Docente: Benedetto Manca | Anno accademico 2021/2022
Tutor: Massimiliano Mutzu Martis | Secondo semestre

Matematica Discreta

Foglio 3

Esercizio 1. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ una funzione. Si dimostri che

(a) se f è invertibile a destra, allora f è suriettiva

(b) se f è invertibile con inversa f^{-1} e $g\colon Y \longrightarrow Z$ è una funzione invertibile con inversa g^{-1}, allora $g \circ f$ è una funzione invertibile con inversa $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Esercizio 2. Si dica se le seguenti funzioni sono invertibili a sinistra, a destra o entrambe. In caso affermativo, si determini la funzione inversa sinistra (rispettivamente inversa destra o inversa).

(a) $a\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $a(n) = 2n$.

(b) $b\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la funzione definita da $b(n) = 2n$.

(c) $c\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $c(n) = n - 5$.

(d) $d\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $d(n) = (-1)^n$.

(e) $e\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\}$ la funzione definita da $e(n) = (-1)^n$.

(f) $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(n) = (-1)^n n$.

Esercizio 3. Nei casi in cui gli insiemi X, Y e Z sono finiti ed infiniti, si trovino esempi di

(a) due funzioni $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon Y \longrightarrow Z$ tali che $g \circ f$ sia suriettiva ma f non sia suriettiva e di

(b) due funzioni $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon Y \longrightarrow Z$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva ma g non sia iniettiva.

Esercizio 4. Dati due insiemi finiti X e Y, si dimostri che $|X| \geqslant |Y|$ se e solo se esiste una funzione suriettiva $f\colon X \longrightarrow Y$.

Esercizio 5. Si dimostri che l'insieme X dei numeri interi pari è equipotente all'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi.

Esercizio 6. Si dimostri che l'insieme X di numeri dispari è equipotente all'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

(continua sul retro)

Esercizio 7. Attraverso il metodo di induzione, si dimostri che:

(a) per ogni $n \geqslant 1$, si ha $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$;

(b) per ogni $n \geqslant 0$, si ha $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$;

(c) per ogni $n \geqslant 1$, si ha $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$;

(d) per ogni $n \geqslant 1$, si ha $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$;

(e) per ogni $n \geqslant 0$, il numero di sottoinsiemi di un insieme X di n elementi è 2^n, cioè, se $|X| = n$ allora $|\mathrm{P}(X)| = 2^n$.

Esercizio 8. Quanti sono gli anagrammi della parola **SOMMATORIA**? E delle parole **MAGIA NERA**?

Esercizio 9. Si calcolino i coefficienti dei termini

(a) x^5y^8 nel polinomio $(x+y)^{13}$,

(b) x^2y^7 nel polinomio $(x+y)^9$,

(c) $x^{10}y^8$ nel polinomio $(x+y)^{18}$ e

(d) x^8y^5 nel polinomio $(x+y)^{13}$.

Esercizio 10. In una azienda con 10 lavoratori si devono organizzare due commissioni, una con 3 lavoratori e l'altra con 4 lavoratori.

(a) In quanti modi diversi si possono fare queste scelte in modo tale che le due commissioni non si intersechino?

(b) Se, in più, nella seconda commissione si deve nominare un presidente, un vice-presidente e un segretario, in quanti modi diversi si possono scegliere queste due commissioni (in modo che non si intersichino)?