) - y_{k-1}(x)|$ È CONVERGENTE UNIFORMEMENTE. PER INDUZIONE VERIFICHIAMO CHE

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq M L^{k-1} \frac{|x - x_0|^k}{k!}$$

PROCEDIAMO PER INDUZIONE. BASE DELL'INDUZIONE: $k=1$. IN QUESTO CASO SI HA $|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)| \, dt \leq M |x - x_0|$. PASSO INDUTTIVO: $|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t)) \right| dt \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} L \left| y_k(t) - y_{k-1}(t) \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{L M L^{k-1}}{k!} \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^k \, dt = \frac{M L^k}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}.$$

QUINDI $\sup_{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{M L^{k-1} \delta^k}{k!}$

E SAPPIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{M L^{k-1} \delta^k}{k!} = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(L\delta)^k}{k!} =$

$$= \frac{M}{L} \left(e^{L\delta} - 1 \right).$$

MA 29 MAR 2022

QUINDI LA SERIE DI FUNZIONI $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(y_k(x)-y_{k-1}(x)\right)$

CONVERGE UNIFORMEMENTE, E LO STESSO AVVIENE

PER LA SUCCESSIONE (DELLE SOMME PARZIALI) $y_n(x)$.

CONVERGE A CHE COSA? QUAL È LA FUNZIONE LIMITE $y(x)$?

ME 30 MAR 2022

IN POCHI CASI NOTEVOLI, SI PUÒ TROVARE $y_n(x)$ ESPLICITAMENTE: UNO DI QUESTI È IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0)=1 \end{cases} \qquad f(x,y)=y$$

SI HA, INFATTI, $y_0(x) \equiv y_0 = 1$ E, IN GENERALE, $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. DIMOSTRAZIONE:

BASE DELL'INDUZIONE È IL CASO $n=0$. PASSO INDUTTIVO: $y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)\,dt =$

$$= 1 + \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\,dt = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{x^j}{j!}.$$

È BEN NOTO CHE $y_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$ IN QUANTO

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

ME 30 MAR 2022

③ LA TERZA PARTE DELLA DIMOSTRAZIONE CONSISTE NELLA VERIFICA CHE LA FUNZIONE LIMITE $y(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n(x)$ SODDISFA $y'(x) = f(x, y(x))$ IN $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ E $y(x_0)=y_0$. ESSENDO $y_n(x_0) = y_0$ PER OGNI n, SI DEDUCE CHE $y(x_0)=y_0$.

SCRIVIAMO ALLORA

$$y_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt.$$

I LIMITI DEI DUE MEMBRI SONO UGUALI:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$

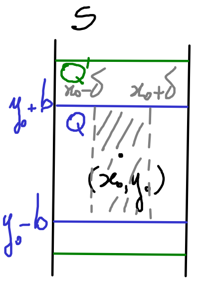
OSSERVAZIONE: SERVE SAPERE CHE $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ ESSENDO $f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$. DOPODICHÉ LA TESI SEGUE COME OSSERVATO VENERDÌ 11/03.

 ME 30 MAR 2022

IL TEOREMA 3 DI ESISTENZA IN GRANDE SI PUÒ DIMOSTRARE STIMANDO δ PER DIFETTO CON UNA COSTANTE POSITIVA. SAPPIAMO CHE $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. L'IDEALE SAREBBE CHE $\frac{b}{M} \geq a$ COSICCHÉ $\delta = a$ E AVREI SOLUZIONE IN $[x_0 - a, x_0 + a]$. SUPPONIAMO

$f(x,y)$ CONTINUA IN $\bar{S} = [x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}$

E IVI LIPSCHITZIANA, QUINDI $|f(x,y) - f(x,0)| \leq L|y|$ DA CUI $|f(x,y)| \leq |f(x,0)| + L|y| \leq A + L|y|$ ESSENDO $A = \max\limits_{[x_0-a,\, x_0+a]} |f(x,0)|$.



OSSERVAZIONE: L'ESISTENZA NELLA STRISCIA APERTA $S = (a,b) \times \mathbb{R}$ SEGUE DALL'ESISTENZA IN OGNI SOTTOSTRISCIA CHIUSA $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \subset S$.

INGENUAMENTE, AUMENTO b PER AUMENTARE $\frac{b}{M}$.

LA SUBLINEARITÀ MI DICE CHE $|f(x,y)| \leq A + L|y| \leq A + L(|y_0| + b)$

QUINDI $M \leq A + L(|y_0| + b)$ E PERCIÒ

$$\frac{b}{M} \geq \frac{b}{A + L(|y_0| + b)} \xrightarrow[b \to +\infty]{} \frac{1}{L}.$$

SE DUNQUE b È ABBASTANZA GRANDE, POSSO FARE IN MODO CHE $\frac{b}{M} \geq \frac{1}{2L}$ (OVVERO $\frac{1}{L} - \varepsilon_0 > 0$)

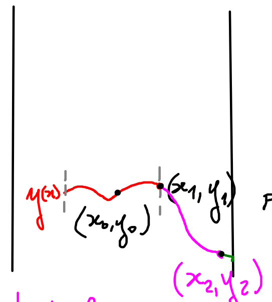
DIMOSTRIAMO L'ESISTENZA IN GRANDE. 1 IMPOSTO IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

E HO LA SOLUZIONE IN $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. SE $\frac{b}{M} \geq a$ SO CHE $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = a$ E QUINDI $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] = [x_0 - a, x_0 + a]$. DIVERSAMENTE HO LA SOLUZIONE IN $\left[x_0 - \frac{b}{M}, x_0 + \frac{b}{M}\right]$ E SICURAMENTE IN $\left[x_0 - \frac{1}{2L}, x_0 + \frac{1}{2L}\right]$. 2 PONGO $x_1 = x_0 + \frac{1}{2L}$ E IMPOSTO IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

ESSENDO y_1 IL VALORE DELLA SOLUZIONE $y(x)$ DEL PROBLEMA PRECEDENTE QUANDO $x = x_1$.



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

INVOCANDO NUOVAMENTE IL TEOREMA DI CAUCHY SI VEDE CHE LA SOLUZIONE ESISTE FINO A $x_2 = x_1 + \frac{1}{2L}$. PONENDO $x_k = x_0 + k\frac{1}{2L}$, E POICHÉ $x_0 + k\frac{1}{2L} > \alpha$ PER UN OPPORTUNO k (FINITO), LA TESI SEGUE.

 VE 01 APR 2022

IL TEOREMA DI ESISTENZA IN GRANDE CONSENTE DI «TROVARE» UNA BASE DELLO SPAZIO VETTORIALE DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE A COEFFICIENTI CONTINUI

$$y^{(n)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)}\, y^{(k)}(x)$$

DANDO QUINDI DIMOSTRAZIONE DELL'ASSERTO (A) DEL 09/03. INNANZITUTTO, PROCEDENDO COME IL 16/03, RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE SOTTO FORMA DI UN SISTEMA DEL PRIMO ORDINE: $\bar{y}'(x) = \bar{F}(x, \bar{y}(x))$ DOVE

$$\bar{F}(x,\bar{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)} y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,\bar{y}) \\ \cdots \\ f_{n-1}(x,\bar{y}) \\ f_n(x,\bar{y}) \end{pmatrix}$$

ESSENDO $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \cdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ E $x \in (a,b)$.

LA $\bar{F}(x,\bar{y})$ È CONTINUA IN $(a,b) \times \mathbb{R}^n$?

SÌ PERCHÉ I COEFFICIENTI $a_k(x)$ LO SONO PER IPOTESI. SODDISFA LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ

$$\| \bar{F}(x,\bar{y}) - \bar{F}(x,\bar{z}) \| \leq L \| \bar{y} - \bar{z} \|$$

CON L LOCALMENTE INDIPENDENTE DA x.

INFATTI PER CIASCUNA COMPONENTE $f_1(x,\bar{y})$, ..., $f_n(x,\bar{y})$ SI HA $\left| f_i(x,\bar{y}) - f_i(x,\bar{z}) \right| \leq L \|\bar{y} - \bar{z}\|$ IN QUANTO $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = 0$ SE $i \neq j$, $i \leq n-1$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_i} = 1$ PER $i \leq n-1$, E

$$\left| \frac{\partial f_n}{\partial y_j} \right| = \left| - \frac{a_j(x)}{a_n(x)} \right| \leq L \text{ PER } x \in [\alpha, \beta] \subset (a,b)$$

PER CONCLUDERE LA DIMOSTRAZIONE BASTA ASSEGNARE OPPORTUNAMENTE I DATI INIZIALI, COSÌ DA OTTENERE n PROBLEMI DI CAUCHY CUI CORRISPONDONO n SOLUZIONI $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ PER $x \in (a,b)$ LINEARMENTE INDIPENDENTI. IN GENERALE, FISSATO $x_0 \in (a,b)$ IL PROBLEMA DI CAUCHY HA LA FORMA

$$\begin{cases} \bar{y}'(x) = \bar{F}(x, \bar{y}(x)) \\ \bar{y}(x_0) = \xi \text{ DATO IN } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

POSTO $\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \cdots \\ \xi_{n-1} \end{pmatrix}$, LA CONDIZIONE $\bar{y}(x_0) = \xi$ EQUIVALE A $y^{(i)}(x_0) = \xi_i$ PER $i = 0, \dots, n-1$.

EFFETTUO n SCELTE LINEARMENTE INDIPENDENTI DEL VETTORE ξ: $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, ..., $(0,\dots,0,1)$ E INDICO CON $y_j(x)$ LE CORRISPONDENTI SOLUZIONI. DIMOSTRIAMO CHE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI. BASTA VERIFICARE CHE IL LORO DETERMINANTE WRONSKIANO

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_0(x) & \cdots & y_{n-1}(x) \\ y_0'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) \\ \cdots & & \\ y_0^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

SIA $\neq 0$ IN (a,b). A TAL FINE (TEOREMA DI JACOBI) È SUFFICIENTE VERIFICARE CHE

$$w(x_0) = \begin{vmatrix} y_0(x_0) & \cdots & y_{n-1}(x_0) \\ y_0'(x_0) & \cdots & y_{n-1}'(x_0) \\ \cdots & & \\ y_0^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

IL CHE È IMMEDIATO PERCHÉ, PER COME SONO STATI SCELTI I VETTORI INIZIALI ξ, SI HA

$$w(x_0) = \begin{vmatrix} y_0(x_0) & \dots & y_{n-1}(x_0) \\ y_0'(x_0) & \dots & y_{n-1}'(x_0) \\ \dots & & \\ y_0^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^0 & \dots & \xi^{n-1} \end{vmatrix}$$