



Università degli Studi di Cagliari

UNICA  
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

**Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2021/22**

# Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> **Lezione 8**

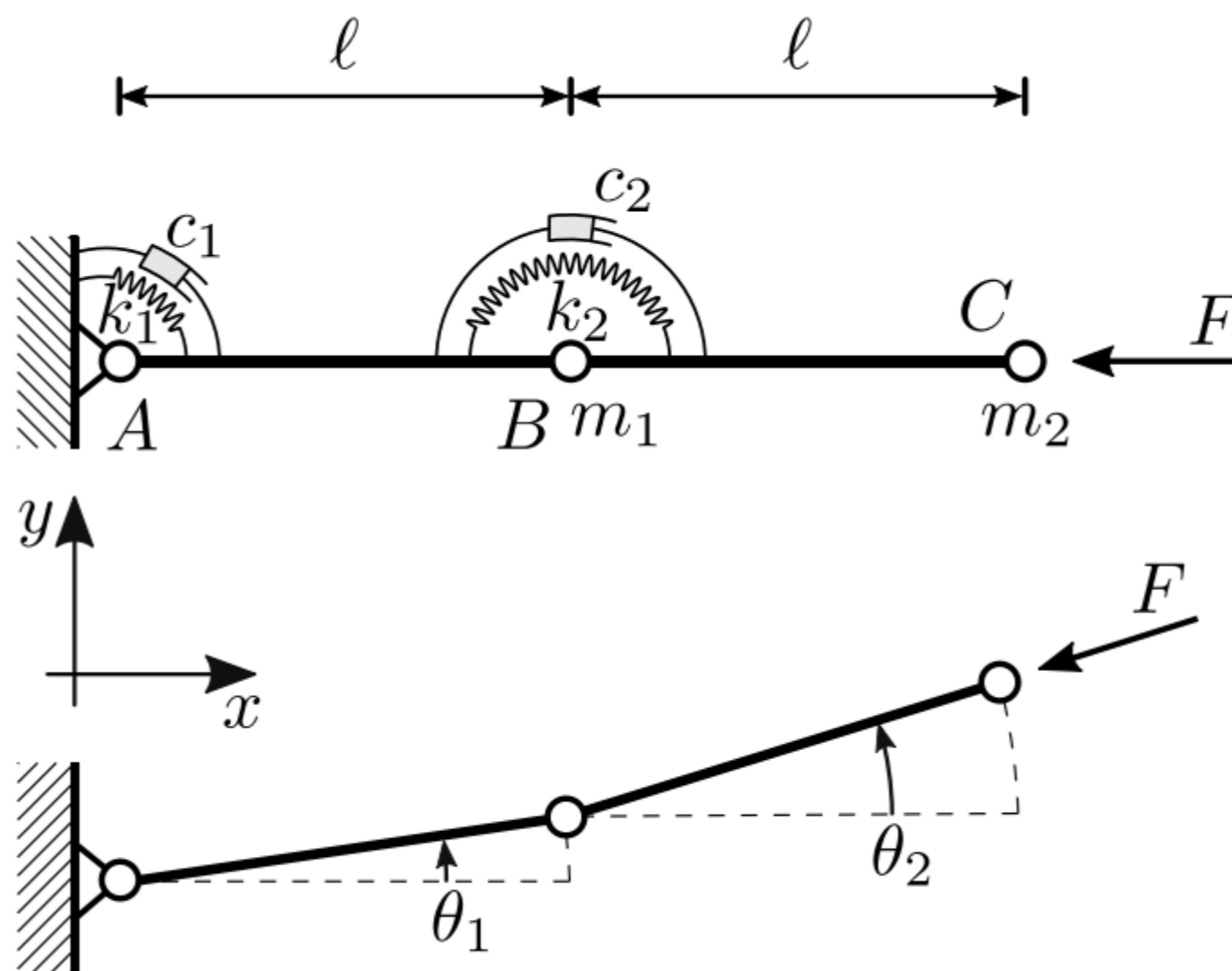
La colonna di Ziegler

***Victor Eremeev***

victor.eremeev@unica.it

Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso  
emanuele.reccia@unica.it

# La colonna di Ziegler



# La colonna di Ziegler

Si considera un sistema paradigmatico, a due gradi di libertà, noto come *colonna di Ziegler* **Figura** . Il sistema (bipendolo) è costituito da due aste rigide,  $AB$  e  $BC$ , prive di massa, ciascuna di lunghezza  $\ell$ , collegate mutuamente ed al suolo da cerniere. Sul pendolo sono presenti due masse concentrate: una, di intensità  $m_1$ , sulla cerniera interna  $B$ , l'altra, di intensità  $m_2$ , sull'estremo libero  $C$ . Le due aste sono collegate, tra loro e al suolo, da organi visco-elastici lineari, di rigidezza  $k_1$  e  $k_2$  e viscosità  $c_1$  e  $c_2$ , rispettivamente applicati in  $A$  e  $B$ . Il doppio pendolo è caricato all'estremo libero da una forza follower di intensità  $F$ , che mantiene la sua direzione parallela all'asta  $BC$ .



## Cinematica

La configurazione del sistema è descritta dalle rotazioni delle due aste,  $\theta_1(t)$  e  $\theta_2(t)$ , prese come parametri lagrangiani. Da considerazioni geometriche, si traggono le seguenti *relazioni esatte*, che esprimono le componenti di spostamento longitudinale  $u$  e trasversale  $v$  dei punti  $B, C$ :

$$\begin{aligned}u_B &= -\ell (1 - \cos \theta_1), \\v_B &= \ell \sin \theta_1, \\u_C &= -\ell (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2), \\v_C &= \ell (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)\end{aligned}$$

Ritenendo i termini al più quadratici nei parametri lagrangiani, si ha:

$$\begin{aligned}u_B &= -\frac{\ell \theta_1^2}{2}, \\v_B &= \ell \theta_1, \\u_C &= -\ell \left( \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} \right), \\v_C &= \ell (\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

## Legame costitutivo

In termini di spostamento

$$M_1 = k_1 \theta_1$$

$$M_2 = k_2 (\theta_2 - \theta_1)$$

### Forma adimensionale delle equazioni del moto

Seguendo Ziegler, si fa riferimento ad una particolare famiglia di sistemi, nella quale  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = m$  e  $k_1 = k_2 = k$ . Inoltre, per rendere più agevole la discussione, si pongono le equazioni del moto in forma adimensionale. Si introduce a tal scopo una nuova variabile tempo  $\tilde{t}$ , un carico adimensionale  $\mu$ , in accordo alle seguenti definizioni:

$$\tilde{t} := t \sqrt{\frac{k}{m\ell^2}}, \quad \mu := \frac{F\ell}{k}$$



Da questa seguono le equazioni di bilancio:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ell^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_2 + M_1 - M_2 + F \ell (\theta_2 - \theta_1) &= 0 \\ m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ell^2 \ddot{\theta}_2 + M_2 &= 0 \end{aligned}$$

si ottengono le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} \ell^2 \begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \\ + \left( \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} + F \ell \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esse sono del tipo:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g) \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

con  $\mathbf{q} := (\theta_1, \theta_2)^T$ , dove appaiono, nell'ordine, la matrice di massa, di rigidezza elastica e di rigidezza geometrica.

Si noti che, a differenza delle altre matrici,  $\mathbf{K}_g$  è non simmetrica, a testimonianza della non conservatività della forza  $F$ .

## Legame costitutivo

In termini di spostamento

$$M_1 = k_1 \theta_1$$

$$M_2 = k_2 (\theta_2 - \theta_1)$$

### Forma adimensionale delle equazioni del moto

Seguendo Ziegler, si fa riferimento ad una particolare famiglia di sistemi, nella quale  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = m$  e  $k_1 = k_2 = k$ . Inoltre, per rendere più agevole la discussione, si pongono le equazioni del moto in forma adimensionale. Si introduce a tal scopo una nuova variabile tempo  $\tilde{t}$ , un carico adimensionale  $\mu$ , in accordo alle seguenti definizioni:

$$\tilde{t} := t \sqrt{\frac{k}{m\ell^2}}, \quad \mu := \frac{F\ell}{k}$$



Posta la soluzione del tipo  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{u} \exp(\lambda t)$ , segue il problema agli autovalori:

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + (\mathbf{K}_e + \mu\mathbf{K}_g)] \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

ovvero, in forma esplicita:

$$\begin{bmatrix} 3\lambda^2 + 2 - \mu & \lambda^2 - 1 + \mu \\ \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le cui radici  $\lambda$  decidono della stabilità della posizione di equilibrio banale. L'equazione caratteristica si scrive:

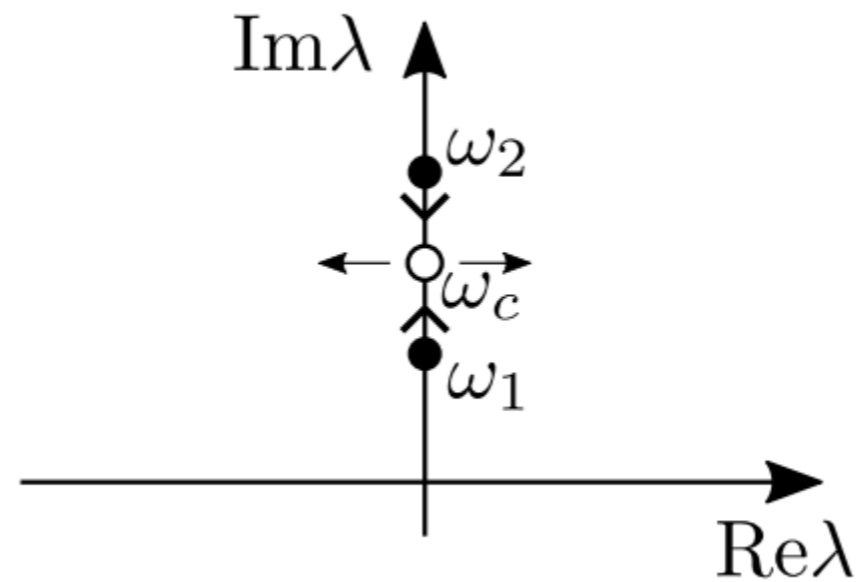
$$2\lambda^4 + (7 - 2\mu)\lambda^2 + 1 = 0$$

Essendo questa biquadratica, può essere risolta in forma chiusa, per fornire:

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{4} \left( -(7 - 2\mu) \pm \sqrt{(7 - 2\mu)^2 - 8} \right)$$

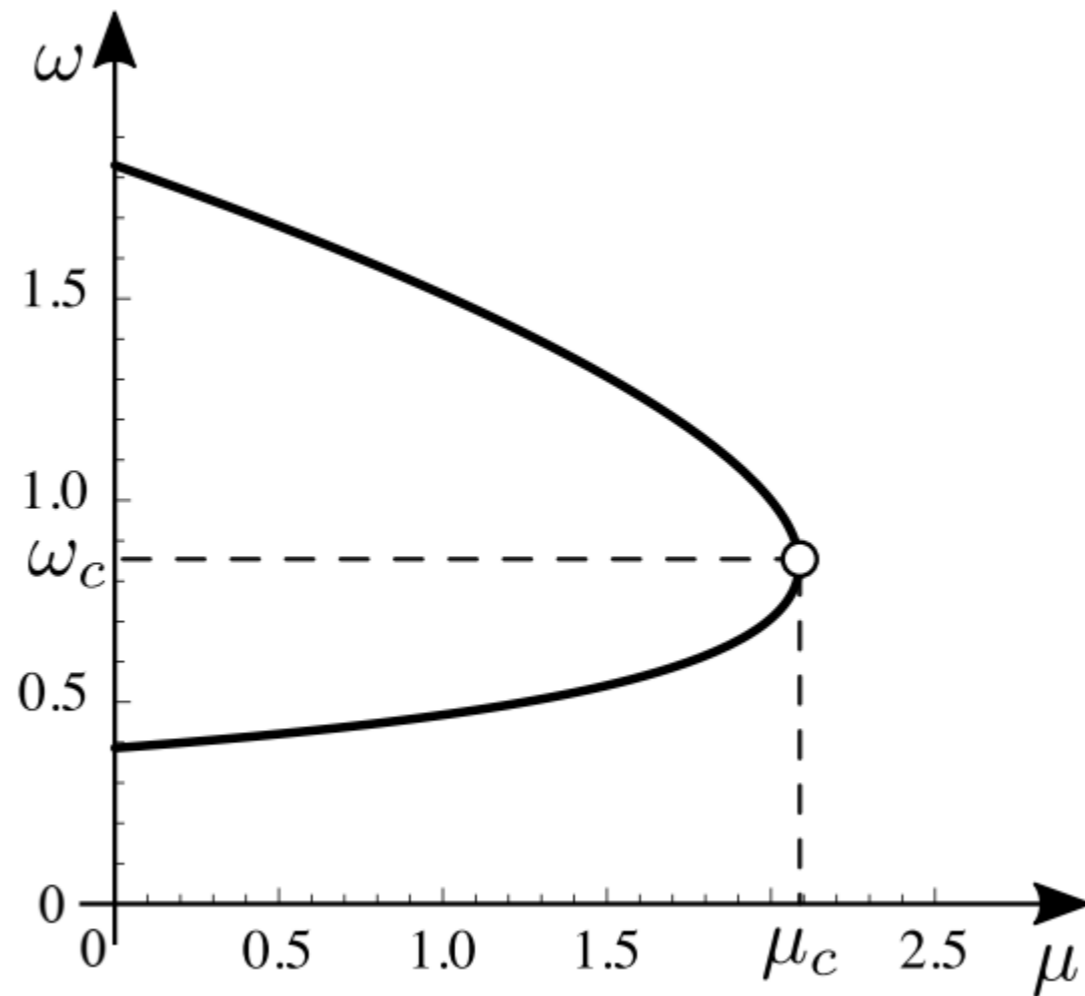
$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{4} \left( -(7 - 2\mu) \pm \sqrt{(7 - 2\mu)^2 - 8} \right)$$

Quando  $\mu = 0$ , il discriminante  $\Delta := (7 - 2\mu)^2 - 8 > 0$ , e dunque  $\lambda_{1,2}^2 < 0$ ; posto  $\lambda_{1,2}^2 =: -\omega_{1,2}^2$ , i quattro autovalori sono puramente immaginari,  $\lambda_{1,2,3,4} = (\pm i\omega_1, \pm i\omega_2)$





Al crescere di  $\mu$ , il discriminante  $\Delta$  diminuisce, insieme alla differenza  $|\omega_1 - \omega_2|$ . Quando  $\Delta = 0$ , le due coppie di autovalori collassano in una,  $\omega_1 = \omega_2 =: \omega_c$ . Per un ulteriore aumento di  $\mu$ , è  $\Delta < 0$ , cosicché i quattro autovalori sono complessi coniugati ed opposti in segno, del tipo  $\pm\delta \pm i\omega$ .



La condizione di biforcazione è dunque  $\Delta = 0$ , che si verifica quando la forza follower assume il valore critico:

$$\mu_c := \frac{7}{2} - \sqrt{2} \simeq 2.09$$

Corrispondentemente, la parte immaginaria degli autovalori coincidenti è  $\omega_c = 2^{-1/4} \simeq 0.84$ . Questa biforcazione è detta di *Hopf circolatoria o reversibile*. Il meccanismo è spesso rappresentato come in F **Figura** , che riporta le parti immaginarie degli autovalori in funzione di  $\mu$ . Quando  $\mu > \mu_c$  gli autovalori non sono più puramente immaginari, e dunque non più rappresentati in figura.

