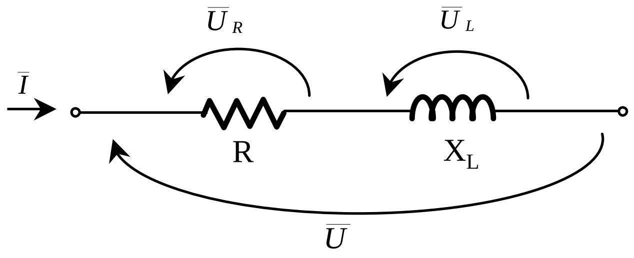
Esercitazione sull'Analisi nel Dominio della Frequenza

ESERCIZIO 1



$\overline{U} = 100$ V

$\overline{I} = 4 - j3$ A

Determinare R, X_L, $\overline{U}_R$, $\overline{U}_L$

Risoluzione

L'impedenza è data da:

$$\dot{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{100}{4 - j3} = \frac{100}{5e^{-j36.86}} = 20e^{j36.86} = 16 + j12$$

essendo:

per $4 - j3$ il modulo pari a: $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ e la fase $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = -36.86°$

per $20e^{j36.86}$ la parte reale pari a $20 \cdot \cos(36.86°) = 16$ e la parte immaginaria pari a $20 \cdot \operatorname{sen}(36.86°) = 12$

Oppure $\dot{Z}$ può essere determinata anche così:

$$\dot{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{100}{4 - j3} = \frac{100(4 + j3)}{25} = 4 \cdot (4 + j3) = 16 + j12.$$

Ad ogni modo si ha:

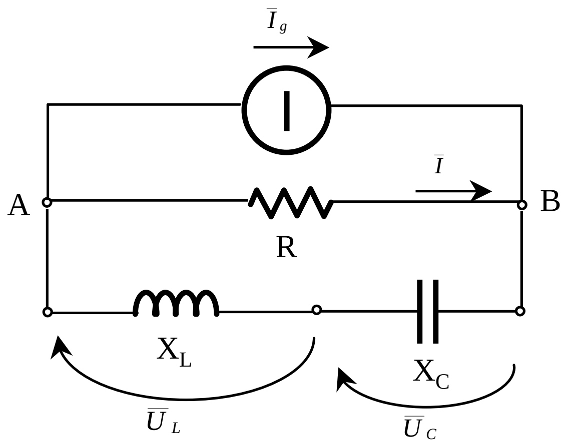
$R = 16$

$X_L = 12$

$\overline{U}_R = R \cdot \overline{I} = 16 \cdot (4 - j3) = 64 - j48$

$\overline{U}_L = jX_L \cdot \overline{I} = j12 \cdot (4 - j3) = 36 + j48$

ESERCIZIO 2



$\bar{I}_g = 1\,\mathrm{A}$
$R = 500\Omega$
$L = 1\mathrm{H}$
$C = 1\mathrm{F}$
$\omega = 1\,\mathrm{krad/s}$

Determinare $\bar{I}, \bar{U}_L, \bar{U}_C$.

Risoluzione

Indichiamo con:

$\dot{Z} = j\omega L - \frac{j}{\omega C} = j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ l'impedenza somma di X_L e X_C

$$\dot{Y} = \frac{1}{j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = -\frac{j}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Per il partitore di corrente si ha:

$$\bar{I} = \bar{I}_g \cdot \frac{1/R}{1/R + \dot{Y}} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{500}}{\frac{1}{500} - \frac{j}{1000 \cdot 1 - \frac{1}{1000 \cdot 1}}} = \frac{\frac{1}{500}}{\frac{1}{500} - \frac{j}{999.999}} = \frac{999.999}{999.999 - j500} =$$

$$= \frac{999.999}{1118.033 \cdot e^{-j26.565}} = 0.89 \cdot e^{j26.565}$$

oppure

$$\bar{I} = \bar{I}_g \cdot \frac{\dot{Z}}{R + \dot{Z}} = \bar{I}_g \cdot \frac{j\omega L - \frac{j}{\omega C}}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = 1 \cdot \frac{j \cdot 1000 \cdot 1 - \frac{j}{1000 \cdot 1}}{500 + j \cdot 1000 \cdot 1 - \frac{j}{1000 \cdot 1}} = \frac{j999.999}{500 + j999.999} =$$

$$= \frac{999.999 \cdot e^{j90}}{1118.033 e^{j63.435}} = 0.89 \cdot e^{j26.565}$$

$\overline{U}_{AB} = R \cdot \overline{I} = 445 \cdot e^{j26.565}$

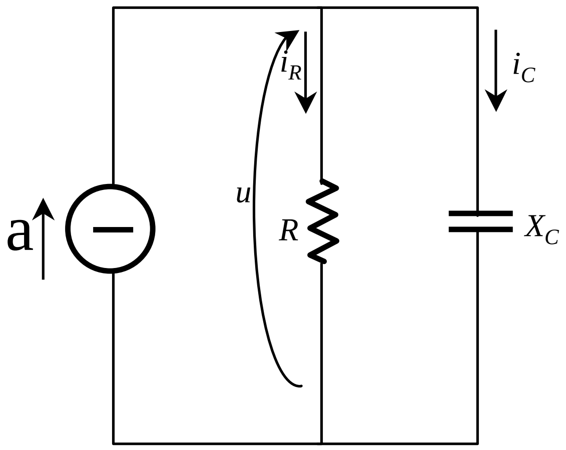
Per quanto riguarda $\overline{U}_L$ e $\overline{U}_C$, per il partitore di tensione si ha:

$$\overline{U}_L = \overline{U}_{AB} \cdot \frac{\dot{Z}_L}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_C} = \overline{U}_{AB} \cdot \frac{j\omega L}{j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = 445 \cdot e^{j26.565} \cdot \frac{j1000}{j1000 - \frac{j}{1000}} = \frac{445 \cdot e^{j26.565} \cdot 1000 \cdot e^{j90}}{999.999 \cdot e^{j90}} \cong$$

$$\cong 445 \cdot e^{j26.565}$$

$$\overline{U}_C = \overline{U}_{AB} \cdot \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_C} = \overline{U}_{AB} \cdot \frac{-\frac{j}{\omega C}}{j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = 445 \cdot e^{j26.565} \cdot \frac{-j0.001}{999.999 \cdot e^{j90}} \cong 445 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-j26.565}$$

ESERCIZIO 3



Circuito a regime

$a = 0.2 \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

$R = 1\text{k}\Omega$

$C = 10\mu\,\text{F}$

$\omega = 100\ \text{rad/s}$

$$\begin{cases} u(t) & ? \\ i_R(t) & ? \\ i_C(t) & ? \end{cases}$$

Risoluzione

Esprimiamo la corrente a in termini fasoriali:

$\overline{\text{A}} = 0.2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

Inoltre abbiamo le ammettenze:

$\dot{Y}_R = \dfrac{1}{R} = 1\ \text{mS}$

$\dot{Y}_C = \omega C = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 1\ \text{mS}$

Per il partitore di corrente:

$$\overline{I}_R = \overline{\text{A}} \cdot \frac{\dot{Y}_R}{\dot{Y}} = 0.2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{10^{-3}}{(1+j1) \cdot 10^{-3}} = \frac{0.2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}{1.414 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}} = 0.141$$

$$\overline{I}_C = \overline{\text{A}} \cdot \frac{\dot{Y}_C}{\dot{Y}} = 0.2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{j1}{1.414 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}} = 0.141 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$\overline{U}_R = R \cdot \overline{I}_R = 141$

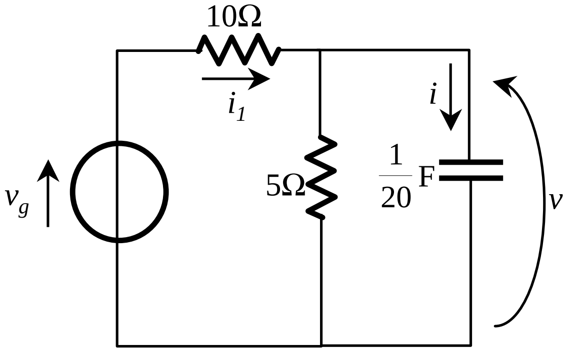
$u(t) = \text{Re}\left\{\overline{U}_R e^{j\omega t}\right\} = 141 \cos 100t$

$i_R(t) = \text{Re}\left\{\overline{I}_R e^{j\omega t}\right\} = 0.141 \cos 100t$

$i_C(t) = \text{Re}\left\{\overline{I}_C e^{j\omega t}\right\} = 0.141 \cos\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)$

ESERCIZIO 4

A partire dalla relazione i / o trovare la risposta forzata v se $v_g = 10 \cdot e^{j8t}$ V e, utilizzando il risultato precedente, trovare la risposta forzata v se $v_g = 10\cos 8t$ V e se $v_g = 10\,\mathrm{sen}\,8t$.



Risoluzione

Possiamo scrivere due equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{v}{5} + \dfrac{1}{20} \cdot \dfrac{dv}{dt} = i_1 & (1) \\ \\ v_g = 10 i_1 + v & (2) \end{cases}$$

La (1) per le correnti e la (2) per le tensioni.

Da queste possiamo ricavare la relazione i / o:

infatti, sostituendo nella (2) il valore di i_1 che si ottiene dalla (1), si ha:

$$v_g = 10 \cdot \left(\frac{v}{5} + \frac{1}{20} \cdot \frac{dv}{dt} \right) + v$$

e quindi

$$v_g = 0.5 \cdot \frac{dv}{dt} + 3v \qquad \text{relazione i / o}$$

In termini fasoriali si ha:

$$\overline{V}_g = 0.5 \cdot j\omega \overline{V} + 3 \cdot \overline{V}$$

$$\overline{V} = \frac{1}{0.5 \cdot j \cdot 8 + 3} \cdot \overline{V}_g = \frac{1}{3 + j4} \cdot \overline{V}_g$$

Se consideriamo l'ingresso $v_g(t) = 10e^{j8t}$ avremo che $\overline{V}_g = 10$ quindi:

$$\overline{V} = \frac{1}{3 + j4} \cdot 10 = \frac{(3 - j4) \cdot 10}{9 + 16} = 1.2 - j1.6 = 2e^{-j53.13}$$

perciò:

$$v(t) = 2 \cdot e^{j(\omega t - 53.13°)} \text{ (V)}$$

In particolare per $v_g = 10\cos 8t$ si ha:

$v(t) = 2 \cdot \cos(\omega t - 53.13°)$ (V)

Invece per $v_g = 10\,\mathrm{sen}\,8t = 10\cos(8t - 90°)$ si ha:

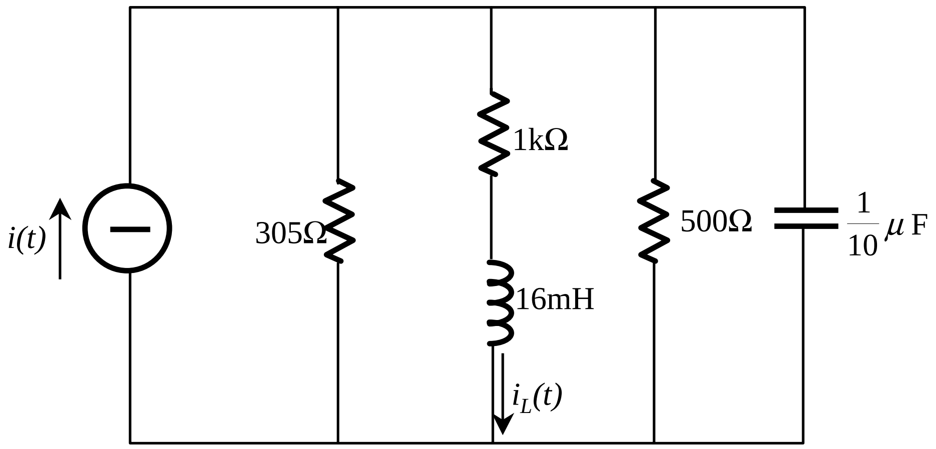
$\overline{V}_g = 10e^{-j90°} = -j10$

$$\overline{V} = \frac{1}{3 + j4} \cdot (-j10) = \frac{(3 - j4)\cdot(-j10)}{9 + 16} = \frac{-40 - j30}{25} = -1.6 - j1.2 = 2e^{-j143.13°}$$

$v(t) = 2 \cdot \cos(\omega t - 143.13°)$ (V)

ESERCIZIO 5

Trovare la corrente che attraversa il ramo RL nel circuito di figura. Il circuito è in regime sinusoidale.



$$i(t) = \text{sen}\left(\left(2\pi \cdot 10^{-4}\right)t + 45°\right)$$

Risoluzione

Calcolando l'ammettenza equivalente dei 4 rami in parallelo si ha:

$$\dot{Y}_T = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4$$

La tensione è

$$\overline{V} = \frac{\overline{I}}{\dot{Y}_T}$$

e quindi la corrente attraverso il ramo RL è:

$$\overline{I}_L = \overline{V} \cdot \dot{Y}_2$$

da cui applicando il partitore di corrente:

$$\overline{I}_L = \overline{I} \cdot \frac{\dot{Y}_2}{\dot{Y}_T}$$

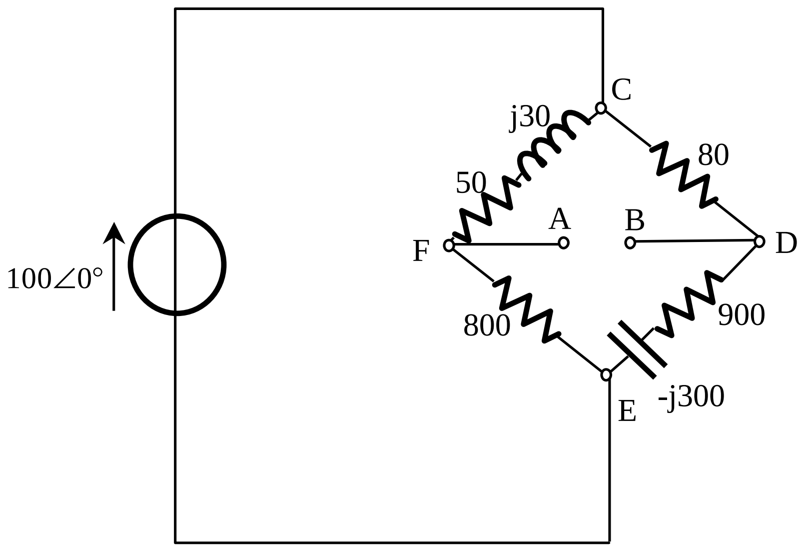
$$\overline{I}_L = 1 \cdot \angle -45° \cdot \frac{\dfrac{1}{1000 + j2\pi 10^4 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}}{\dfrac{1}{305} + \dfrac{1}{1000 + j2\pi 10^4 \cdot 16 \cdot 10^{-3}} + \dfrac{1}{500} + j2\pi 10^4 \cdot 10} =$$

$$= 1 \cdot \angle -45° \cdot (0.086\angle -90°) = 0.086\angle -135°$$

$$i_L(t) = 86\cos\left(\left(2\pi 10^4\right)t - 135°\right) \ \text{mA}$$

ESERCIZIO 6

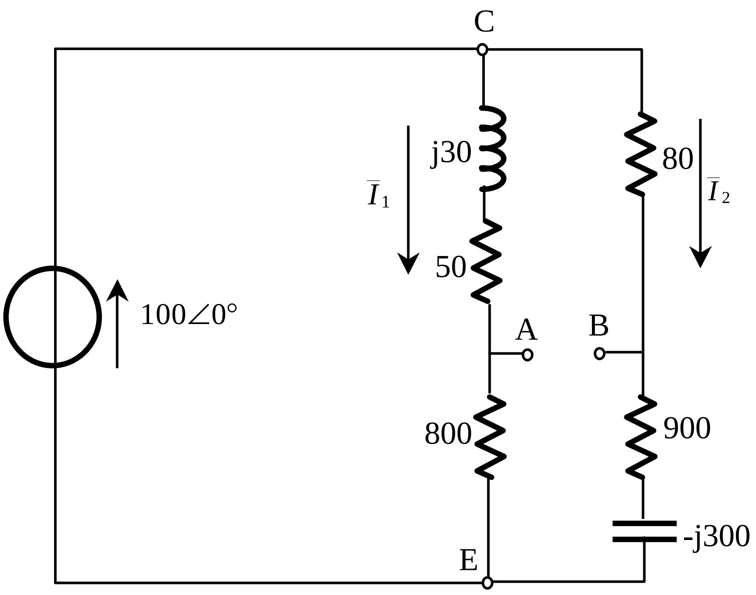
Determinare il bipolo equivalente attivo ai morsetti A-B, applicando il teorema di Thevenin.



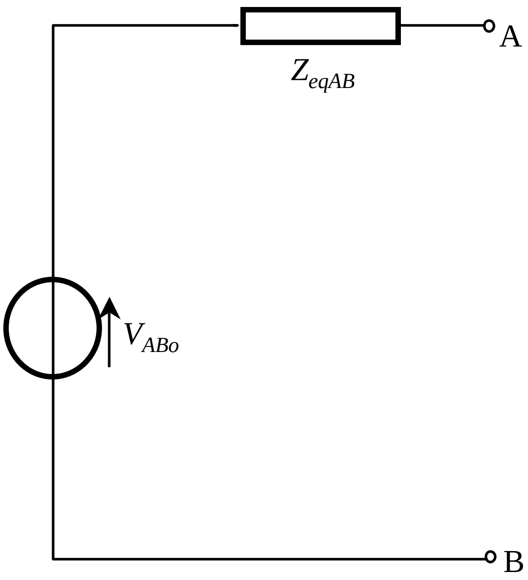
Calcolare inoltre la potenza attiva assorbita da un carico ohmico - induttivo $\dot{Z}_C = 40 + j20$, quando viene collegato ai morsetti A - B.

Risoluzione

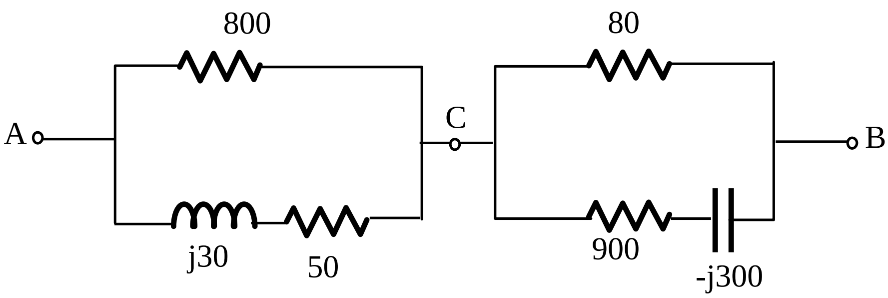
Ridisegnamo il circuito nel modo seguente:



Il circuito, visto dai morsetti A-B,può essere sostituito, per il teorema di Thevenin, dal collegamento in serie di un generatore di tensione V_{ABo} e di un'impedenza equivalente Z_{eqAB}.



Per determinare l'impedenza equivalente Z_{eqAB} passiviamo la rete ossia cortocircuitiamo il generatore di tensione. Otterremo la seguente configurazione:



Abbiamo che:

$$\dot{Z}_{eqAB} = \frac{800(50+j30)}{850+j30} + \frac{80(900-j300)}{980-j300} = \frac{800\cdot 58.31\angle 30.96°}{850.53\angle 2.02°} + \frac{80\cdot 948.68\angle -18.43°}{1024.89\angle -17.02°} =$$

$$54.85\angle 28.96° + 74.05\angle -1.41° = 47.99 + j26.56 + 74.03 - j1.82 = 122.02 + j24.74 = 124.50\angle 11.46°$$

Per quanto riguarda V_{AB_0} ripristiniamo il generatore di tensione con i morsetti A e B aperti.

Nel ramo CAE si ha la corrente $\bar{I}_1$:

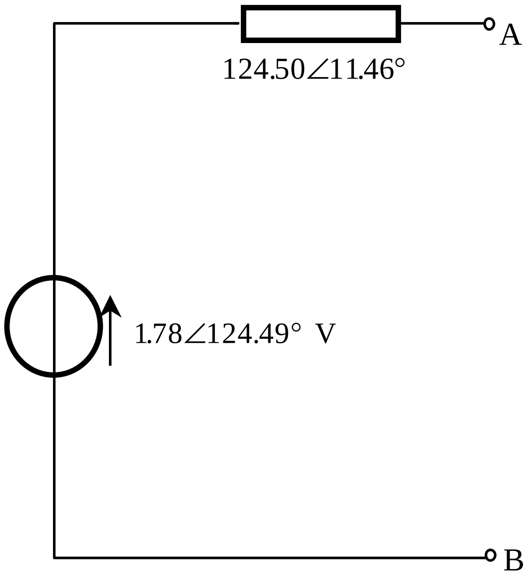
$$\bar{I}_1 = \frac{100\angle 0°}{850+j30} = \frac{100\angle 0°}{850.52\angle 2.02°} = 0.118\angle -2.02° \quad \text{A}$$

Nel ramo CBE si ha la corrente $\bar{I}_2$:

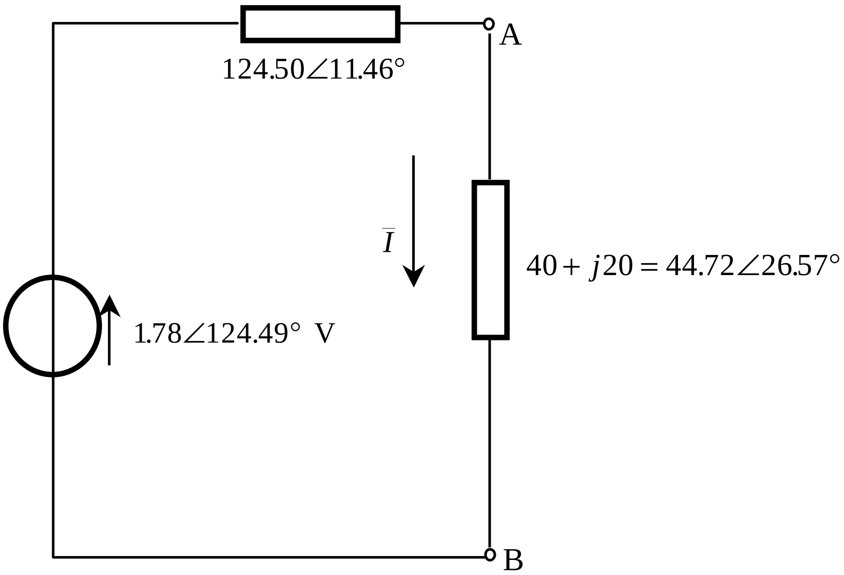
$$\bar{I}_2 = \frac{100\angle 0°}{980-j300} = \frac{100\angle 0°}{1024.89\angle -17.21°} = 0.038\angle 17.21° \quad \text{A}$$

$$\overline{V}_{AB_0} = \overline{V}_{AC_0} - \overline{V}_{BC_0} = -\left(50 + j30\right)\cdot 0.118\angle -2.02° + 80\cdot 0.098\angle 17.21° =$$
$$= 58.31\angle -149.04° \cdot 0.118\angle -2.02° + 7.84\angle 17.21° = 6.88\angle -151.06° + 7.84\angle 17.21° =$$
$$= -6.02 - j3.33 + 7.49 + j2.32 = 1.47 - j1.01 = 1.78\angle 124.49° \text{ V}$$

Il circuito equivalente di Thevenin è quindi:



Ora colleghiamo il carico $\dot{Z}_C = 40 + j20$ al circuito equivalente così ottenuto:



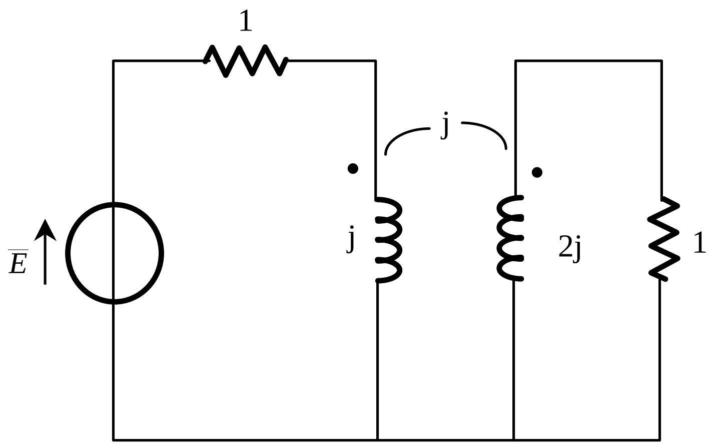
La corrente $\bar{I}$ che attraversa il carico è:

$$\bar{I} = \frac{1.78\angle 124.49°}{162.02 + j44.74} = \frac{1.78\angle 124.49°}{168.08\angle 15.44°} = 0.011\angle 109.05°$$

Allora la potenza attiva è:

$$P = R \cdot \left(I_{eff}\right)^2 = 40 \cdot \left(\frac{0.011}{\sqrt{2}}\right)^2 = 20 \cdot (0.011)^2 = 0.0024 \text{ W}$$

ESERCIZIO 7

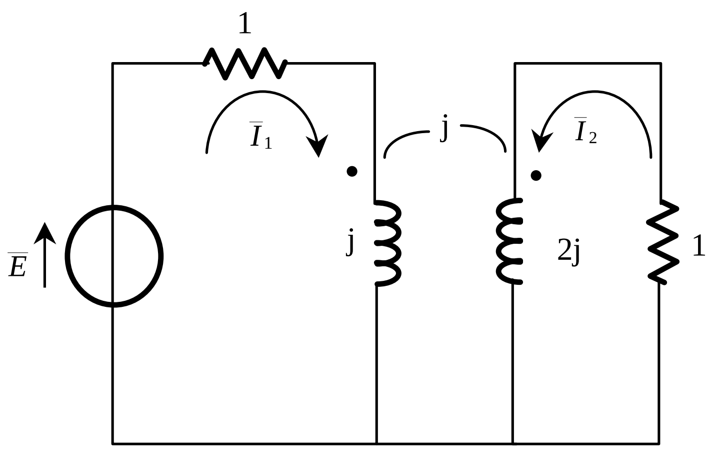


$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 30 \cdot \cos \omega t$$

Calcolare le correnti che circolano sulle maglie, a regime.

Risoluzione

Chiamiamo $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ tali correnti e orientiamole come in figura:



Per le tensioni possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} 30 = (1 + j1) \cdot \bar{I}_1 + j\bar{I}_2 \\ \\ 0 = j\bar{I}_1 + (1 + j2) \cdot \bar{I}_2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene che:

$$\bar{I}_2 = \frac{-j}{1 + j2} \cdot \bar{I}_1 = \frac{-j \cdot (1 - j2)}{5} \cdot \bar{I}_1 = \frac{-2 - j1}{5} \cdot \bar{I}_1$$

e sostituendo tale valore nella prima:

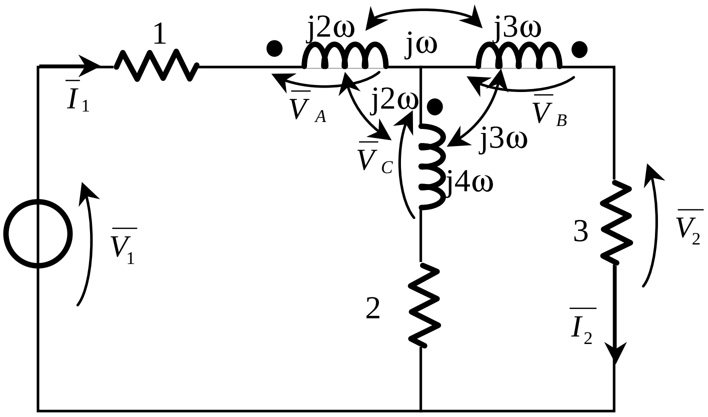
$$30 = \left(1 + j1 - j\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) \cdot \bar{I}_1 = \left(\frac{6}{5} + j\frac{3}{5}\right) \cdot \bar{I}_1$$

da cui:

$$\bar{I}_1 = \frac{30 \cdot 5}{6 + j3} = \frac{30 \cdot 5}{3 \cdot (2 + j)} = 10 \cdot (2 - j)$$

$$\bar{I}_2 = -2 \cdot (2 - j) \cdot (2 + j) = -2 \cdot (4 + 1) = -10$$

ESERCIZIO 8
(Luglio 94)



Ricavare, per il circuito in figura, la funzione di trasferimento:

$$\frac{\overline{V}_2}{\overline{V}_1}$$

Risoluzione

Per le mutue:

$$\begin{cases} \overline{V}_A = j2\omega\overline{I}_1 + j2\omega\left(\overline{I}_1 - \overline{I}_2\right) - j\omega\overline{I}_2 = j4\omega\overline{I}_1 - j3\omega\overline{I}_2 \\ \overline{V}_B = j3\omega\overline{I}_2 - j3\omega\left(\overline{I}_1 - \overline{I}_2\right) - j\omega\overline{I}_1 = -j4\omega\overline{I}_1 + j6\omega\overline{I}_2 \\ \overline{V}_C = j4\omega\left(\overline{I}_1 - \overline{I}_2\right) + j2\omega\overline{I}_1 - j3\omega\overline{I}_2 = j6\omega\overline{I}_1 - j7\omega\overline{I}_2 \end{cases}$$

Applicando Kirchoff alle maglie:

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = 1\cdot\overline{I}_1 + \overline{V}_A + \overline{V}_C + 2\cdot\left(\overline{I}_1 - \overline{I}_2\right) \\ 0 = 2\cdot\left(\overline{I}_2 - \overline{I}_1\right) - \overline{V}_C + \overline{V}_B + 3\overline{I}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

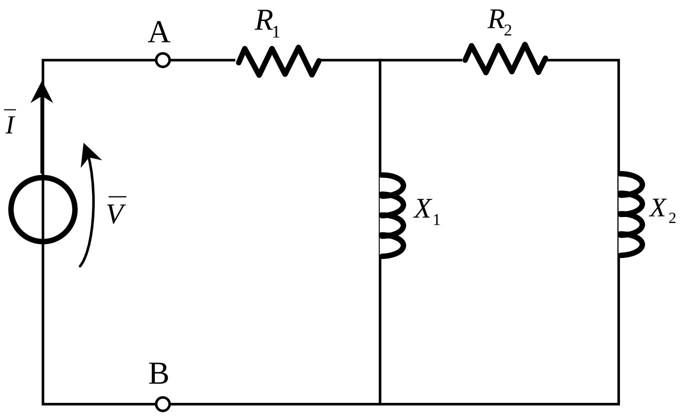
$$\begin{cases} \overline{V}_1 = \overline{I}_1 + j4\omega\overline{I}_1 - j3\omega\overline{I}_2 + j6\omega\overline{I}_1 - j7\omega\overline{I}_2 + 2\overline{I}_1 - 2\overline{I}_2 \\ 0 = 2\overline{I}_1 - 2\overline{I}_2 - j6\omega\overline{I}_1 + j7\omega\overline{I}_2 - j4\omega\overline{I}_1 - j6\omega\overline{I}_2 + 3\overline{I}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = (3 + j10\omega) \cdot \bar{I}_1 - (2 + j10\omega) \cdot \bar{I}_2 \\ 0 = -(2 + j10\omega) \cdot \bar{I}_1 + (5 + j13\omega) \cdot \bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\bar{V}_1 = (3 + j10\omega) \cdot \frac{(5 + j13\omega)}{(2 + j10\omega)} \cdot \bar{I}_2 + (5 + j13\omega) \cdot \bar{I}_2 = \frac{11 - 30\omega^2 + j49\omega}{2 + j10\omega} \cdot \bar{I}_2$$

$$\boxed{\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{3\bar{I}_2}{\bar{V}_1} = \frac{6 + j30\omega}{11 - 30\omega^2 + j49\omega}}$$

ESERCIZIO 9
(Settembre 95)



$\bar{V} = 80$ V

$R_1 = 20\ \Omega$

$R_2 = 50\ \Omega$

$X_1 = 100\ \Omega$

$X_2 = 50\ \Omega$

a) Calcolare in modulo e fase la corrente erogata dal generatore nel circuito in figura.

b) Determinare il valore della capacità da inserire tra i morsetti A e B affinché $\bar{I}$ sia in fase con $\bar{V}$

c) Determinare il valore dell'impedenza $\dot{z}$ da porre in serie a R_1 affinché $\bar{I}$ sia in fase con $\bar{V}$

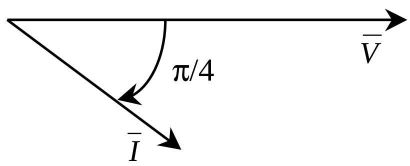
Risoluzione

a) Calcoliamo l'impedenza equivalente della rete vista dal generatore:

$$\dot{z}_{eq} = R_1 + \frac{(R_2 + jX_2)\cdot X_1}{R_2 + j(X_1 + X_2)} = 20 + \frac{(50 + j50)\cdot j100}{50 + j50} = 40\cdot(1 + j)$$

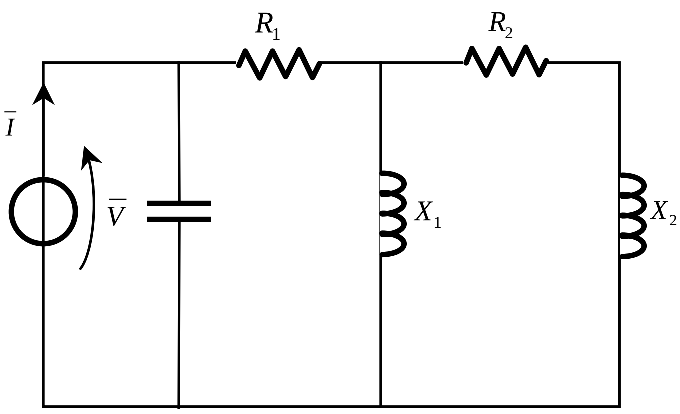
dopodiché possiamo calcolare la corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{z}_{eq}} = \frac{80}{40\cdot(1+j)} = \frac{80}{40\cdot 2}(1-j) = 1 - j = \sqrt{2}\angle(-\pi/4)$$



$$\boxed{\bar{I} = 1 - j = \sqrt{2}\angle(-\pi/4)}$$

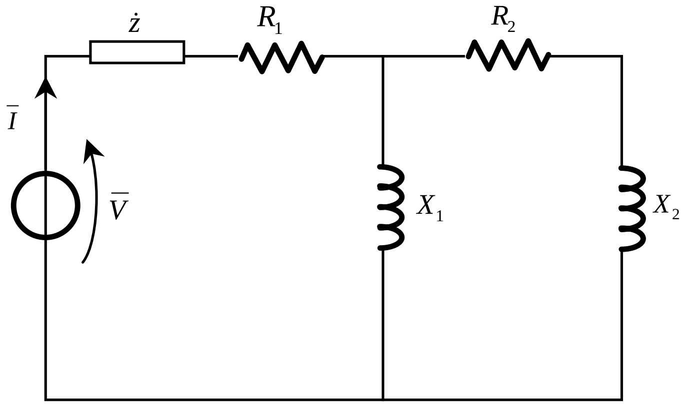
b) Per rifasare completamente il carico dobbiamo collegare in parallelo un condensatore con una capacità tale da assorbire una potenza reattiva opposta a quella del carico:



$$C = \frac{\operatorname{sen}\varphi_{eq}}{\omega\cdot|\dot{z}_{eq}|} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{40\cdot\sqrt{2}\omega} = \frac{1}{80\omega}$$

a 50 Hz:

$$\mathrm{C} = \frac{1}{80\cdot 2\pi\cdot 50} = 40\ \mu\mathrm{F}$$



c) Affinché la corrente sia in fase con la tensione, l'impedenza totale deve avere solo parte reale, cioé

$$X = -X_{eq} = -40$$

Per quanto riguarda la parte reale si può assumere qualsiasi valore, ma sarà conveniente scegliere un valore per cui è minima la dissipazione di energia, e questo si ottiene con un valore della resistenza nullo:

$$\boxed{\dot{z} = -j40}$$