Docente: Benedetto Manca
Tutor: Massimiliano Mutzu Martis

Anno accademico 2021/2022
Secondo semestre

Matematica Discreta

Foglio 2

Esercizio 1. Siano $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\bullet, \diamond, *\}$ due insiemi. Si determini se le seguenti affermazioni sono vere o false e si giustifichi la risposta.

(a) Il prodotto cartesiano $A \times B$ ha 6 elementi.

(b) La coppia ordinata (a, b) appartiene a $A \times B$.

(c) La coppia ordinata $(\diamond, b)$ appartiene a $A \times B$.

(d) L'insieme $\{x \in A \mid (x, \bullet) \in A \times B\}$ ha 3 elementi.

(e) L'insieme $\{y \in B \mid (b, y) \in A \times B\}$ ha 2 elementi.

(f) L'insieme $a \times B$ e l'insieme $b \times A$ hanno lo stesso numero di elementi.

(g) Il sottoinsieme $\{(a, c), (c, c), (c, a), (a, a)\}$ di A^2 è una relazione di equivalenza su A e le sue classi di equivalenza sono $[a] = [c] = \{a, c\}$ e $[b] = \{b\}$.

(h) L'insieme $(A \cup B) \times (A \cup B)$ è uguale all'insieme $(A \times B) \cup (B \times A)$.

Esercizio 2. Sia $A = \{a, b, c\}$.

(i) Si elenchino tutte le relazioni di equivalenza su A.

(ii) Si determinino le classi di equivalenza di ogni relazione di equivalenza elencata.

Esercizio 3. Si considerino le seguenti relazioni sui numeri naturali, e si indichi quali di loro sono relazioni di equivalenza. Per ogni relazione di equivalenza trovata, si indichino le classi di equivalenza $[x]$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Si giustifichino le risposte.

(a) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b - a = 1\}$.

(b) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b - a \text{ è dispari}\}$.

(c) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \sqrt{ab} \in \mathbb{N}\}$.

(d) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b - a = 0\}$.

(e) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b \geqslant a\}$.

(f) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b - a \text{ finisce in } 3\}$.

(g) $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b - a \text{ finisce in } 0\}$.

(continua sul retro)

Esercizio 4. .

(a) Sia $a\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $a(n) = 2n$. Si determinino $\mathrm{Im}(a)$, $a^{-1}(2)$ e $a^{-1}(1)$.

(b) Sia $b\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ la funzione definita da $b(n) = 2n$. Si determinino $\mathrm{Im}(b)$, $b^{-1}(2)$ e $b^{-1}(1)$.

(c) Sia $c\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $c(n) = n - 5$. Si determinino $\mathrm{Im}(c)$, $c^{-1}(2)$ e $c^{-1}(1)$.

(d) Sia $d\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $d(n) = (-1)^n$. Si determinino $\mathrm{Im}(d)$, $d^{-1}(-1)$ e $d^{-1}(1)$.

(e) Sia $e\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\}$ la funzione definita da $e(n) = (-1)^n$. Si determinino $\mathrm{Im}(e)$, $e^{-1}(-1)$ e $e^{-1}(1)$.

(f) Sia $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(n) = (-1)^n n$. Si determinino $\mathrm{Im}(f)$, $f^{-1}(\mathbb{N})$ e $f^{-1}(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$.

(g) Si determini se le funzioni a, b, c, d, e e f sono iniettive, suriettive, biiettive.

Esercizio 5. Per ogni funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si consideri il sottoinsieme Γ_f di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\right\} .$$

Questo sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ è detto il **grafico di** f. In particolare, Γ_f e' una relazione su $\mathbb{R}$. Si dimostri che il grafico di f è una relazione di equivalenza se e solo se $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Si determinino le seguenti composizioni delle funzioni dell'Esercizio 4.

i) $c \circ a$

ii) $a \circ c$

iii) $c \circ d$

iv) $a \circ f$

Esercizio 7. Siano $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon Y \longrightarrow Z$ due funzioni. Si dimostri che

i) Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva.

ii) Se $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva.