



Università degli Studi di Cagliari

UNICA  
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

**Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2021/22**

# Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> **Lezione 7**

Biforcazioni dinamiche indotte da forze follower

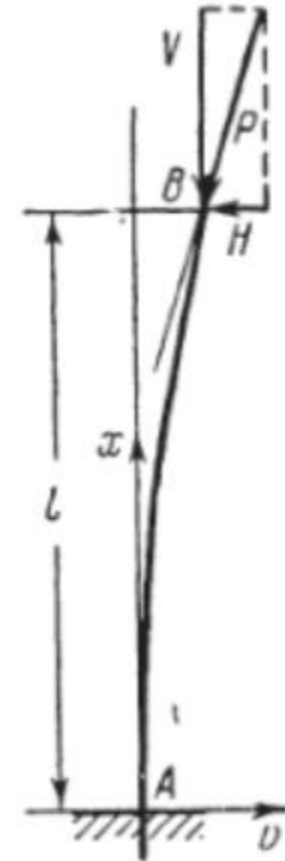
***Victor Eremeev***

victor.eremeev@unica.it

Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso  
emanuele.reccia@unica.it

# La trave

La trave ha lunghezza  $\ell$ , momento di inerzia della sezione  $I$ , densità lineare di massa  $m$ . È incastrata all'estremo  $A$  e caricata all'estremo libero  $B$  da una forza follower di intensità  $F$ , che comprime la trave nella configurazione rettilinea, e mantiene la sua direzione allineata con la tangente in  $B$  alla linea d'asse deformata.



$$m \ddot{v} + EI v'''' + F v'' = 0$$

$$v_A = 0, \quad v'_A = 0$$

$$EI v'''_B = 0, \quad EI v''_B = 0$$

Le equazioni descrivono il moto trasversale  $v(x; t)$  della trave.

Si introducono a tal scopo le seguenti definizioni

$$\tilde{x} := \frac{x}{\ell}, \quad \tilde{t} := t \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}, \quad \tilde{v} := \frac{v}{\ell}, \quad \mu := \frac{F\ell^2}{EI},$$

dove  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{t}$  e  $\tilde{v}$  sono, nell'ordine, ascissa, tempo e spostamento trasversale adimensionale;  $\mu$  è la forza esterna adimensionale;

Le equazioni del moto si riscrivono nella forma:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + v'''' + \mu v'' &= 0 \\ v_A &= 0, \quad v'_A = 0 \\ -v'''_B &= 0, \quad v''_B = 0 \end{aligned}$$

Separando le variabili, in accordo a  $v(x, t) = V(x) \exp(\lambda t)$ , dalla precedente si trae il problema differenziale agli autovalori:

$$\begin{aligned} V'''' + \mu V'' + \lambda^2 V &= 0 \\ V_A &= 0, \quad \phi'_A = 0 \\ V'''_B &= 0, \quad V''_B = 0 \end{aligned}$$

$$V(x) = c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x) + c_3 \cosh(\beta x) + c_4 \sinh(\beta x)$$

dove  $c_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) sono costanti arbitrarie e  $\alpha, \beta$  sono definiti come:

$$\alpha^2 := \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda^2}}{2}, \quad \beta^2 := \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda^2}}{2}$$

Sostituendo la soluzione generale nelle condizioni al contorno, si perviene

$$\mathbf{S}\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ -\alpha^3 \sin \alpha & \alpha^3 \cos \alpha & -\beta^3 \sinh \beta & -\beta^3 \cosh \beta \\ -\alpha^2 \cos \alpha & -\alpha^2 \sin \alpha & \beta^2 \cosh \beta & \beta^2 \sinh \beta \end{bmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{S}$  dipende, attraverso i numeri d'onda  $\alpha$  e  $\beta$ , dall'autovalore  $\lambda$  e dal parametro di biforcazione  $\mu$ , ovvero è  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\lambda, \mu)$ . L'equazione caratteristica  $\det \mathbf{S} = 0$  fornisce gli autovalori  $\lambda$  in funzione di  $\mu$ ; essa si scrive:

$$\alpha^4 + \beta^4 + \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) \sin \alpha \sinh \beta + 2\alpha^2\beta^2 \cos \alpha \cosh \beta = 0$$

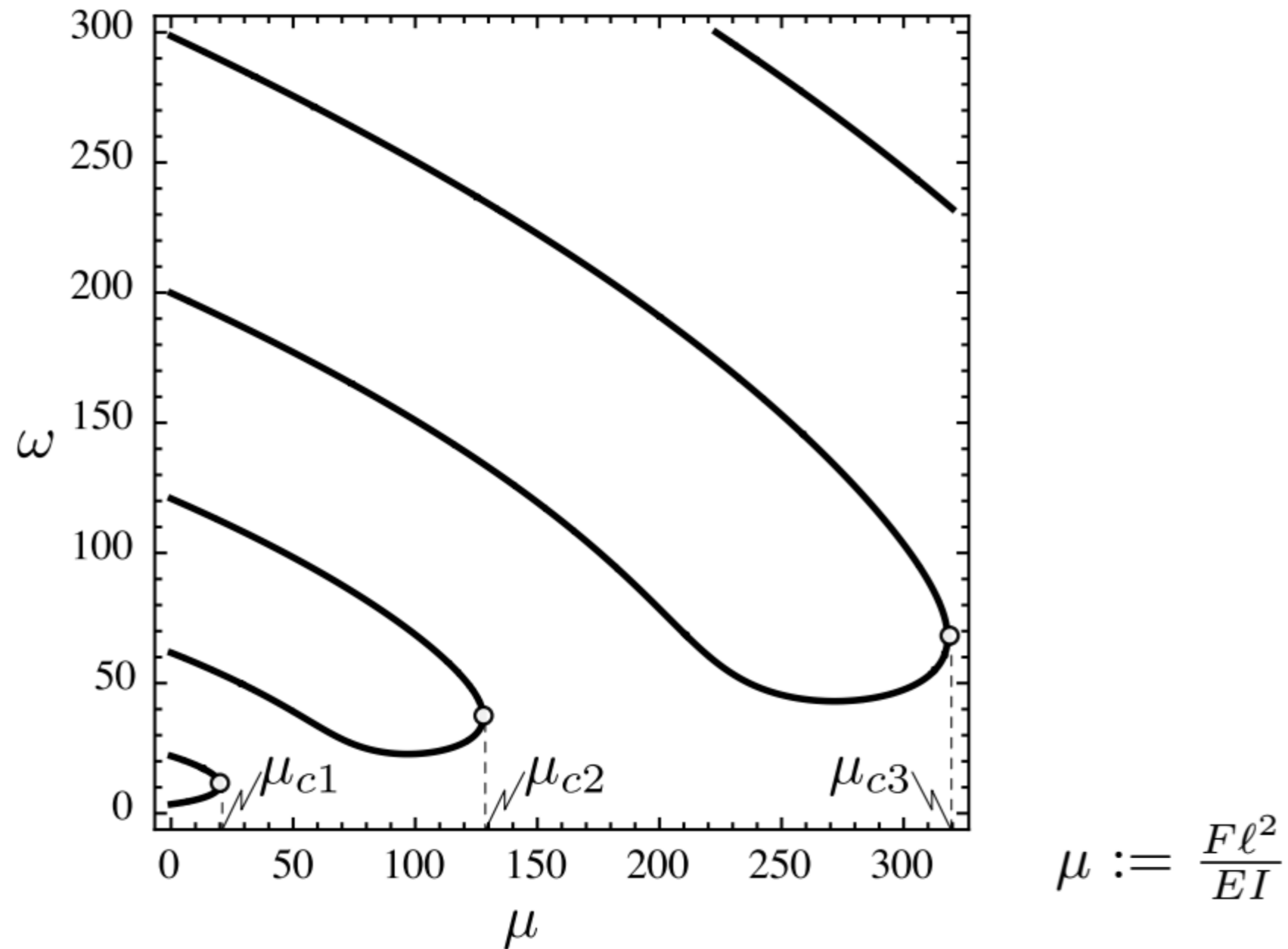
$$\alpha^2 := \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda^2}}{2}, \quad \beta^2 := \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda^2}}{2}$$

$$\alpha^4 + \beta^4 + \alpha\beta (\alpha^2 - \beta^2) \sin \alpha \sinh \beta + 2\alpha^2\beta^2 \cos \alpha \cosh \beta = 0$$

$$\alpha^2 := \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda^2}}{2}, \quad \beta^2 := \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda^2}}{2}$$

Quando  $\mu = 0$ , l'equazione ammette infiniti autovalori puramente immaginari  $\lambda = \pm i\omega_j$ , coincidenti con le frequenze naturali della trave. Quando la forza follower cresce dallo zero e raggiunge il primo valore critico  $\mu = \mu_{c1}$ , le prime due coppie di autovalori collidono e si separano, l'una a destra, l'altra a sinistra dell'asse immaginario (si verifica dunque una biforcazione di *Hopf circolatoria*). Tutti gli altri (infiniti) autovalori non interessati dalla collisione permangono sull'asse immaginario, fino a che, per  $\mu = \mu_{c2}$ , la terza e quarta coppia di autovalori collidono, per dar luogo ad una biforcazione successiva. Per valori maggiori di  $\mu$  si osserva la collisione tra la quinta e sesta coppia e così via. La **Figura** descrive il luogo delle frequenze  $\omega$  al variare della forza adimensionale  $\mu$  nonché i valori di biforcazione  $\mu_{ci}$  nei punti in cui i luoghi hanno tangente verticale.

I carichi critici si determinano come segue. Posto  $\lambda = i\omega_c$ ,  $\mu = \mu_c$



$$(\mu_{c1}, \omega_{c1}) = (20.051, 11.016), (\mu_{c2}, \omega_{c2}) = (127.811, 37.055),$$

$$(\mu_{c3}, \omega_{c3}) = (317.981, 67.567)$$

**OSSERVAZIONE** Il valore critico della forza follower è  $F_c = 20.051 \frac{EI}{\ell^2}$ ; il carico critico euleriano è invece  $P_c = \pi^2 \frac{EI}{4\ell^2} \simeq 2.467 \frac{EI}{\ell^2}$ . È dunque  $\frac{F_c}{P_c} \simeq 8.13$ , ovvero l'instabilità dinamica si verifica per una forza follower sensibilmente più grande di una gravitazionale.

$$\frac{F_c}{P_c} \simeq 8.13$$



# biforcazione di *Hopf circolatoria*

