



Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

**Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2021/22**

# Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> **Lezione 9**

La colonna di Ziegler con vincoli viscoelastici

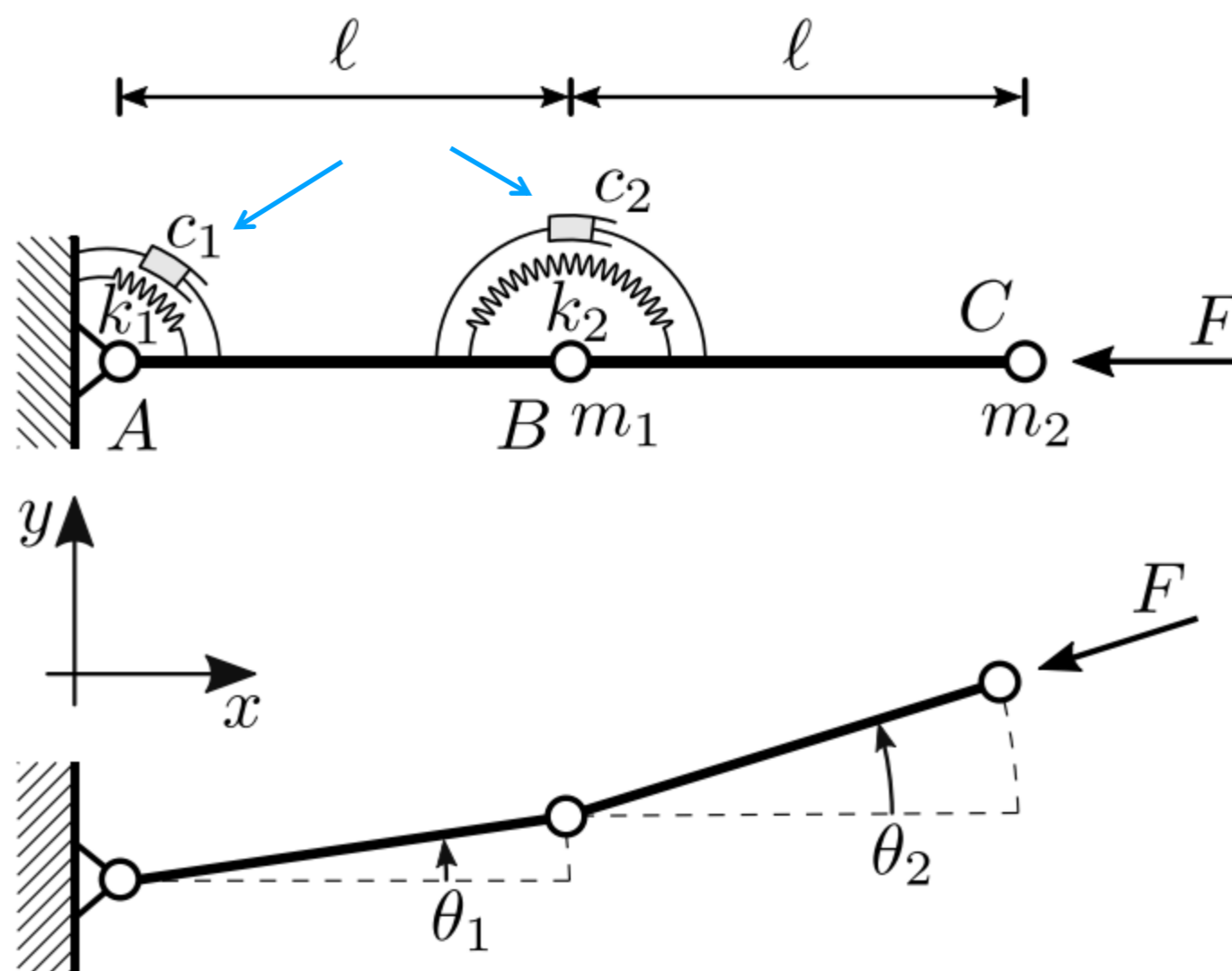
*Victor Eremeev*

Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso

emanuele.reccia@unica.it

victor.eremeev@unica.it

# La colonna di Ziegler



# La colonna di Ziegler

Si considera un sistema paradigmatico, a due gradi di libertà, noto come *colonna di Ziegler* **Figura** . Il sistema (bipendolo) è costituito da due aste rigide,  $AB$  e  $BC$ , prive di massa, ciascuna di lunghezza  $\ell$ , collegate mutuamente ed al suolo da cerniere. Sul pendolo sono presenti due masse concentrate: una, di intensità  $m_1$ , sulla cerniera interna  $B$ , l'altra, di intensità  $m_2$ , sull'estremo libero  $C$ . Le due aste sono collegate, tra loro e al suolo, da organi visco-elastici lineari, di rigidezza  $k_1$  e  $k_2$  e viscosità  $c_1$  e  $c_2$ , rispettivamente applicati in  $A$  e  $B$ . Il doppio pendolo è caricato all'estremo libero da una forza follower di intensità  $F$ , che mantiene la sua direzione parallela all'asta  $BC$ .



## Cinematica

La configurazione del sistema è descritta dalle rotazioni delle due aste,  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$ , prese come parametri lagrangiani. Da considerazioni geometriche, si traggono le seguenti *relazioni esatte*, che esprimono le componenti di spostamento longitudinale  $u$  e trasversale  $v$  dei punti  $B, C$ :

$$\begin{aligned}u_B &= -\ell (1 - \cos \theta_1), \\v_B &= \ell \sin \theta_1, \\u_C &= -\ell (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2), \\v_C &= \ell (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)\end{aligned}$$

Ritenendo i termini al più quadratici nei parametri lagrangiani, si ha:

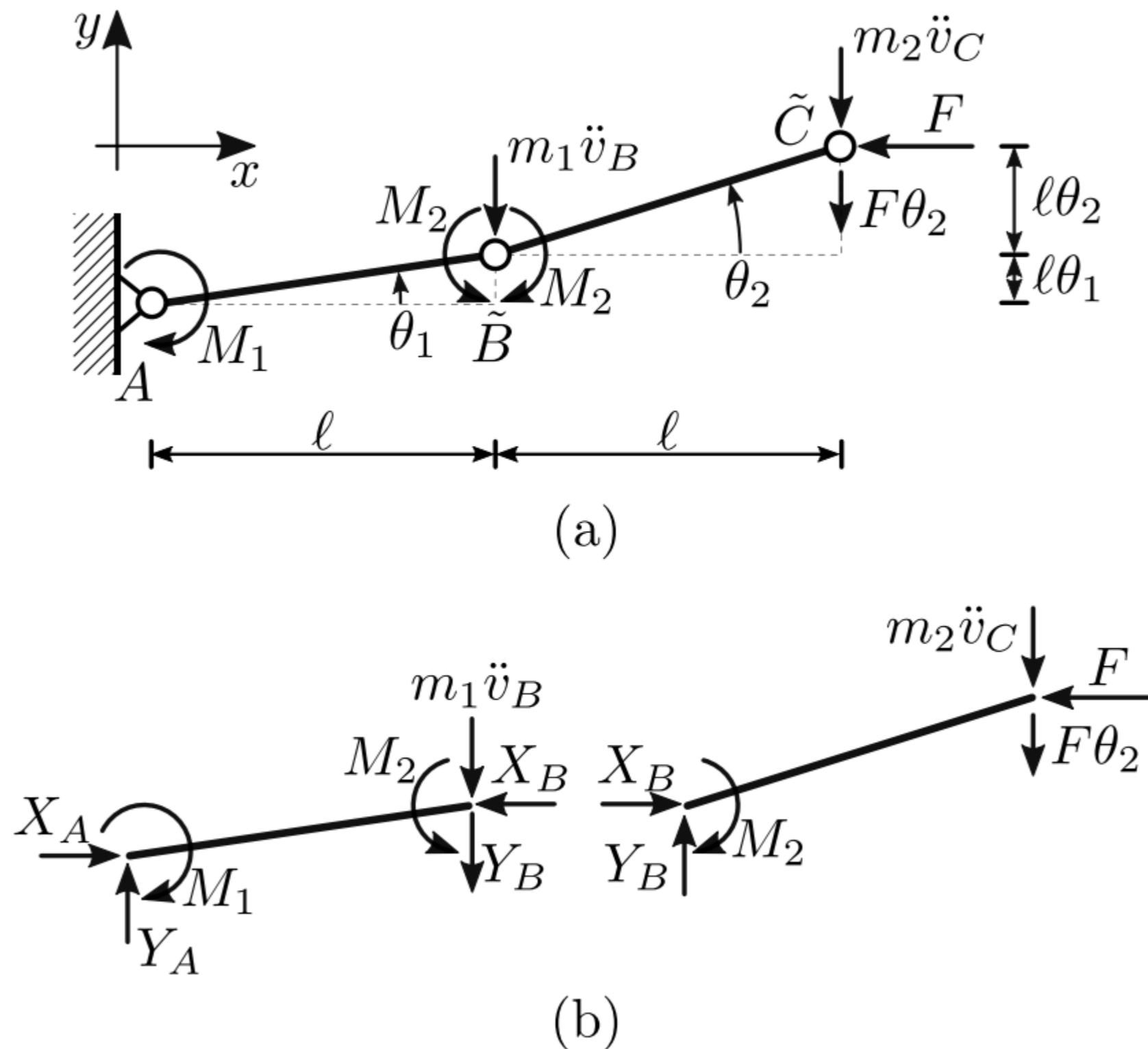
$$\begin{aligned}u_B &= -\frac{\ell \theta_1^2}{2}, \\v_B &= \ell \theta_1, \\u_C &= -\ell \left( \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} \right), \\v_C &= \ell (\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

# Legame costitutivo

In termini di spostamento

$$M_1 = k_1 \theta_1 + \underline{c_1 \dot{\theta}_1}$$

$$M_2 = k_2 (\theta_2 - \theta_1) + \underline{c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)}$$



**Figura** Bilancio delle forze agenti sulla colonna di Ziegler: (a) forze d'inerzia, forze esterne ed interne attive; (b) esploso del sistema, che include le forze interne reattive.

Da questa seguono le equazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ell^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_2 + M_1 - M_2 + F \ell (\theta_2 - \theta_1) &= 0 \\ m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_2 + M_2 &= 0 \end{aligned}$$

si ottengono le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} \ell^2 \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\ + \left( \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} + F \ell \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esse sono del tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g) \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

con  $\mathbf{q} := (\theta_1, \theta_2)^T$ , dove appaiono, nell'ordine, la matrice di massa, di smorzamento, di rigidità elastica e di rigidità geometrica. Si noti che, a differenza

Si noti che, a differenza delle altre matrici,  $\mathbf{K}_g$  è non simmetrica, a testimonianza della non conservatività della forza  $F$ .

# Forma adimensionale delle equazioni del moto

Seguendo Ziegler, si fa riferimento ad una particolare famiglia di sistemi, nella quale  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = m$  e  $k_1 = k_2 = k$ . Inoltre, per rendere più agevole la discussione, si pongono le equazioni del moto in forma adimensionale. Si introduce a tal scopo una nuova variabile tempo  $\tilde{t}$ , dei coefficienti adimensionali di smorzamento  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  ed un carico adimensionale  $\mu$ , in accordo alle seguenti definizioni:

$$\tilde{t} := t \sqrt{\frac{k}{m\ell^2}}, \quad \xi_1 := \frac{c_1}{\ell\sqrt{k m}}, \quad \xi_2 := \frac{c_2}{\ell\sqrt{k m}}, \quad \mu := \frac{F\ell}{k}$$

# Forma adimensionale delle equazioni del moto

Le equazioni del moto si riscrivono allora nella più semplice forma:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \left( \tilde{\mathbf{K}}_e + \mu\tilde{\mathbf{K}}_g \right) \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

dove:

$$\tilde{\mathbf{M}} := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} := \begin{bmatrix} \xi_1 + \xi_2 & -\xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_e := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_g := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sono matrici adimensionali, e dove si è indicata ancora con il punto la derivata rispetto al tempo adimensionale  $\tilde{t}$ . Nel prosieguo si sottintenderanno le tilde sulle quantità adimensionali, matrici e tempo.

Posta la soluzione del tipo  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{u} \exp(\lambda t)$ , segue il problema agli autovalori:

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{C}\lambda + (\mathbf{K}_e + \mu\mathbf{K}_g)] \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} 3\lambda^2 + \lambda(\xi_1 + \xi_2) + 2 - \mu & \lambda^2 - \lambda\xi_2 - 1 + \mu \\ \lambda^2 - \lambda\xi_2 - 1 & \lambda^2 + \lambda\xi_2 + 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica si scrive:

$$2\lambda^4 + I_1\lambda^3 + I_2(\mu)\lambda^2 + I_3\lambda + I_4 = 0$$

in cui si è posto:

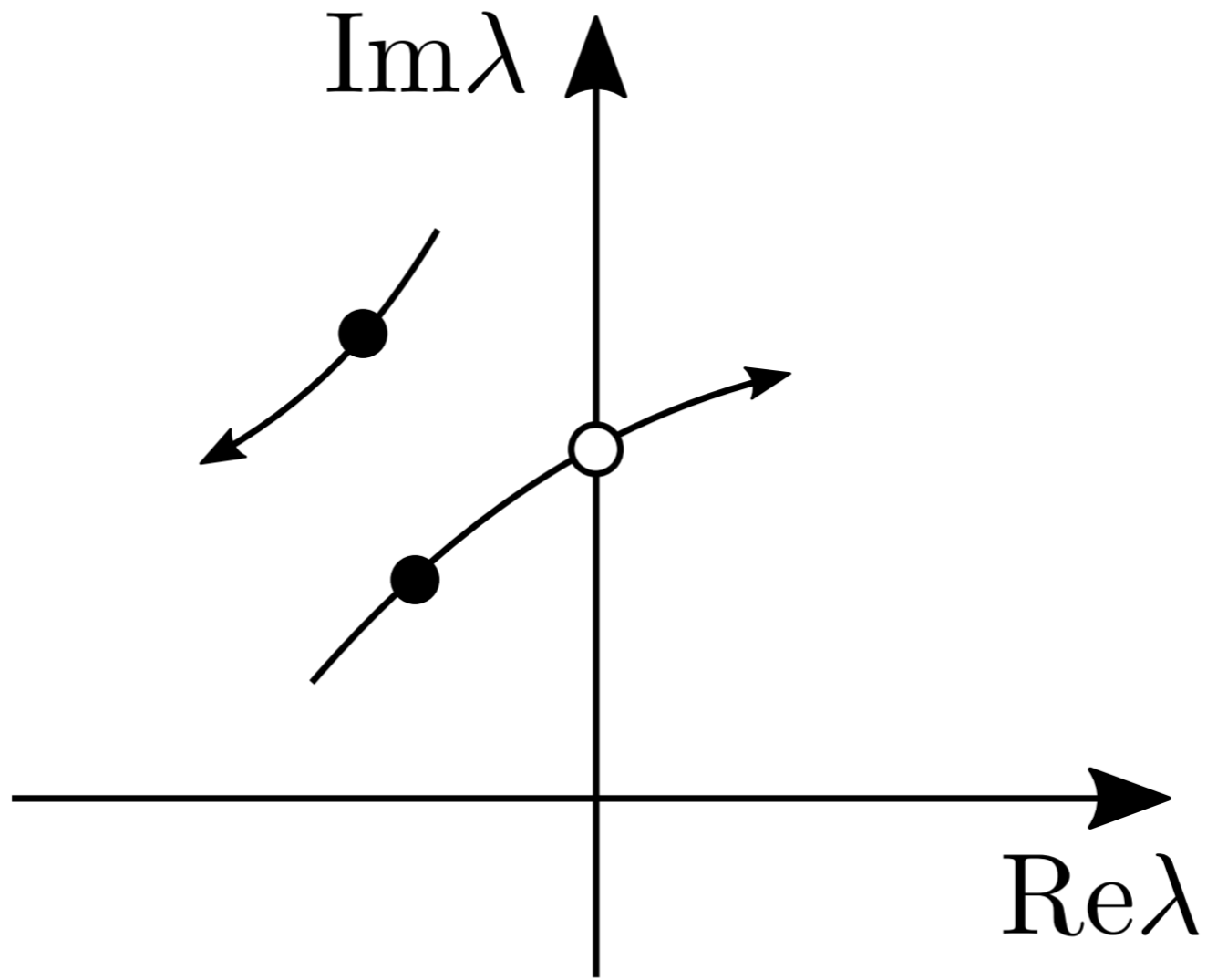
$$I_1 := \xi_1 + 6\xi_2, \quad I_2(\mu) := 7 + \xi_1\xi_2 - 2\mu, \quad I_3 := \xi_1 + \xi_2, \quad I_4 := 1$$

L'equazione caratteristica è un *polinomio completo di quarto grado*, le cui radici, pur esprimibili analiticamente, assumono forma oltremodo complicata. È preferibile dunque risolvere l'equazione numericamente. Per fissati coefficienti di smorzamento  $\xi_1; \xi_2$ , ad ogni valore della forza  $\mu$ , la soluzione numerica fa corrispondere due coppie di autovalori complessi coniugati.

Quando  $\mu = 0$ , i quattro autovalori hanno parte reale negativa, cosicché la posizione di equilibrio banale è asintoticamente stabile (Figure).

Quando  $\mu$  cresce dallo zero, gli autovalori si avvicinano all'asse immaginario ed *una sola coppia lo attraversa* in corrispondenza del valore critico  $\mu_d$  ( $d$  indica 'damped'); un ulteriore incremento di forza porta tale coppia di autovalori a destra dell'asse immaginario, rendendo l'equilibrio instabile.

**Tale meccanismo di biforcazione è detto di *Hopf generica*.**





Il carico critico di Hopf del sistema smorzato,  $\mu_d$ , si determina imponendo che l'equazione di quarto grado ammetta la radice  $\lambda = i\omega_d$  (e la sua complessa coniugata, mentre le altre sono ancora a sinistra dell'asse immaginario).

$$2\lambda^4 + I_1\lambda^3 + I_2(\mu)\lambda^2 + I_3\lambda + I_4 = 0$$

Sostituendo questa radice nell'equazione, ed eguagliando separatamente a zero le parti reale ed immaginaria, si ottengono due equazioni reali nelle incognite  $\mu_d$  ed  $\omega_d$ :

$$2\omega_d^4 - I_2(\mu_d)\omega_d^2 + I_4 = 0$$

$$\omega_d(I_3 - I_1\omega_d^2) = 0$$

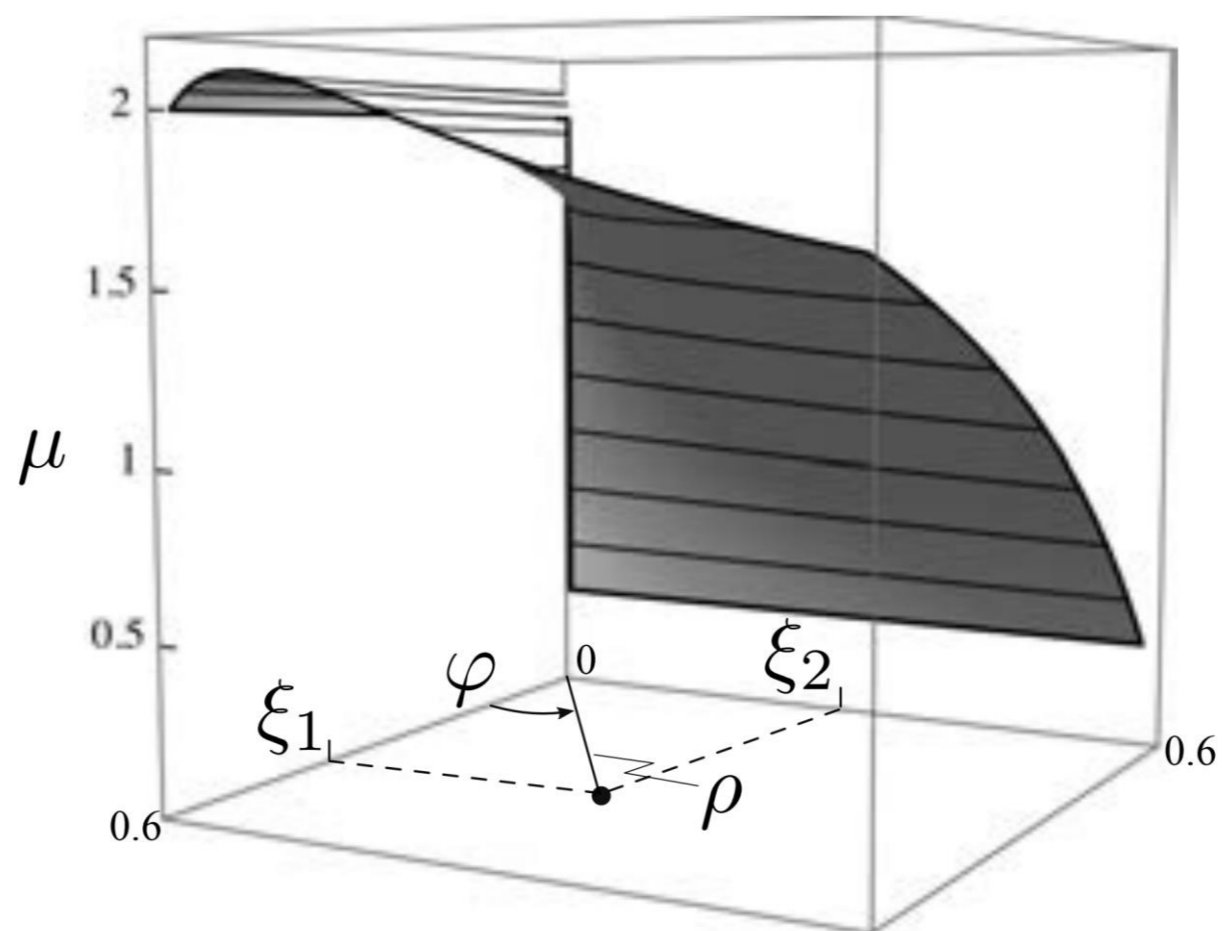
Da queste si trae:  $\omega_d^2 = \frac{I_3}{I_1}$  e  $I_2(\mu_d) = 2\frac{I_3}{I_1} + \frac{I_1 I_4}{I_3}$ .

$$\mu_d = \mu_c + \frac{\xi_1 \xi_2}{2} - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \frac{[\xi_1 - (4 + 5\sqrt{2})\xi_2]^2}{(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 + 6\xi_2)}$$

oltre a  $\omega_d^2 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\xi_1 + 6\xi_2}$ .

$$\mu_d = \mu_c + \frac{\xi_1 \xi_2}{2} - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \frac{[\xi_1 - (4 + 5\sqrt{2}) \xi_2]^2}{(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 + 6\xi_2)}$$

l'equazione cartesiana di una superficie  $\mu_d = \mu_d(\xi_1, \xi_2)$



1. Il carico critico  $\mu_d$  del sistema smorzato è ‘quasi ovunque’ (ovvero, per quasi tutti i sistemi debolmente smorzati) minore del carico critico  $\mu_c$  del sistema non smorzato. Lo smorzamento, dunque, pur essendo dissipativo, ha un effetto dannoso sul comportamento meccanico del sistema circolatorio. La proprietà  $\mu_d < \mu_c$  è nota come Paradosso di Ziegler, o effetto destabilizzante dello smorzamento.
2. Il sistema smorzato *non è in continuità* con quello non smorzato, nel senso che  $\mu_d$  *non* tende a  $\mu_c$  al tendere a zero del modulo dello smorzamento  $\rho := \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ , ma questo limite dipende da come l’operazione è effettuata, più precisamente dalla direzione con la quale, nel piano degli smorzamenti, si tende all’origine.

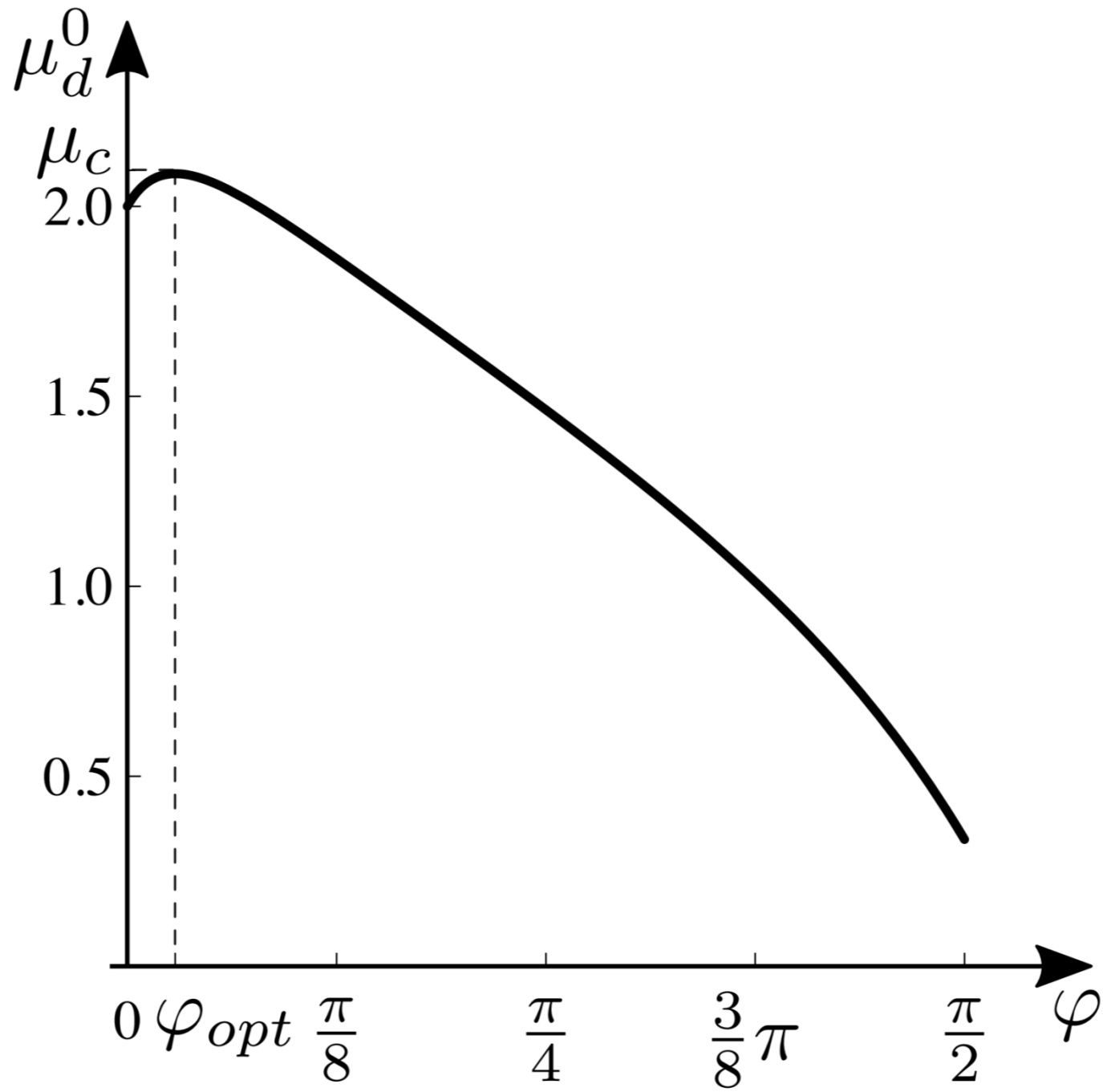
(i) posto  $\xi_2 = 0$ , è  $\lim_{\xi_1 \rightarrow 0} \mu_d = 2$ ;

(ii) posto invece  $\xi_1 = 0$ , è  $\lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \mu_d = \frac{1}{3}$ .

Per studiare, più in generale, come il limite dipenda dal rapporto  $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ ,  
è conveniente porre  $\xi_1 = \rho \cos \varphi$ ,  $\xi_2 = \rho \sin \varphi$

ed effettuare, per un fissato  $\varphi$ , il limite:

$$\mu_d^0 := \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_d = \frac{1}{2} \frac{33 \sin(2\varphi) + 8}{7 \sin(2\varphi) - 5 \cos(2\varphi) + 7}$$



# Paradosso di Ziegler

$$\mu_d = \mu_c + \frac{\xi_1 \xi_2}{2} - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \frac{[\xi_1 - (4 + 5\sqrt{2}) \xi_2]^2}{(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 + 6\xi_2)}$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi:$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \mu_d = \mathbf{1,464}$$

$$\mu_c = \mathbf{2,09}$$

