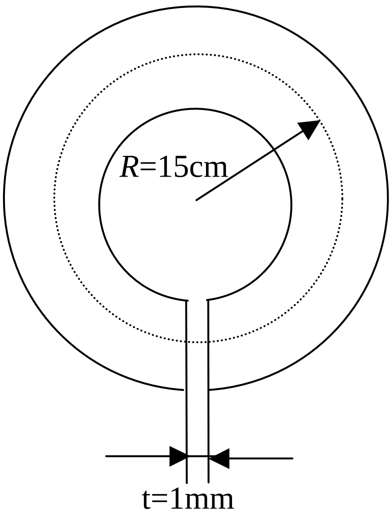
Esercitazione sui Circuiti Magnetici

ESERCIZIO 1

Determinare l flusso magnetico nel traferro t=1mm del circuito magnetico di figura, di sezione $S=10cm^2$, sul quale sono uniformemente distribuite N=100 spire di conduttore percorso dalla corrente I=20A. Il nucleo toroidale é in ferro al silicio la cui caratteristica di magnetizzazione risulta dalla tabella.



$B(Wb/m^2)$	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
H(As/m)	200	250	310	400	700	2300	7500	24000

(Si trascurino le linee di flusso che non attraversano il traferro)

Risoluzione

La riluttanza del circuito magnetico non é costante, in quanto non è costante la permeabilità magnetica.
Si deve procedere tracciando la curva di magnetizzazione del circuito. Si fissano alcuni valori del flusso al traferro e si calcolano le amperspire necessarie a produrli. Per interpolazione si trova poi il valore del flusso corrispondente alle amperspire assegnate.
Per avere un ordine di grandezza dei valori del flusso da prefissare si può osservare che questo deve essere inferiore a quello Φ_1 che si avrebbe se la riluttanza del tratto in ferro del circuito magnetico fosse trascurabile rispetto a quella del traferro in aria. Nel caso che la riluttanza del ferro fosse trascurabile si avrebbe:

$$NI = \Re_t \Phi_1 \Rightarrow NI = \frac{t}{\mu_0 \cdot S} \cdot \Phi_1 \Rightarrow \Phi_1 = \frac{NI}{\frac{t}{\mu_0 \cdot S}} = \frac{100 \cdot 20}{\frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}}} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

da cui :

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 10^{-4}} = 2.5 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

Per tracciare la curva di magnetizzazione, compiliamo una tabella tenendo conto che:

$$(NI)_{tot} = (\Re_f + \Re_t) \cdot \Phi = (NI)_f + (NI)_t$$

$\Re_f = \frac{1}{\mu_r \cdot \mu_0} \cdot \frac{2\pi \cdot R}{S}$ con μ_r da determinare in base alla caratteristica

$$\Re_t = \frac{t}{\mu_0 \cdot S} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0.079 \cdot 10^7 = 7.9 \cdot 10^5$$

$$(NI)_f = \Re_f \cdot \Phi = \frac{1}{\mu_r \cdot \mu_0} \cdot \frac{2\pi \cdot R}{S} \cdot \Phi = \frac{1}{\mu_r \cdot \mu_0} \cdot B_f \cdot (2\pi \cdot R) = (2\pi \cdot R) \cdot H_f = 0.942 \cdot H_f$$

$$(NI)_t = \Re_t \cdot \Phi = 7.9 \cdot 10^5 \cdot \Phi$$

B	Φ	H_f	$(NI)_f$	$(NI)_t$	$(NI)_{tot}$
1,0	1,0E-03	400	377	790	1167
1,2	1,2E-03	700	660	948	1608
1,4	1,4E-03	2300	2168	1106	3274
1,6	1,6E-03	7500	7069	1264	8333

Compilata la tabella si può procedere o per interpolazione o tracciando il grafico B=*f*(H) ed entrando sul grafico col valore di amperespire assegnato:

Per interpolazione abbiamo :

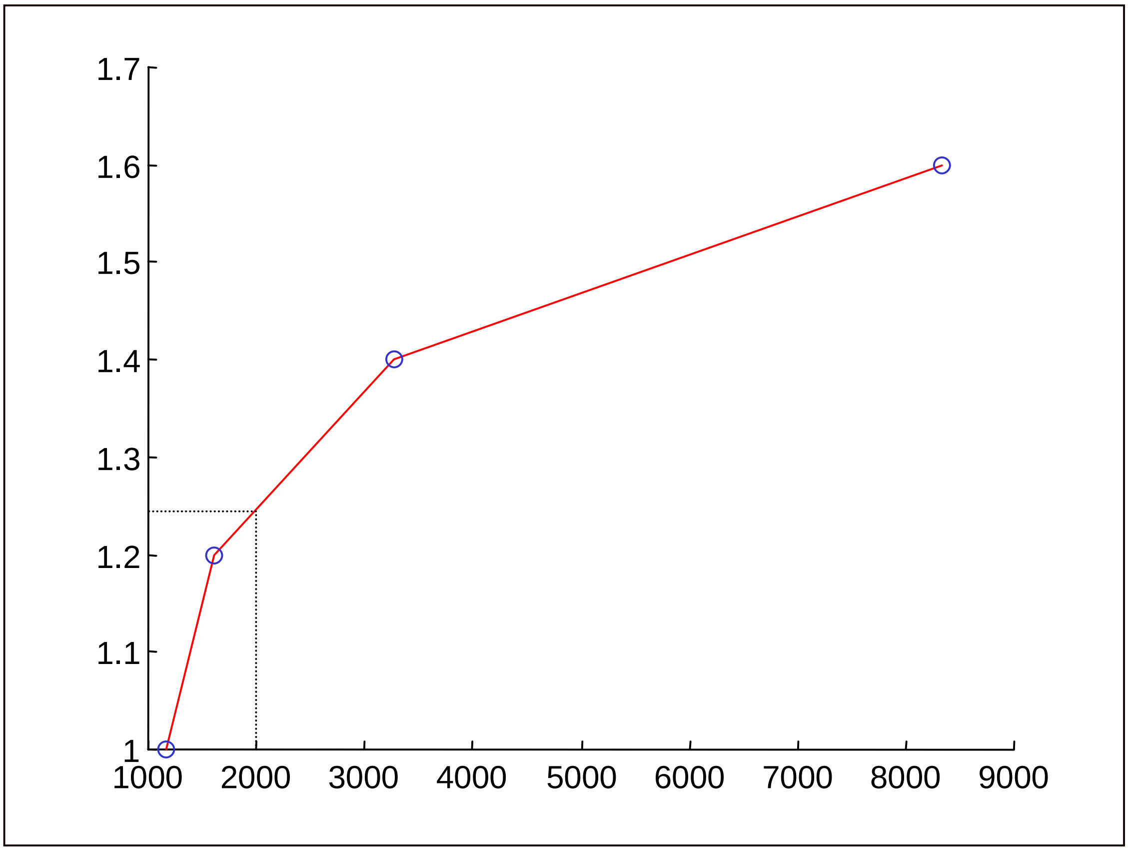
$$NI = 2000$$

$$(NI)_1 = 1608 \quad \rightarrow \quad B_1 = 1.2$$

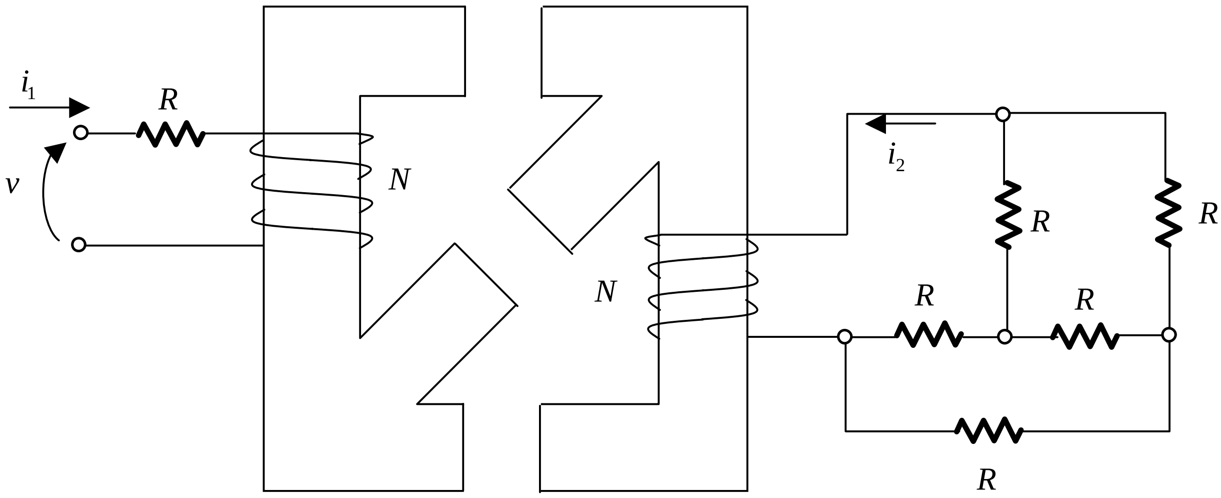
$$(NI)_2 = 3274 \quad \rightarrow \quad B_2 = 1.4$$

$$B = \frac{B_2 - B_1}{(NI)_2 - (NI)_1} \cdot [(NI) - (NI)_1] + B_1 = \frac{1.4 - 1.2}{3274 - 1608} \cdot (2000 - 1608) + 1.2 = 1.274 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

Per via grafica abbiamo:



ESERCIZIO 2



Il circuito è in regime sinusoidale.

$R = 1\Omega$

$v(t) = \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \cos 3t$

$N = 10$

Si ipotizzi la permeabilità magnetica del ferro infinita e si trascurino i flussi dispersi.

Le riluttanze dei traferri siano $\Re = 100\ \mathrm{H}^{-1}$ (uguali per tutti i traferri).

Calcolare $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

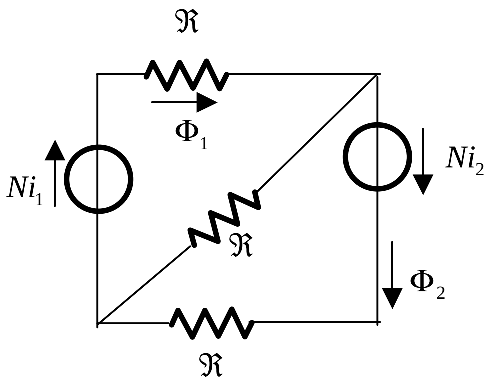
Risoluzione

I flussi concatenati con gli avvolgimenti 1 e 2 sono :

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = N\Phi_1 = L_1 \cdot i_1 + M \cdot i_2 \\ \Phi_{c2} = N\Phi_2 = L_2 \cdot i_2 + M \cdot i_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Per determinare Φ_1 e Φ_2 :

con le ipotesi fatte, il circuito elettrico equivalente al circuito magnetico è :



Le equazioni alle maglie danno:

$$\begin{cases} Ni_1 = 2\Re\Phi_1 - \Re\Phi_2 \\ Ni_2 = 2\Re\Phi_2 - \Re\Phi_1 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \Phi_2 = -\dfrac{Ni_1}{\Re} + \dfrac{2\Re}{\Re}\cdot\Phi_1 = -\dfrac{Ni_1}{\Re} + 2\Phi_1 \\ Ni_2 = 2\Re\cdot\left(-\dfrac{Ni_1}{\Re} + 2\Phi_1\right) - \Re\Phi_1 \end{cases}$$

dalla seconda equazione otteniamo:

$$Ni_2 = -2Ni_1 + 4\Re\Phi_1 - \Re\Phi_1 \quad \Rightarrow \quad Ni_2 + 2Ni_1 = 3\Re\Phi_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_1 = \frac{2Ni_1}{3\Re} + \frac{Ni_2}{3\Re}$$

e sostituendo questo valore nella prima equazione si ottiene:

$$\Phi_2 = -\frac{Ni_1}{\Re} + 2\cdot\left(\frac{2Ni_1}{3\Re} + \frac{Ni_2}{3\Re}\right) = -\frac{Ni_1}{\Re} + \frac{4}{3}\cdot\frac{Ni_1}{\Re} + \frac{2}{3}\cdot\frac{Ni_2}{\Re} = \frac{Ni_1}{3\Re} + \frac{2}{3}\cdot\frac{Ni_2}{\Re}$$

riepilogando:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{2Ni_1}{3\Re} + \dfrac{Ni_2}{3\Re} \\ \Phi_2 = \dfrac{Ni_1}{3\Re} + \dfrac{2Ni_2}{3\Re} \end{cases} \qquad (2)$$

Siccome dal sistema (1) otteniamo:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{L_1}{N}\cdot i_1 + \dfrac{M}{N}\cdot i_2 \\ \Phi_2 = \dfrac{L_2}{N}\cdot i_2 + \dfrac{M}{N}\cdot i_1 \end{cases}$$

Confrontando i due sistemi abbiamo:

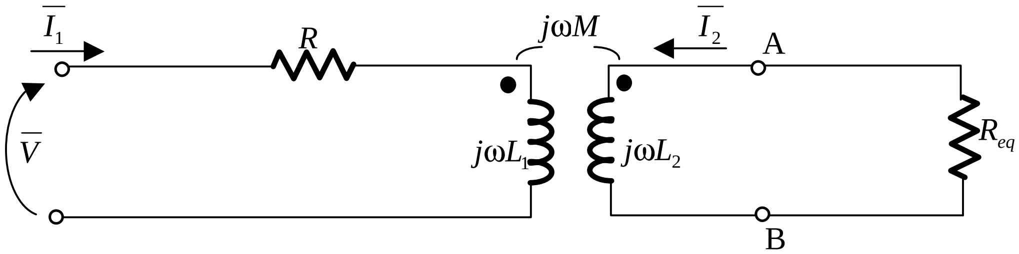
$$\frac{L_1}{N} = \frac{2N}{3\Re} \qquad \frac{M}{N} = \frac{N}{3\Re} \qquad \frac{L_2}{N} = \frac{2N}{3\Re}$$

da cui:

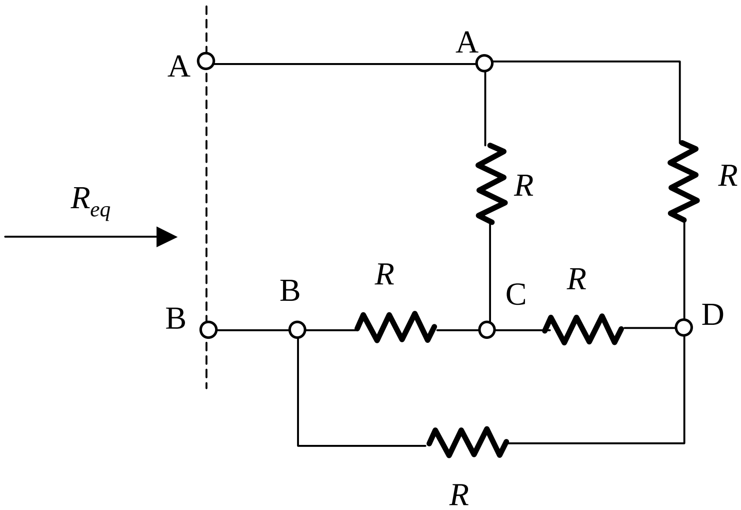
$$L_1 = L_2 = \frac{2N^2}{3\Re} = \frac{2 \cdot 10^2}{3 \cdot 100} = \frac{2}{3}\ \mathrm{H}$$

$$M = \frac{N^2}{3\Re} = \frac{10^2}{3 \cdot 100} = \frac{1}{3}\ \mathrm{H}$$

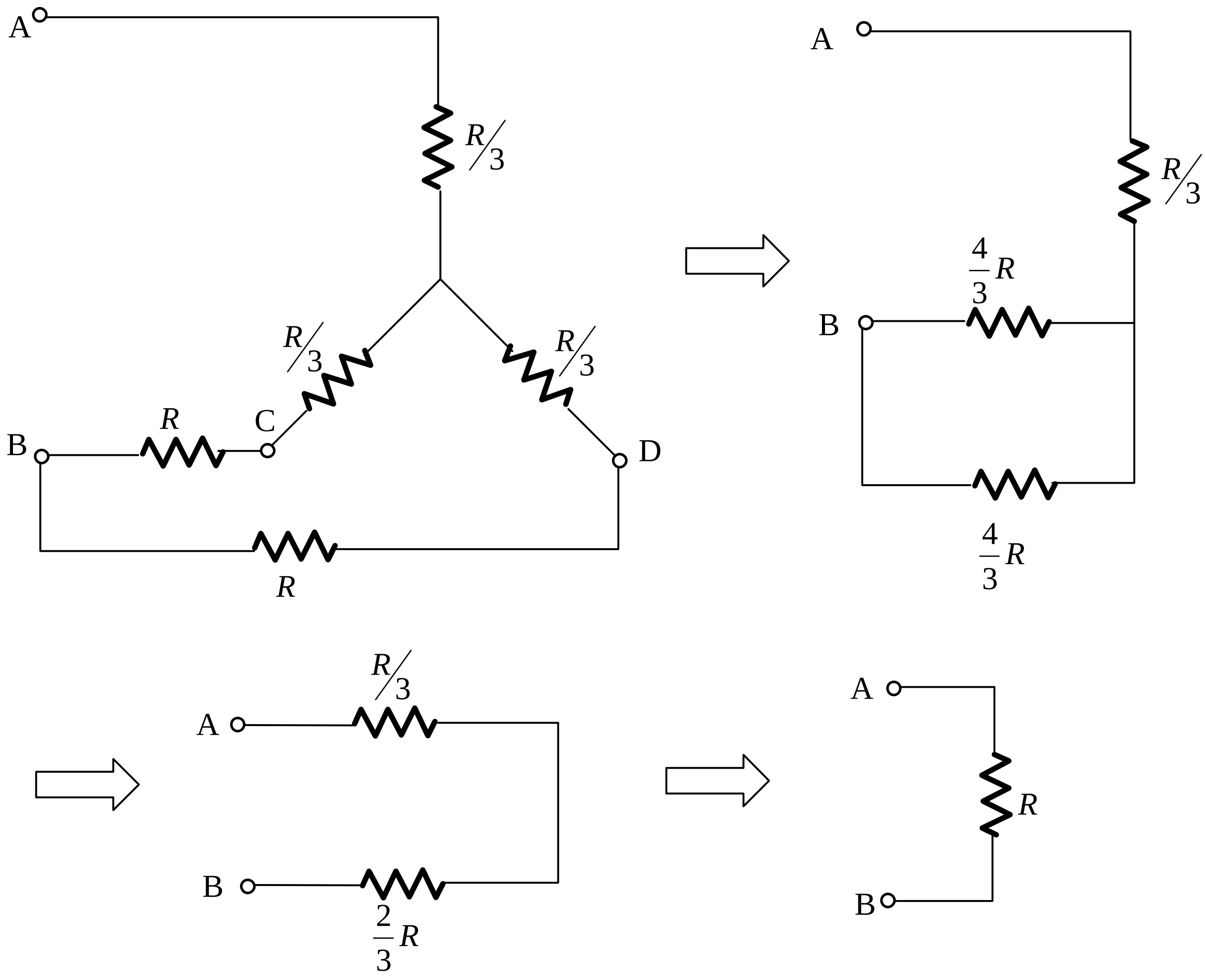
Il circuito elettrico comprendente la mutua induttanza é:



Con R_{eq} pari alla resistenza equivalente vista dai morsetti AB dell'induttore L_2 :



Operiamo una trasformazione triangolo→stella tra i morsetti ACD:



Allora $\quad R_{eq} = R = 1\Omega$

Poiché il circuito è in regime sinusoidale è utile il metodo simbolico.

Per comodità consideriamo i valori efficaci delle grandezze, ossia dividiamo per $\sqrt{2}$.

$v(t) = 20 \cdot \cos 3t \qquad \omega = 3\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$\overline{V} = 20$

$j\omega L_1 = j\omega L_2 = j3 \cdot \frac{2}{3} = j2$

$j\omega M = j3 \cdot \frac{1}{3} = j$

Le equazioni alle maglie sono :

$$\begin{cases} \overline{V} = j\omega L_1 \overline{I}_1 + j\omega M \overline{I}_2 + R\overline{I}_1 \\ j\omega L_2 \overline{I}_2 + j\omega M \overline{I}_1 + R_{eq} \overline{I}_2 = 0 \end{cases}$$

e sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 20 = (1+j2)\cdot\overline{I_1} + j\overline{I_2} \\ 0 = j\overline{I_1} + (1+j2)\cdot\overline{I_2} \end{cases} \Rightarrow \quad -j\overline{I_1} = (1+j2)\cdot\overline{I_2} \quad \Rightarrow \quad \overline{I_1} = (-2+j1)\cdot\overline{I_2}$$

La prima equazione diviene:

$$20 = (1+j2)\cdot(-2+j1)\cdot\overline{I_2} + j\overline{I_2} \quad \Rightarrow \quad 20 = (-2+j1-j4-2+j)\cdot\overline{I_2} = (-4-j2)\cdot\overline{I_2}$$

Allora:

$$\overline{I_2} = \frac{20}{-2\cdot(2+j)} = \frac{-10\cdot(2-j)}{4+1} = -2\cdot(2-j) = -4+j2$$

$$\overline{I_1} = (-2+j1)\cdot(-4+j2) = 8-j4-j4-2 = 6-j8$$

quindi:

$$\overline{I_1} = 6-j8 = 10\angle-53°$$

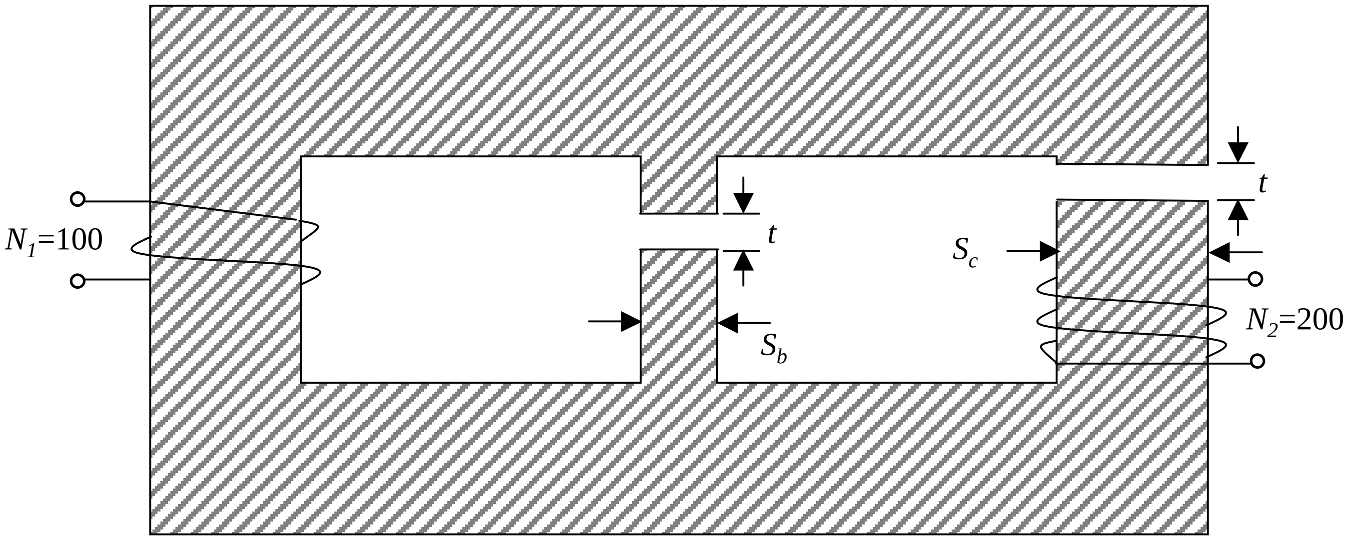
$$\overline{I_2} = -4+j2 = 2\sqrt{5}\angle-26{,}56°$$

e nel dominio del tempo (moltiplicando per $\sqrt{2}$)

$$i_1(t) = 10\sqrt{2}\cos(3t-53°)$$

$$i_1(t) = 2\sqrt{10}\cos(3t-26{,}56°)$$

ESERCIZIO 3



$S_c = 200\ \text{cm}^2$

$S_b = 100\ \text{cm}^2$

$t = 1\ \text{mm}$

Determinare i coefficienti di auto e mutua induzione, di accoppiamento e di dispersione relativi alle due bobine di figura, nelle ipotesi semplificative che sia trascurabile la riluttanza dei tratti in ferro del circuito magnetico e che le linee di flusso attraversino l'aria solo in corrispondenza ai due traferri, nei quali è trascurabile l'effetto dei bordi.

Risoluzione

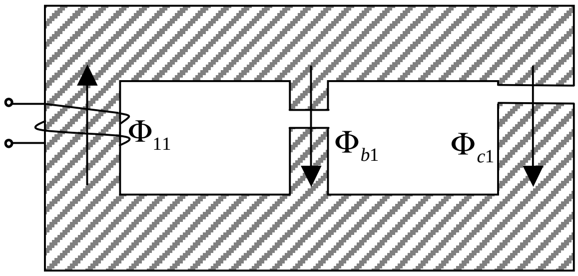
Calcoliamo le riluttanze ai traferri:

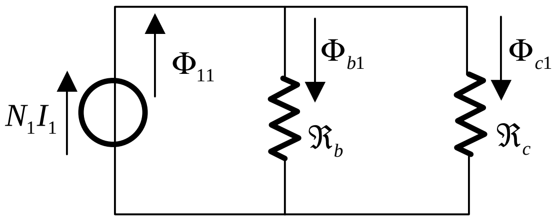
$$\Re_b = \frac{t}{\mu_0 \cdot S_b} = \frac{10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^4\ \text{H}^{-1}$$

$$\Re_c = \frac{t}{\mu_0 \cdot S_c} = \frac{10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot 200 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^4\ \text{H}^{-1}$$

Per determinare il coefficiente di autoinduzione della bobina 1 supponiamo che questa sia percorsa da una corrente I_1 e che la bobina 2 non sia percorsa da corrente. Nella colonna S_b sarà presente un flusso $\Phi_{b1} = \dfrac{N_1 I_1}{\Re_b}$ e nella colonna S_c un flusso $\Phi_{c1} = \dfrac{N_1 I_1}{\Re_c}$.

Disegnamo il circuito magnetico e il circuito elettrico equivalente di quello magnetico:





Nella colonna in cui è presente l'avvolgimento 1 circolerà il flusso:

$\Phi_{11} = \Phi_{b1} + \Phi_{c1}$ che dà luogo ad un flusso concatenato:

$$\Phi_{N1} = N_1 \cdot \Phi_{11} = N_1 \cdot (\Phi_{b1} + \Phi_{c1}) = N_1^2 \cdot I_1 \cdot \left(\frac{1}{\Re_b} + \frac{1}{\Re_c} \right)$$

Allora il coefficiente di autoinduzione della bobina 1 è:

$$L_1 = \frac{\Phi_{N1}}{I_1} = N_1^2 \cdot \left(\frac{\Re_b + \Re_c}{\Re_b \cdot \Re_c} \right) = 10000 \cdot \frac{12 \cdot 10^4}{32 \cdot 10^8} = 0.375\ \mathrm{H}$$

Con la bobina 2 si concatena il flusso dovuto alla corrente I_1:

$$\Phi_{N21} = N_2 \cdot \Phi_{c1} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot I_1}{\Re_c}$$

Il coefficiente di mutua è negativo in quanto il flusso ha verso opposto rispetto a quello di un eventuale flusso concatenato con la stessa bobina ma prodotto da una corrente positiva che circola in essa.

$$M_{21} = \frac{\Phi_{N21}}{I_1} = -\frac{N_1 \cdot N_2}{\Re_c} = -\frac{100 \cdot 200}{4 \cdot 10^4} = -0.5\ \mathrm{H}$$

Calcoliamo ora il coefficiente di dispersione del primo avvolgimento.

Esso è il rapporto tra il flusso di dispersione primario e flusso concatenato primario:

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_{11} - \Phi_{21}}{\Phi_{11}}$$

dove:

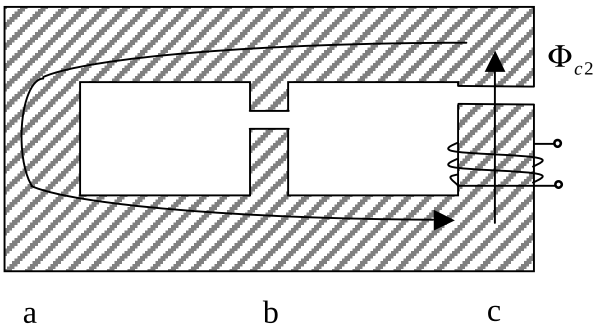
$$\Phi_{11} = \frac{L_1 \cdot I_1}{N_1}$$

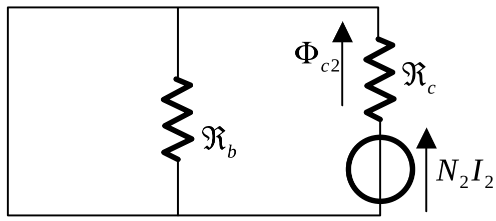
$$\Phi_{21} = \frac{|M| \cdot I_1}{N_2}$$

Allora :

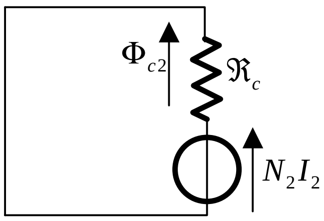
$$\sigma_1 = 1 - \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = 1 - \frac{|M| \cdot I_1}{L_1 \cdot I_1} \cdot \frac{N_1}{N_2} = 1 - \frac{|M|}{L_1} \cdot \frac{N_1}{N_2} = 1 - \frac{0.5 \cdot 100}{0.375 \cdot 200} = 0.333$$

Supponiamo ora di far circolare una corrente I_2 nel secondo avvolgimento.
Abbiamo la seguente situazione per quanto riguarda il circuito magneticoe il circuito elettrico equivalente di quello magnetico :





Da cui il seguente circuito elettrico:



Ossia tutto il flusso Φ_{c2} si incanala nella colonna a, che ha riluttanza nulla.

Avremo che :

$$\Phi_{c2} = \frac{N_2 I_2}{\Re_c}$$

$$\Phi_{N2} = N_2 \Phi_{22} = \frac{N_2^2 I_2}{\Re_c}$$

e il coefficiente di autoinduzione del secondo avvolgimento sarà :

$$L_2 = \frac{\Phi_{N2}}{I_2} = \frac{N_2^2}{\Re_c} = \frac{40000}{4 \cdot 10^4} = 1\,\mathrm{H}$$

Il coefficiente di mutua, tenendo conto che con la bobina 1 si concatena il flusso dovuto alla corrente I_2 :

$$\Phi_{N12} = N_1 \Phi_{c2} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot I_2}{\Re_c}$$

sarà

$$M_{12} = \frac{\Phi_{N12}}{I_2} = -\frac{N_1 \cdot N_2}{\Re_c} = -\frac{10^2 \cdot 2 \cdot 10^2}{4 \cdot 10^4} = -0.5 \text{ H} = M_{21}$$

negativo per lo stesso motivo visto per M_{21}.

Il coefficiente di dispersione del secondo avvolgimento è il rapporto tra flusso di dispersione secondario e flusso concatenato secondario ossia :

$$\sigma_2 = \frac{\Phi_{22} - \Phi_{12}}{\Phi_{22}}$$

con

$$\Phi_{22} = \frac{L_2 \cdot I_2}{N_2}$$

$$\Phi_{12} = \frac{|M| \cdot I_2}{N_1}$$

quindi

$$\sigma_2 = 1 - \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = 1 - \frac{|M| \cdot I_2}{L_2 \cdot I_2} \cdot \frac{N_2}{N_1} = 1 - \frac{|M|}{L_2} \cdot \frac{N_2}{N_1} = 1 - \frac{0.5}{1} \cdot \frac{200}{100} = 0$$

ossia non c'è flusso disperso.

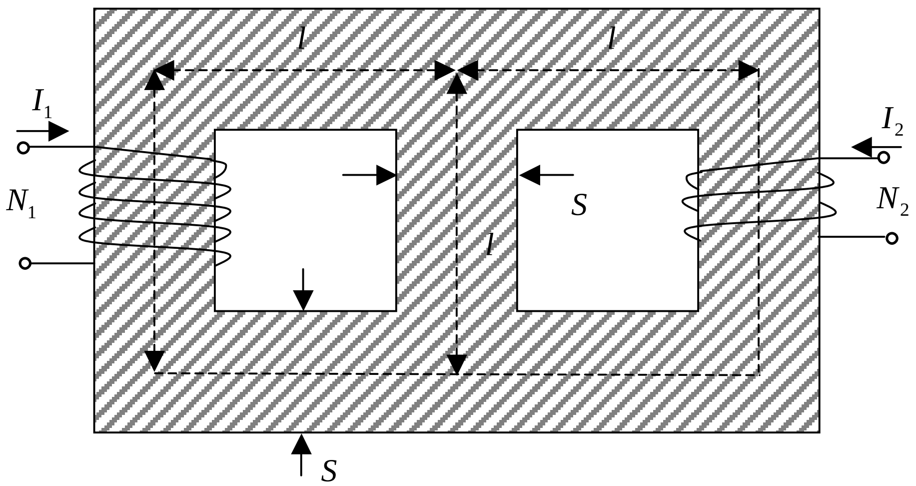
Il coefficiente di accoppiamento è :

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{0.5}{\sqrt{0.375 \cdot 1}} = 0.815$$

ESERCIZIO 4

Determinare il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti del circuito magnetico di figura, per il quale si hanno le seguenti caratteristiche: l=1 m, S=500 cm^2, μ_r=2000.

(Si consideri il circuito come un tubo di flusso e si ritenga di lavorare nel tratto lineare della caratteristica di magnetizzazione).



$N_1 = 1000$

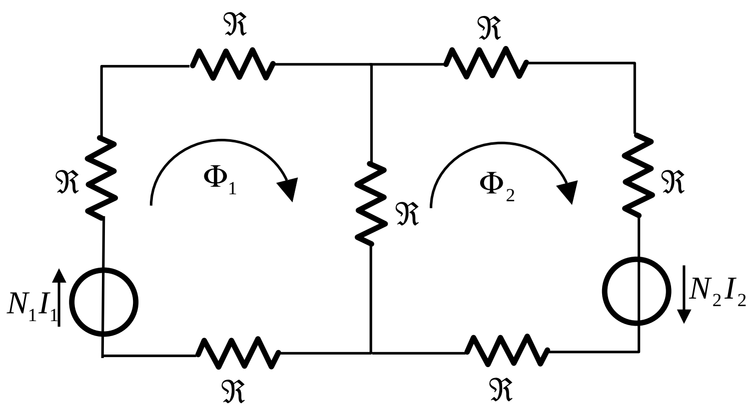
$N_2 = 200$

Risoluzione

La riluttanza del generico tronco è :

$$\Re = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2000} \cdot \frac{1}{500 \cdot 10^{-4}} = 7.96 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

Il circuito equivalente di quello magnetico è :



E si hanno le seguenti equazioni alle maglie :

$$\begin{cases} N_1 I_1 = 4\Re\Phi_1 - \Re\Phi_2 \\ N_2 I_2 = -\Re\Phi_1 + 4\Re\Phi_2 \end{cases}$$

Ricaviamo ad esempio Φ_2 moltiplicando per 4 la seconda equazione del sistema.

Abbiamo :

$$\begin{cases} N_1 I_1 = 4\Re\Phi_1 - \Re\Phi_2 \\ 4N_2 I_2 = -4\Re\Phi_1 + 16\Re\Phi_2 \end{cases}$$

e la somma è :

$$N_1 I_1 + 4N_2 I_2 = 15\Re\Phi_2$$

da cui si ricava Φ_2

$$\Phi_2 = \frac{N_1}{15\Re} \cdot I_1 + \frac{4N_2}{15\Re} \cdot I_2$$

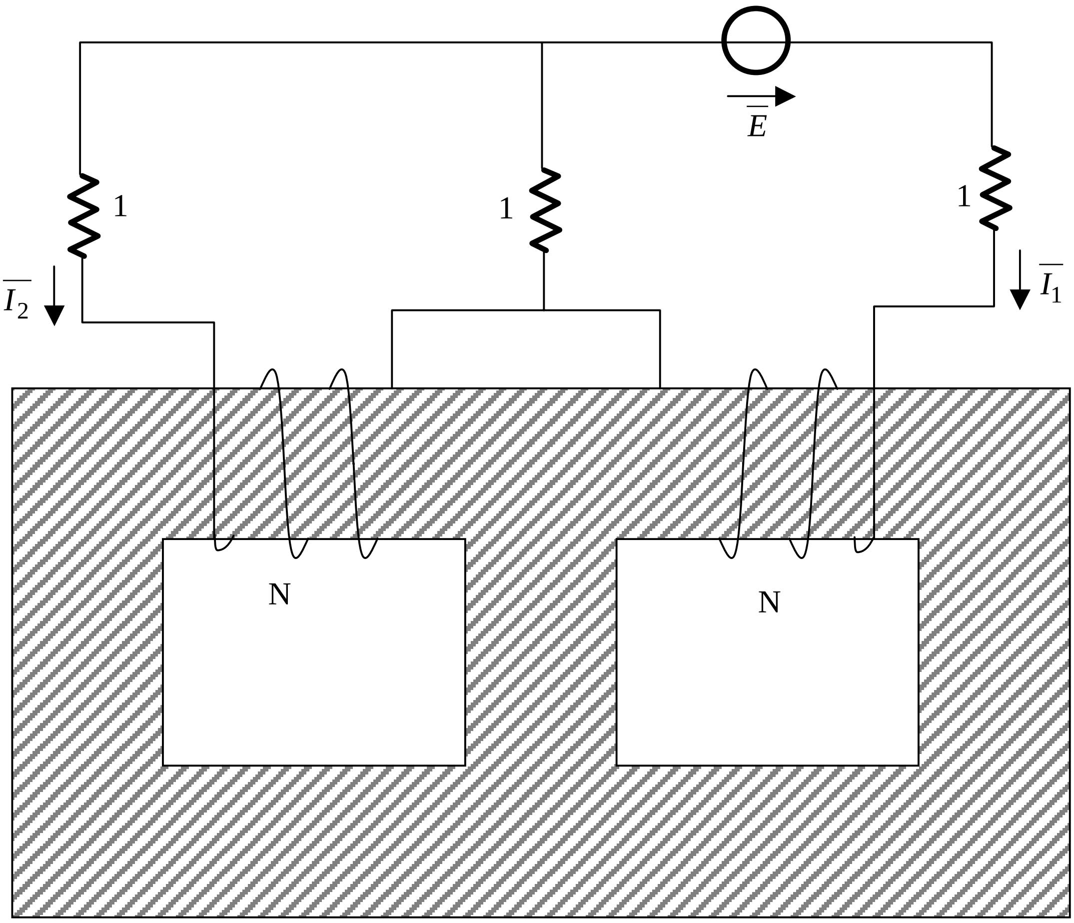
siccome è anche (per il flusso concatenato all'avvolgimento 2) :

$$\Phi_{c2} = N_2\Phi_2 = MI_1 + LI_2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2 = \frac{M}{N_2} \cdot I_1 + \frac{L}{N_2} \cdot I_2$$

E' richiesto M quindi dal confronto tra le due equazioni di Φ_2 si ha :

$$\frac{M}{N_2} = \frac{N_1}{15\Re} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{N_1 N_2}{15\Re} = \frac{1000 \cdot 200}{15 \cdot 7.96 \cdot 10^3} = 1.67 \text{ H}$$

ESERCIZIO 5



I rami del circuito magnetico hanno tutti lo stesso valore di riluttanza $\Re_0$ (si trascurano i flussi dispersi).

La f.e.m. del generatore di tensione è sinusoidale di pulsazione ω:

$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

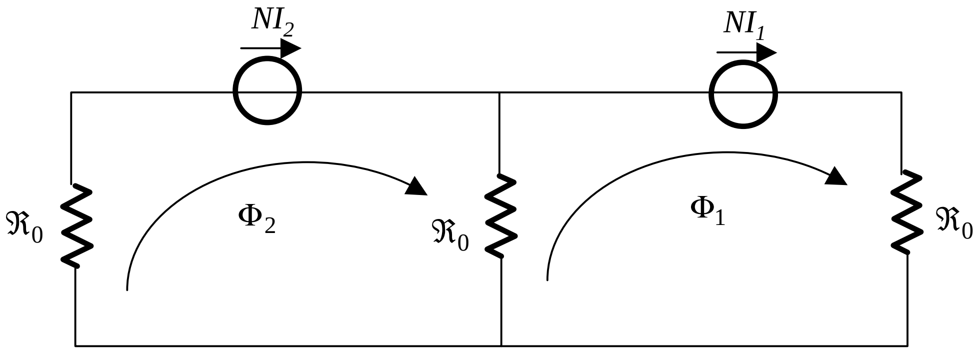
ed il circuito elettrico è a regime.

Si calcoli il valore della potenza attiva P assorbita dalla rete.

(Si sa che $\frac{N^2\omega}{\Re_0} = 1$)

Risoluzione

Per calcolare i coefficienti di auto e mutua induzione delle due bobine si deve risolvere il seguente circuito magnetico:



$$\begin{cases} NI_1 = 2\cdot\Re_0\cdot\Phi_1 - \Re_0\cdot\Phi_2 \\ NI_2 = -\Re_0\cdot\Phi_1 + 2\cdot\Re_0\cdot\Phi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{NI_1 + \Re_0\cdot\Phi_2}{2\cdot\Re_0} \\ NI_2 = -\Re_0\cdot\dfrac{NI_1+\Re_0\cdot\Phi_2}{2\cdot\Re_0} + 2\cdot\Re_0\cdot\Phi_2 \end{cases}$$

dalla seconda equazione del sistema si ottiene:

$$NI_2 = -\frac{NI_1}{2} - \frac{\Re_0\cdot\Phi_2}{2} + 2\cdot\Re_0\cdot\Phi_2 \quad\Rightarrow\quad NI_2 + \frac{NI_1}{2} = \frac{3}{2}\cdot\Re_0\cdot\Phi_2$$

e quindi

$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{2\cdot N}{3\cdot\Re_0}\cdot I_1 + \dfrac{N}{3\cdot\Re_0}\cdot I_2 \\ \Phi_2 = \dfrac{2\cdot N}{3\cdot\Re_0}\cdot I_2 + \dfrac{N}{3\cdot\Re_0}\cdot I_1 \end{cases} \qquad (1)$$

Siccome è:

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = N\cdot\Phi_1 = L_1\cdot I_1 + M\cdot I_2 \\ \Phi_{c2} = N\cdot\Phi_2 = L_2\cdot I_2 + M\cdot I_1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{L_1}{N}\cdot I_1 + \dfrac{M}{N}\cdot I_2 \\ \Phi_2 = \dfrac{L_2}{N}\cdot I_2 + \dfrac{M}{N}\cdot I_1 \end{cases} \qquad (2)$$

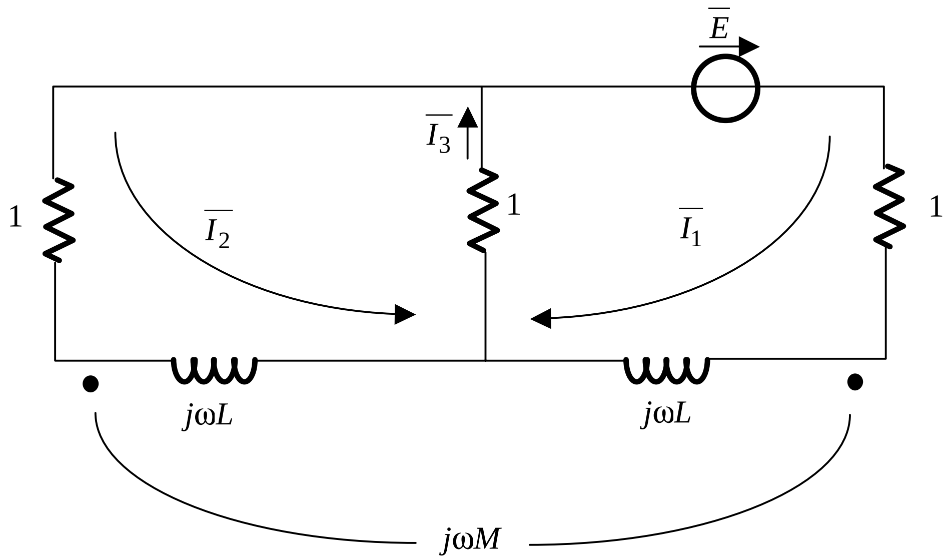
dal confronto di (1) e (2):

$$L_1 = \frac{2 \cdot N^2}{3 \cdot \Re_0} = \frac{2}{3 \cdot \omega} = L$$

$$L_2 = \frac{2 \cdot N^2}{3 \cdot \Re_0} = \frac{2}{3 \cdot \omega} = L$$

$$M = \frac{2 \cdot N^2}{3 \cdot \Re_0} = \frac{1}{3 \cdot \omega}$$

Il circuito elettrico è il seguente :



Siamo in regime sinusoidale permanente, quindi adottiamo il metodo simbolico.

Per comodità consideriamo i valori efficaci delle grandezze.

Abbiamo che :

$$\overline{E} = j10$$

$$j\omega L = j\omega \frac{2}{3 \cdot \omega} = j\frac{2}{3}$$

$$j\omega M = j\omega \frac{1}{3 \cdot \omega} = j\frac{1}{3}$$

Applicando la ldk alle due maglie :

$$\begin{cases} \overline{E} = (2 + j\omega L) \cdot \overline{I_1} + (1 + j\omega M) \cdot \overline{I_2} \\ 0 = (1 + j\omega M) \cdot \overline{I_1} + (2 + j\omega L) \cdot \overline{I_2} \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici :

$$\begin{cases} j10 = \left(2 + j\frac{2}{3}\right) \cdot \overline{I_1} + \left(1 + j\frac{1}{3}\right) \cdot \overline{I_2} \\ 0 = \left(1 + j\frac{1}{3}\right) \cdot \overline{I_1} + \left(2 + j\frac{2}{3}\right) \cdot \overline{I_2} \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli:

$$\overline{I_1} = 2 \cdot (1 + j3) = 2 + j6$$

$$\overline{I_2} = -(1 + j3)$$

La potenza apparente assorbita dalla rete è:

$$\dot{S} = \overline{E} \cdot \overline{I_1}^* = j10 \cdot (2 - j6) = 60 + j20$$

quindi la potenza attiva assorbita dalla rete è:

$$\mathrm{P} = \mathrm{Re}\{\dot{S}\} = 60 \text{ W}$$

Per verifica calcoliamo la potenza attiva dissipata dalle resistenze:

$$\left|\overline{I_1}\right| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$\left|\overline{I_2}\right| = \sqrt{10}$$

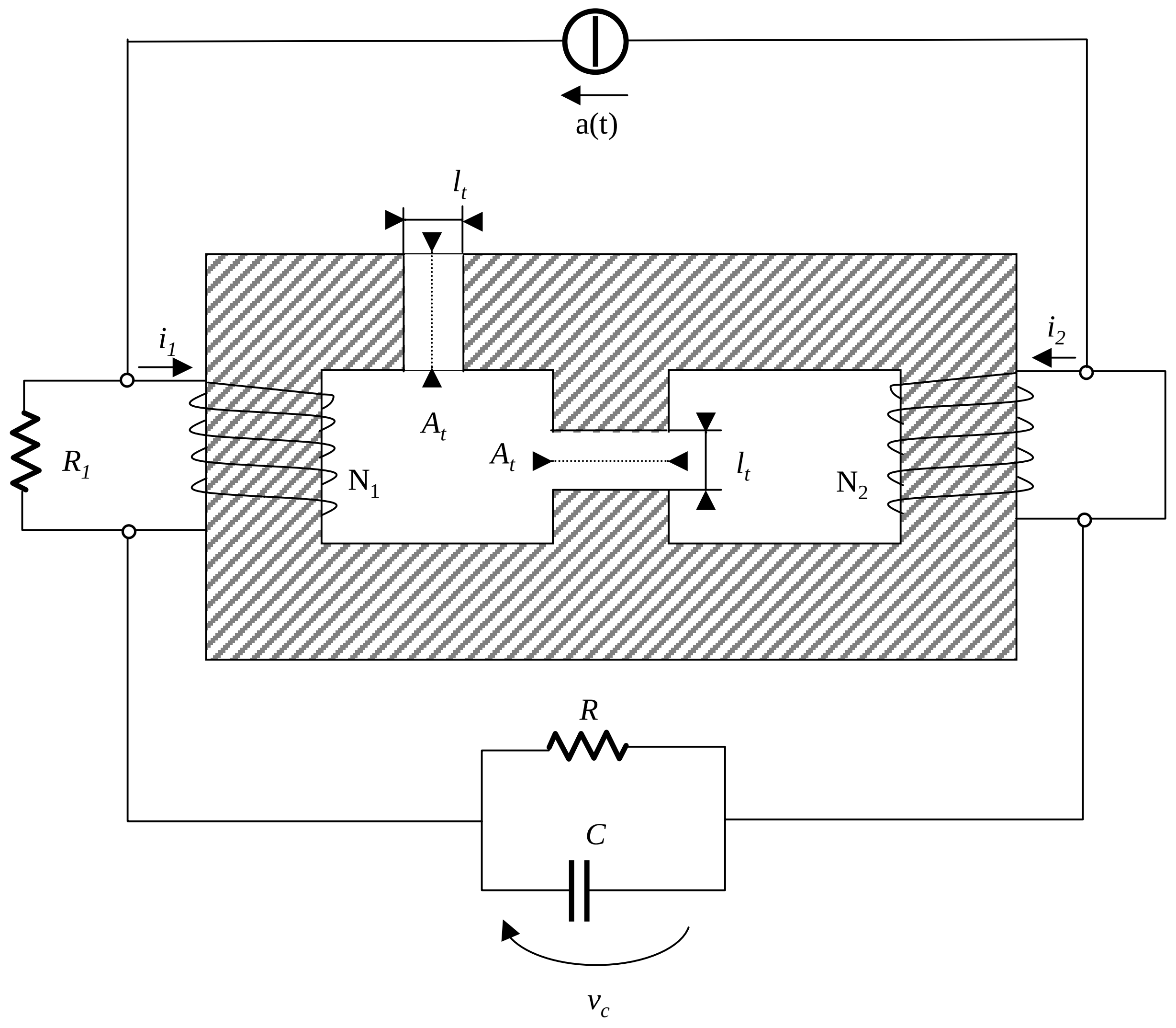
$$\overline{I_3} = \overline{I_1} + \overline{I_2} = 2 + j6 - 1 - j3 = 1 + j3$$

$$\left|\overline{I_3}\right| = \sqrt{10}$$

Allora la potenza attiva dissipata è:

$$\mathrm{P} = 40 + 10 + 10 = 60 \text{ W}$$

ESERCIZIO 6



$N_1 = 1000$

$N_2 = 500$

$l_t = 1\,\text{cm}$

$A_t = 0.25\,\text{cm}^2$

$f = 50\,\text{Hz}$

$R_1 = 0.5\,\Omega$

$R = 1\,\Omega$

$C = 3.1831\,\text{mF}$

$\text{a(t)} = \sqrt{2} \cdot 30 \cdot \cos \omega t$

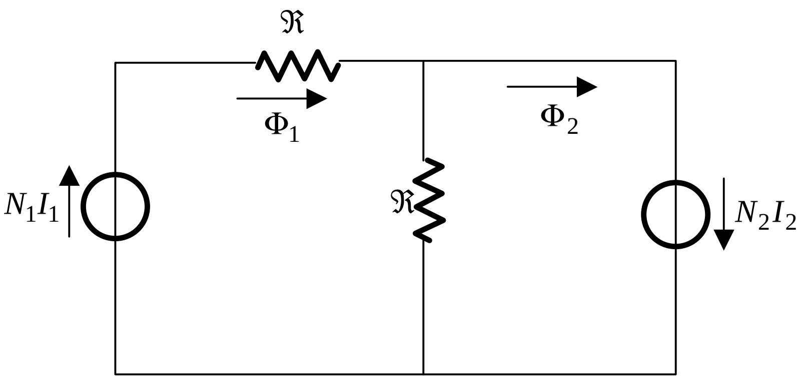
Del circuito magnetico si trascurino i flussi dispersi, si consideri infinita la permeabilità magnetica del ferro e sia $\Re$ la riluttanza dei traferri.

Il circuito elettrico è a regime.

Calcolare: $i_1(t), i_2(t), v_c(t)$.

Risoluzione

Il circuito elettrico equivalente di quello magnetico è:



$$\begin{cases} N_1 I_1 = \Re \cdot \Phi_1 + \Re \cdot (\Phi_1 - \Phi_2) \\ N_2 I_2 = \Re \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 I_1 = 2 \cdot \Re \cdot \Phi_1 - \Re \cdot \Phi_2 \\ N_2 I_2 = -\Re \cdot \Phi_1 + \Re \cdot \Phi_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 I_1 = 2 \cdot \Re \cdot \Phi_1 - N_2 I_2 - \Re \cdot \Phi_1 \\ \Phi_2 = \dfrac{N_2 I_2}{\Re} + \Phi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 I_1 + N_2 I_2 = \Re \cdot \Phi_1 \\ \Phi_2 = \dfrac{N_2 I_2}{\Re} + \Phi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{N_1}{\Re} \cdot I_1 + \dfrac{N_2}{\Re} \cdot I_2 \\ \Phi_2 = \dfrac{N_2 I_2}{\Re} + \dfrac{N_1}{\Re} \cdot I_1 + \dfrac{N_2}{\Re} \cdot I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{N_1}{\Re} \cdot I_1 + \dfrac{N_2}{\Re} \cdot I_2 \\ \Phi_2 = \dfrac{N_1}{\Re} \cdot I_1 + 2 \cdot \dfrac{N_2}{\Re} \cdot I_2 \end{cases}$$

I flussi concatenati agli avvolgimenti 1 e 2 sono:

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = N_1 \Phi_1 = \dfrac{N_1^2}{\Re} \cdot I_1 + \dfrac{N_1 N_2}{\Re} \cdot I_2 \\ \Phi_{c2} = N_2 \Phi_2 = \dfrac{N_1 N_2}{\Re} \cdot I_1 + 2 \cdot \dfrac{N_2^2}{\Re} \cdot I_2 \end{cases}$$

e anche:

$$\begin{cases} \Phi_{c1} = L_1 \cdot I_1 + M \cdot I_2 \\ \Phi_{c2} = M \cdot I_1 + L_2 \cdot I_2 \end{cases}$$

e dal confronto tra i due sistemi otteniamo :

$$\begin{cases} \omega L_1 = \omega \cdot \dfrac{N_1^2}{\Re} \\ \omega L_2 = 2 \cdot \omega \cdot \dfrac{N_2^2}{\Re} \\ \omega M = \omega \cdot \dfrac{N_1 N_2}{\Re} \end{cases}$$

Calcoliamo i valori delle varie grandezze :

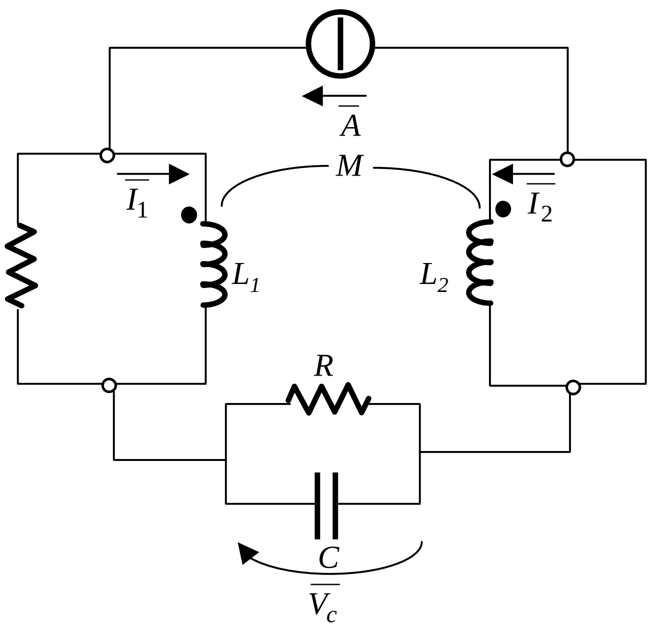
$$\Re = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l_t}{A_t} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{0.01}{0.2583 \cdot 10^{-4}} = 314.16 \cdot 10^6$$

$$\omega L_1 = \frac{2\pi f \cdot 10^6}{314.16 \cdot 10^6} = 1\,\Omega$$

$$\omega L_2 = \frac{2 \cdot 2\pi f \cdot 500^2}{314.16 \cdot 10^6} = 0.5\,\Omega$$

$$\omega M = \frac{2\pi f \cdot 1000 \cdot 500}{314.16 \cdot 10^6} = 0.5\,\Omega$$

Passiamo al circuito elettrico:



Per la maglia relativa al secondo avvolgimento possiamo scrivere:

$$j\omega L_2 \overline{I_2} + j\omega M \overline{I_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{I_2} = -\frac{\omega M}{\omega L_2} \cdot \overline{I_1} = -\overline{I_1}$$

Per la maglia relativa al primo avvolgimento possiamo scrivere:

$$R_1 \cdot \left(\overline{A} - \overline{I_1}\right) = j\omega L_1 \overline{I_1} + j\omega M \overline{I_2} \quad \Rightarrow \quad R_1 \overline{A} = \left(R_1 + j\omega L_1\right) \cdot \overline{I_1} - j\omega \frac{M^2}{L_2} \cdot \overline{I_1}$$

$$R_1 \overline{A} = \left(R_1 + j\omega L_1 - j\omega \frac{M^2}{L_2}\right) \cdot \overline{I_1}$$

$$R_1 \overline{A} = \left(R_1 + j1 - j0.5\right) \cdot \overline{I_1}$$

$$\overline{I_1} = \frac{R_1 \overline{A}}{R_1 + j0.5} = \frac{0.5 \cdot 30}{0.5 + j0.5} = \frac{15}{0.5} \cdot \left(0.5 - j0.5\right) = 30 \cdot \left(0.5 - j0.5\right) = 15 - j15 = 15\sqrt{2} \angle -\frac{\pi}{4}$$

$$\overline{I_2} = -\overline{I_1} = -15\sqrt{2} \angle -\frac{\pi}{4} = 15\sqrt{2} \angle -\frac{5}{4}\pi = 15\sqrt{2} \angle \frac{3}{4}\pi$$

e nel dominio del tempo:

$$i_1(t) = \operatorname{Re}\left\{15\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right\} = 30\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i_2(t) = \operatorname{Re}\left\{15\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} e^{j\frac{3}{4}\pi}\right\} = 30\cos\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right)$$

Per quanto riguarda v_c abbiamo:

$$\overline{A} = \frac{\overline{V_c}}{R} + j\omega C \overline{V_c} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) \cdot \overline{V_c}$$

$$\overline{V_c} = \frac{30}{1 + j2\pi 50 \cdot 3.1831 \cdot 10^{-3}} = \frac{30}{1 + j1} = 15 - j15 = 15\sqrt{2} \angle -\frac{\pi}{4}$$

$$v_c(t) = \operatorname{Re}\left\{15\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} e^{-j\frac{\pi}{4}}\right\} = 30\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$