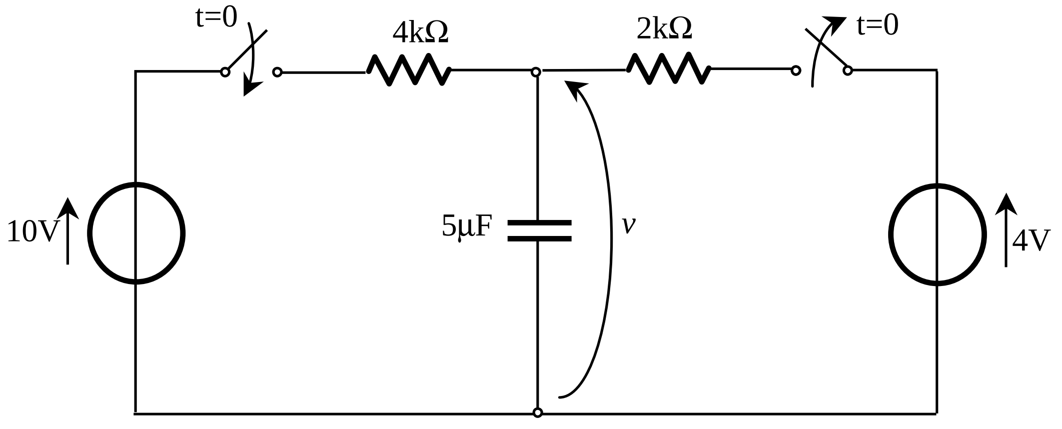
Esercitazione sull'Analisi nel dominio del Tempo

ESERCIZIO 1

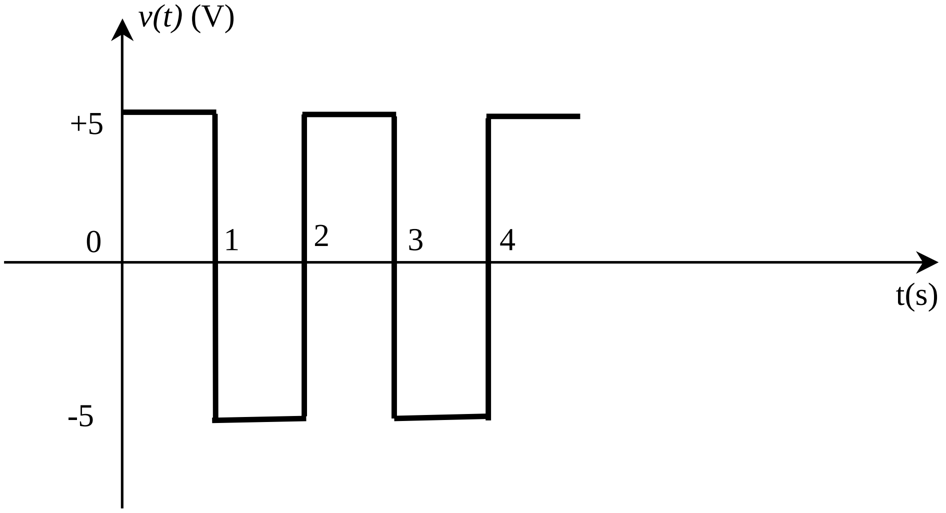
a)



Per t<0 il circuito è a regime. Trovare *v(t)* per t>0.

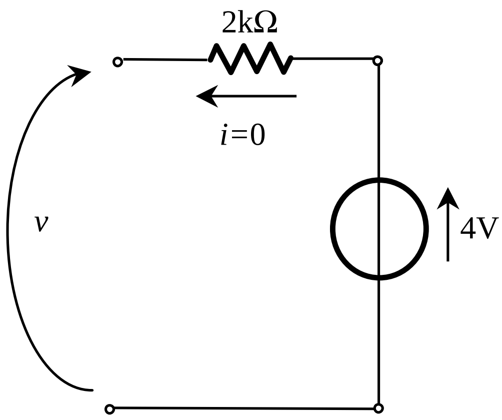
b) Un capacitore da 0.2 μF ha una carica di 20 μC. Trovare la tensione e l'energia.

c) Trovare la corrente in un induttore di 0.5 H per $0 \leq t \leq 2\ s$, se $i(0^-) = 0$ e $v(t)$ mostrata in figura.



Risoluzione

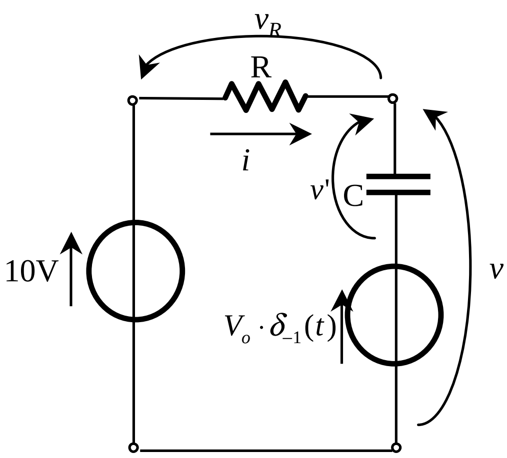
Per t<0 il circuito è a regime. Il condensatore, la cui equazione è $i(t) = C\dfrac{dv}{dt}$ si riduce ad un circuito aperto. La configurazione per t<0 è la seguente:



Essendovi un circuito aperto i=0, la caduta di tensione ai capi del resistore è nulla, per cui si ha:

$V_0 = v(0^-) = 4\text{V}$

Per t>0 il circuito diventa:



Introduciamo la variabile scaricata v' tale che $v = v' + V_0 = v' + 4$ con $v'(0^-) = v'(0^+) = 0$

Siccome è $10 = RC\dfrac{dv'}{dt} + v' + V_0 \quad \Rightarrow \quad 10 = RC\dfrac{dv'}{dt} + v' + 4$ si ha:

$RC\dfrac{dv'}{dt} + v' = 6$ che è la relazione i / o per v'

La v' sarà data dalla somma dell'integrale particolare più l'integrale dell'omogenea associata:

$v' = v_o' + v_p'$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$RC\lambda + 1 = 0$

da cui la frequenza libera $\lambda = -\dfrac{1}{RC}$

Dal momento che l'ingresso è costante anche l'integrale particolare è costante:

$v_p' = k \qquad \Rightarrow \qquad k = 6$

L'integrale dell'omogenea associata è del tipo:

$v_o' = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

Per cui:

$v'(0^+) = 0 = A + 6 \quad \Rightarrow \quad A = -6$

$v'(t) = -6e^{-\frac{1}{RC}t} + 6$

ed essendo $v = v' + V_0 = v' + 4$ l'espressione di $v(t)$ sarà:

$v(t) = -6e^{-\frac{1}{RC}t} + 10$

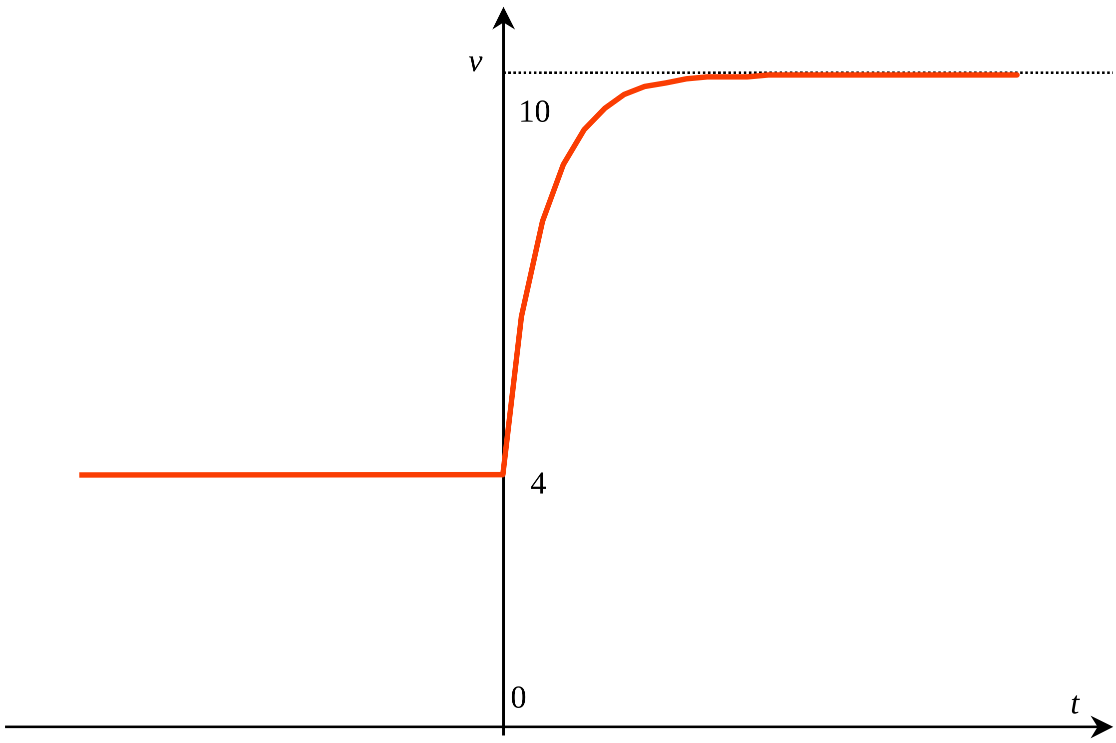
E sostituendo i valori:

$R = 4 \times 10^3 \Omega$

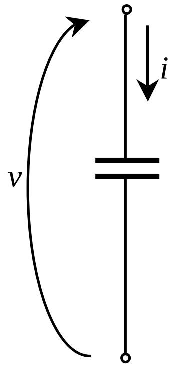
$C = 5 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$

si ottiene:

$v(t) = -6e^{-50t} + 10 \qquad\qquad$ per $t > 0$



b)



$C = 0.2\mu\,\mathrm{F}$
$q = 20\mu\,\mathrm{C}$

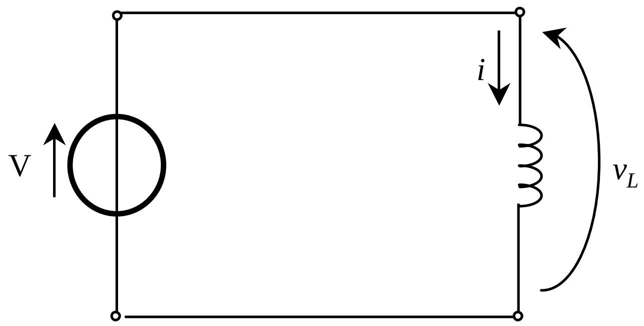
Per la tensione si ha:

$$q = C \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{q}{C} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{0.2 \cdot 10^{-6}} = 100\mathrm{V}$$

Per l'energia si ha:

$$E = \frac{1}{2} C \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

c) Il circuito si presenta come segue:



Non esistono situazioni patologiche per cui lo stato si conserva:

$i(0^+) = i(0^-) = 0$

$L\frac{di}{dt} = V$

e integrando si ottiene:

$i(t) = \frac{V}{L}t + c$

Per $0 \le t \le 1 \quad \Rightarrow \quad V = 5$

$i(0^+) = 0 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

quindi

$i(t) = \frac{5}{0.5}t \quad \Rightarrow \quad i(t) = 10t$

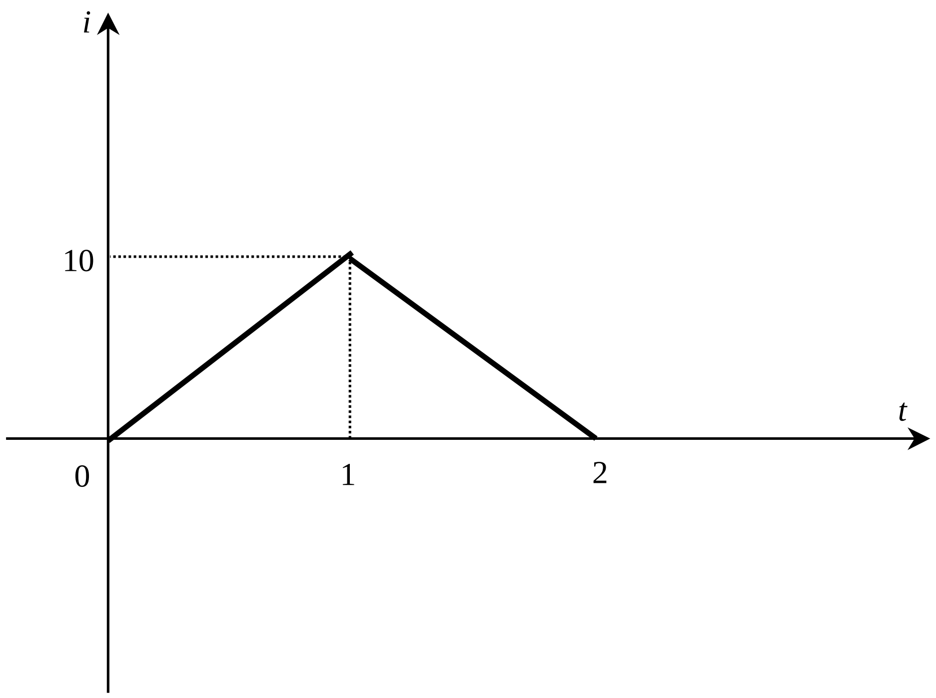
Per $1 \le t \le 2 \quad \Rightarrow \quad V = -5$

$i(1^+) = i(1^-) = 10 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$i(1^+) = 10 = -\frac{5}{0.5} + c \quad \Rightarrow \quad c = 20$

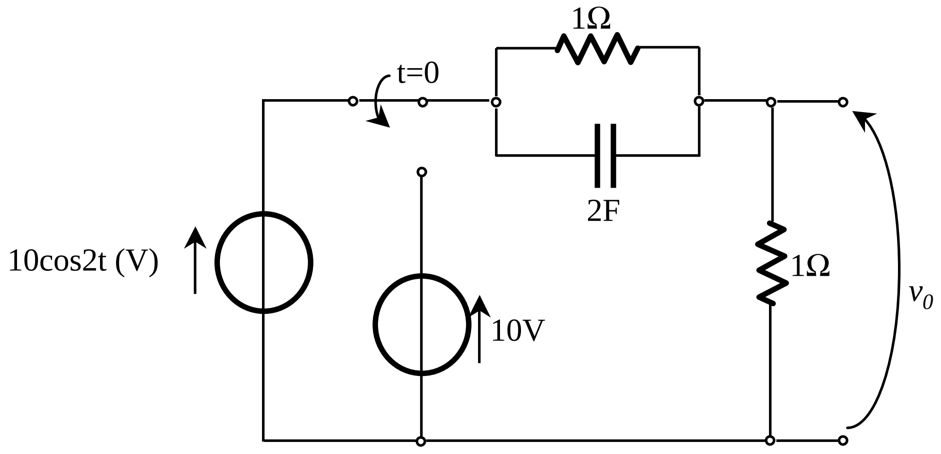
quindi

$i(t) = -10t + 20$



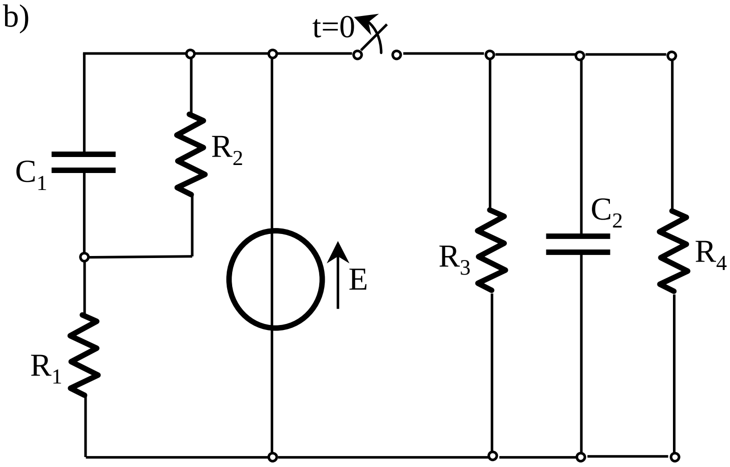
ESERCIZIO 2

a)



Per t<0 il circuito è a regime. In t=0 il tasto commuta. Determinare l'andamento di $v_0(t)$. Tracciarne il grafico.

b)

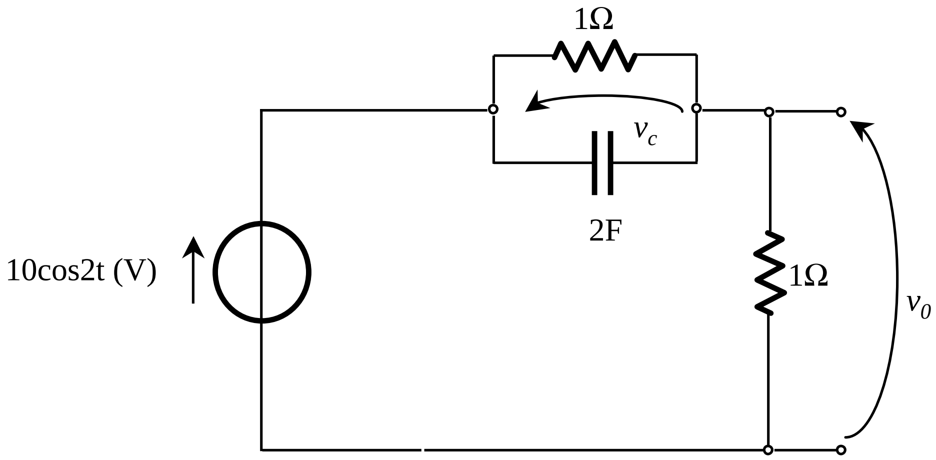


$R_1 = 50\text{k}\Omega$
$R_2 = 50\text{k}\Omega$
$R_3 = 40\text{k}\Omega$
$C_1 = 2\mu\text{F}$
$C_2 = 4\mu\text{F}$

Nell'istante t=0 il tasto viene aperto. Per t<0 il circuito è a regime. Per t>0 il circuito ha una costante di tempo τ=120ms, e dissipa complessivamente un'energia $W = 20 \cdot 10^{-3}$ J. Determinare la totale energia elettrostatica immagazzinata e la potenza complessivamente dissipata, quando l'interruttore è chiuso.

Risoluzione

a) Per t<0 ho la seguente situazione:



Per le tensioni ho la seguente relazione:

$$10\cos 2t = v_c + v_o \qquad (1)$$

Per le correnti posso scrivere:

$$\frac{v_c}{1} + C\frac{dv_c}{dt} = \frac{v_o}{1} \qquad (2)$$

Dalla (1) si ottiene che:

$$v_c = 10\cos 2t - v_o$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -20\,\text{sen}\,2t - \frac{dv_o}{dt}$$

che sostituite alla (2) danno:

$$10\cos 2t - v_o + 2\cdot\left(-20\,\text{sen}\,2t - \frac{dv_o}{dt}\right) - v_o = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$2\frac{dv_o}{dt} + 2v_o = -40\,\text{sen}\,2t + 10\cos 2t \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{dv_o}{dt} + v_o = -20\,\text{sen}\,2t + 5\cos 2t \qquad (3)$$

che è la relazione i / o.

Poichè il circuito è a regime dobbiamo calcolare la sola risposta forzata

$$v_{op} = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$$

$$\frac{dv_{op}}{dt} = -2A\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t$$

che sostituite alla (3):

$$-2A\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t + A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t = -20\,\text{sen}\,2t + 5\cos 2t$$

e uguagliando membro a membro i termini in $\cos 2t$ e $\text{sen}\,2t$ si ottiene:

$$\begin{cases} -2A + B = -20 \\ 2B + A = 5 \end{cases}$$

da cui:

$A = 9 \qquad B = -2$

Perciò l'espressione di $v_o(t)$ è la seguente:

$v_o(t) = 9\cos 2t - 2\,\mathrm{sen}\,2t$

In 0^- si ha:

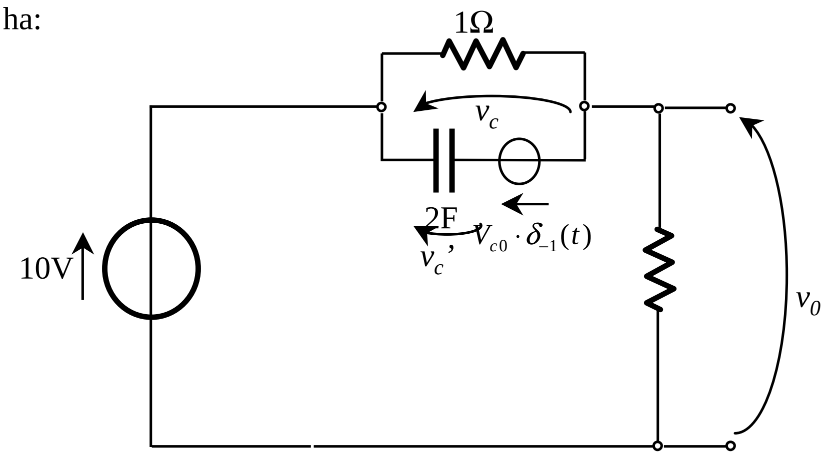
$v_o(0^-) = 9\mathrm{V}$

Per quanto riguarda la $v_c(t)$ si ha:

$v_c(t) = 10\cos 2t - v_o = 10\cos 2t - 9\cos 2t + 2\,\mathrm{sen}\,2t$

$V_{c0} = v_c(0^-) = 1\mathrm{V}$

Per t>0 si ha:



Introduciamo la variabile scaricata v_c' tale che $v_c = v_c' + V_{c0} = v_c' + 1$ e $v_c'(0^-) = v_c'(0^+) = 0$

Per le tensioni si può scrivere:

$$10 = v_c' + 1 + v_o \qquad \Rightarrow \qquad 9 = v_c' + v_o \qquad (4)$$

Per le correnti si può scrivere:

$$\frac{v_c}{1} + C\frac{dv_c}{dt} = \frac{v_o}{1} \qquad \Rightarrow \qquad v_c' + 1 + 2\frac{dv_c'}{dt} = v_o \qquad (5)$$

Dalla (4) si ottiene che:

$$v_c' = 9 - v_o$$

$$\frac{dv_c'}{dt} = -\frac{dv_o}{dt}$$

che sostituite alla (5) danno:

$$9 - v_o + 1 + 2 \cdot \left(- \frac{dv_o}{dt} \right) - v_o = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$-2\frac{dv_o}{dt} - 2v_o + 10 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{dv_o}{dt} + v_o = 5 \qquad (6)$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è:

$$\lambda + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -1$$

L'espressione della $v_o(t)$ è:

$$v_o(t) = Ae^{-t} + v_{op}$$

$$v_{op} = k \qquad \Rightarrow \qquad k = 5$$

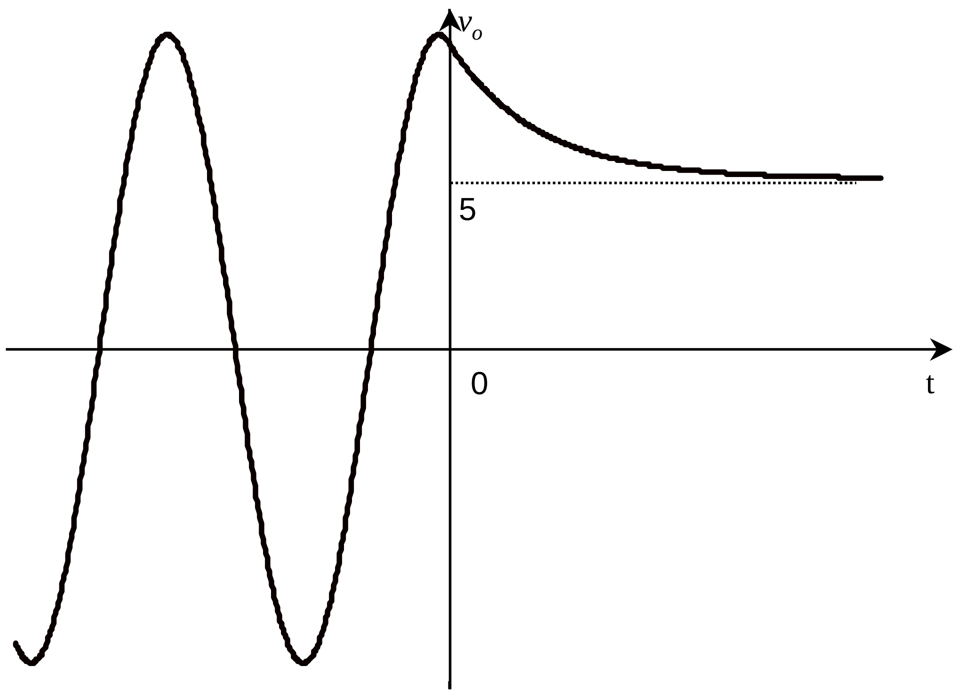
$$v_o(t) = Ae^{-t} + 5$$

$$v_o(0^-) = 9 \qquad \Rightarrow \qquad v_o(0^+) = 9$$

$$9 = A + 5 \qquad \Rightarrow \qquad A = 4$$

$$v_o(t) = 4e^{-t} + 5$$

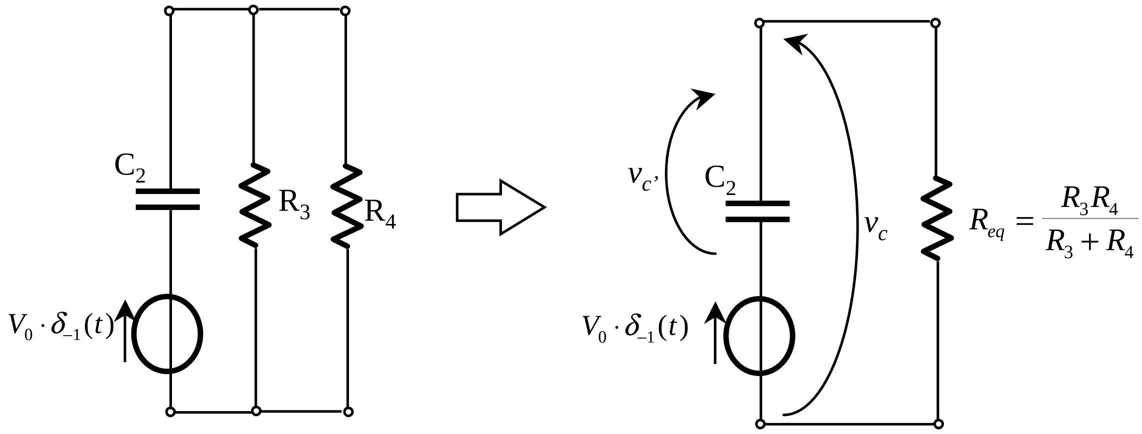
Il grafico della $v_o(t)$ è:



b)

Per t<0 il circuito è a regime.Il condensatore da 4μF si carica ad un valore di tensione V_0 pari ad E.

Per t>0 la situazione è la seguente:



Avremo la seguente relazione per le correnti:

$$C_2 \frac{dv_c'}{dt} = -\frac{v_c' - V_0}{R_{eq}}$$

$$\frac{dv_c'}{dt} + \frac{1}{R_{eq} C_2} v_c' = -V_0$$

l'equazione caratteristica dell'omogenea associata è:

$$\lambda + \frac{1}{R_{eq} C_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\frac{1}{R_{eq} C_2}$$

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} = R_{eq} C_2 = 120 \cdot 10^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R_3 R_4 C_2}{R_3 + R_4} = 120 \cdot 10^{-3} \qquad \Rightarrow$$

$$R_3 R_4 C_2 = 120 \cdot 10^{-3} \cdot \left(R_3 + R_4\right) \qquad \Rightarrow \qquad \left(R_3 C_2 - 120 \cdot 10^{-3}\right) R_4 = 120 \cdot 10^{-3} R_3 \qquad \Rightarrow$$

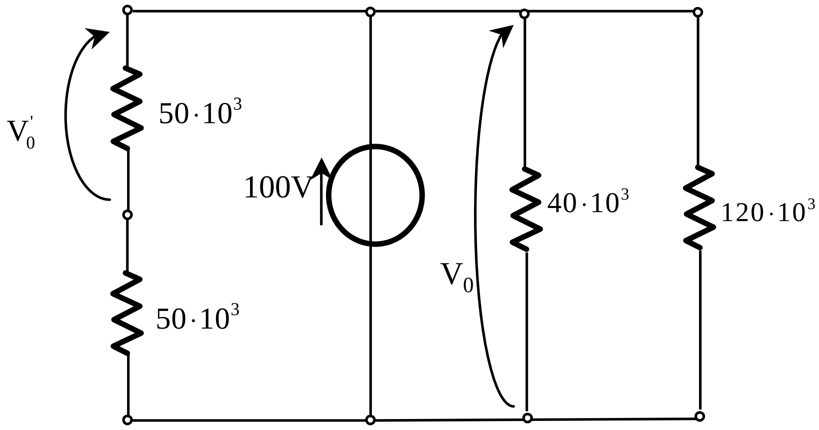
$$R_4 = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot R_3}{R_3 C_2 - 120 \cdot 10^{-3}} = \frac{120 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-6} \cdot 40 \cdot 10^3 - 120 \cdot 10^{-3}} = 120 \cdot 10^3 \mathrm{k\Omega}$$

L'energia accumulata nel capacitore C_2 è $W = \frac{1}{2} C_2 V_0^2 = \frac{1}{2} C_2 E^2$ e viene dissipata da R_3 e R_4 durante il processo di scarica.

$$W = 20 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2} 4 \cdot 10^{-6} \cdot E^2 \qquad \Rightarrow \qquad E = \sqrt{\frac{40 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{10000} = 100\mathrm{V}$$

Abbiamo quindi determinato i valori di E e R_4

Per t<0, quando l'interruttore è chiuso, i condensatori sono assimilabili a circuiti aperti e la situazione circuitale è la seguente:



$$V_0' = \frac{E}{2} = 50\text{V}$$

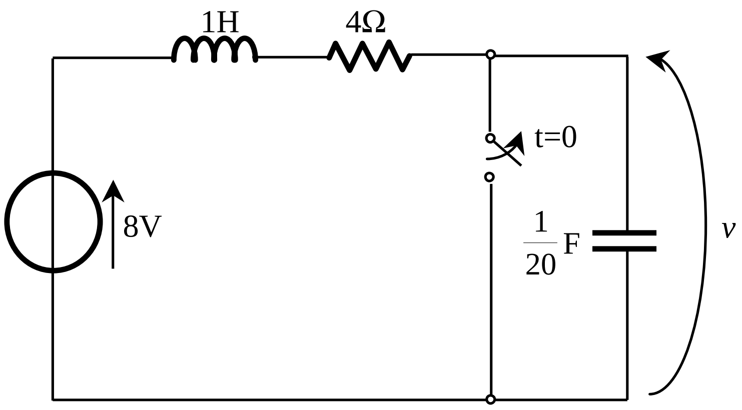
$$V_0 = 100\text{V}$$

$$W = \frac{1}{2}C_1V_0'^2 + \frac{1}{2}C_2V_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 2500 + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10^{-6}\cdot 10000 = 22.5\cdot 10^{-3}\,\text{J}$$

$$P_{ass} = 2\cdot\frac{V_0'^2}{50\cdot 10^3} + \frac{V_0^2}{40\cdot 10^3} + \frac{V_0^2}{120\cdot 10^3} = 0.43\text{W}$$

ESERCIZIO 3

a)

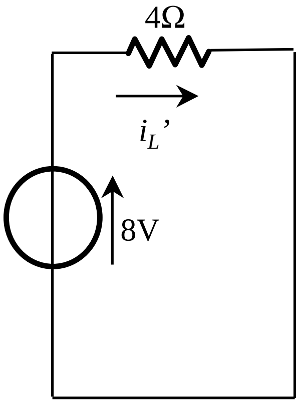


Trovare *v(t)* per t>0, se il circuito è a regime a t=0.

b) Trovare il valore massimo ed il valore minimo di capacità che può essere ottenuto con 10 condensatori da 1μF.disegnare i circuiti equivalenti.

Risoluzione

a) Per t<0, a regime, l'induttore è un corto circuito e il condensatore è cortocircuitato:



$$i_L^{'} = I_L = \frac{8}{4} = 2\text{A}$$

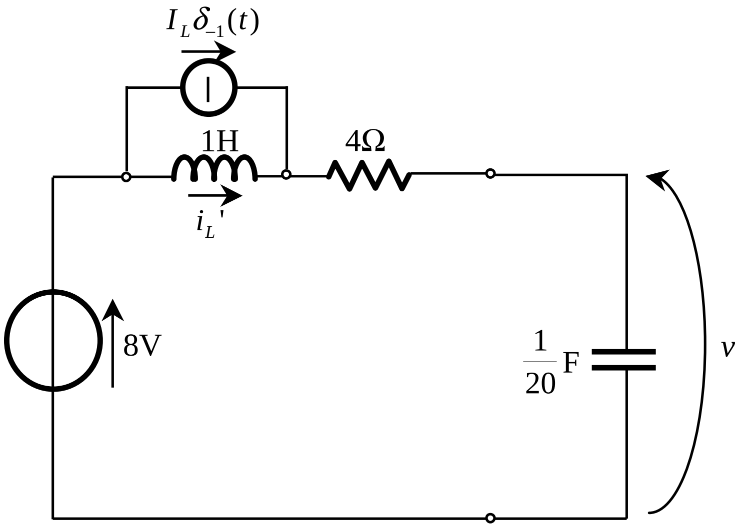
allora per $t = 0^-$ $i_L(0^-) = 2\text{A}$ e $v(0^-) = 0$

per $t = 0^+$ si ha che, poiché non ci sono situazioni patologiche, le condizioni si consrvano:

$i_L(0^+) = 2\text{A}$ e $v(0^+) = 0$

per $t > 0$

introduciamo la variabile scaricata $i_L^{'}$



$$v + R\cdot\left(i_L' + I_L\right) + L\cdot\frac{di_L'}{dt} = 8$$

$$v + RC\frac{dv}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dv}{dt} - I_L\right) = 8$$

$$v + \frac{4}{20}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{20}\frac{d^2v}{dt^2} = 8$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4\frac{dv}{dt} + 20v = 160 \quad \text{relazione i / o}$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$$

da cui:

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{1} = \left\langle \begin{array}{l} -2 + j4 \\ \\ -2 - j4 \end{array}\right.$$

l'integrale dell'omogenea associata avrà la forma:

$$v_{oa} = e^{-2t}\left(A\cos 4t + B\,\mathrm{sen}\,4t\right)$$

l'integrale particolare è:

$$v_p = k \quad \Rightarrow \quad 20k = 160 \quad \Rightarrow \quad k = 8 \quad \Rightarrow \quad v_p = 8$$

$$v = e^{-2t}\left(A\cos 4t + B\,\mathrm{sen}\,4t\right) + 8$$

occorrono 2 condizioni iniziali: in 0^+ e in $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+}$

$$v(0^+) = v(0^-) = 0 = A + 8 \qquad \Rightarrow \qquad A = -8$$

$$\frac{dv}{dt} = -2e^{-2t}\left(A\cos 4t + B\,\mathrm{sen}\,4t\right) + e^{-2t}\left(-4A\,\mathrm{sen}\,4t + 4B\cos 4t\right)$$

Per quanto riguarda $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+}$ abbiamo che essendo:

$$C\frac{dv}{dt} = i_L' + I_L$$

allora:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{C}i_L'(0^+) + \frac{1}{C}I_L = 20 \cdot 2 = 40$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{cases} A = -8 \\ \\ 40 = -2A + 4B \qquad \Rightarrow \qquad 40 = 16 + 4B \qquad \Rightarrow \qquad B = 6 \end{cases}$$

Allora l'espressione della $v(t)$ è la seguente:

$$v(t) = 8 - e^{-2t}\left(8\cos 4t - 6\,\mathrm{sen}\,4t\right) \ \mathrm{V}$$

b)

Il valore minimo della capacitanza si ha per un collegamento in serie dei condensatori.

Infatti si ha che:

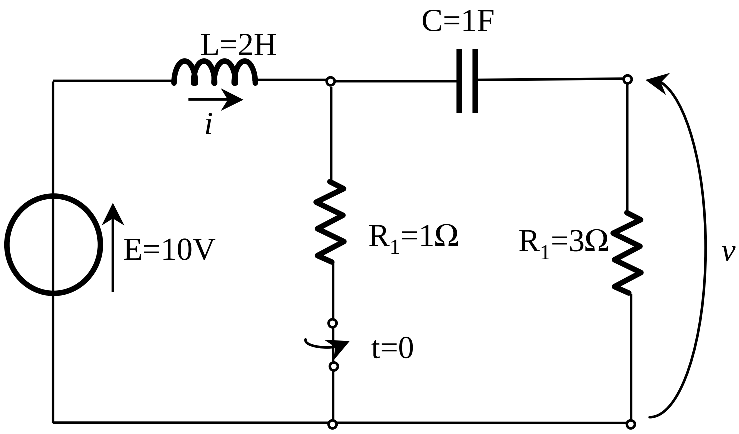
$$\frac{1}{C_{eqS}} = \frac{1}{C_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{C_{10}} \qquad \Rightarrow \qquad C_{eqS} = \frac{1}{10}\mu\,\mathrm{F} = 0.1\mu\,\mathrm{F}$$

Il valore massimo della capacitanza si ha per un collegamento in parallelo dei condensatori.

Infatti si ha che:

$$C_{eqP} = C_1 + \ldots\ldots + C_{10} = 10\mu\,\mathrm{F}$$

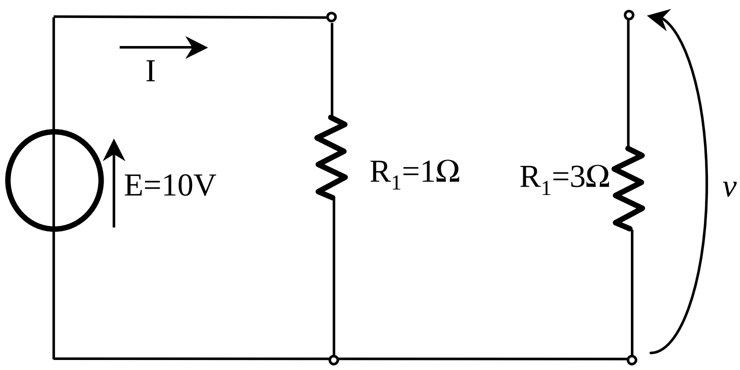
ESERCIZIO 4



Per $t < 0$ il circuito è a regime. La f.e.m. del generatore di tensione è costante e pari a 10V.
In $t = 0$ il tasto si apre istantaneamente.
Determinare: $i(t)$ per $t \geq 0$; l'energia erogata dal generatore di tensione tra gli istanti $t = 0$ e $t = +\infty$.

Risoluzione

Per $t < 0$ il circuito è in regime permanente: l'induttore è un corto-circuito e il condensatore un circuito aperto. Il circuito e quvalente è:



$I = \frac{10}{1} = 10\text{A}$

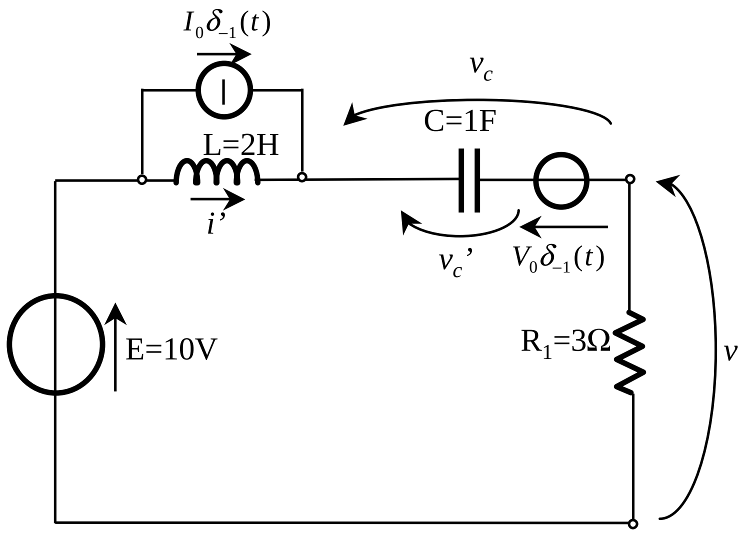
$V_{R_1} = R_1 \cdot I = E = 10\text{V}$

I e V_{R_1} sono rispettivamente la corrente nell'istante $t = 0^-$ dell'induttore (I_0) e la tensione in $t = 0^-$ nel capacitore (V_0), cioè costituiscono lo stato iniziale del circuito.

$I_0 = i(0^-) = 10\text{A}$

$V_0 = v_c(0^-) = 10\text{V}$

In $t = 0$ il tasto viene aperto e il circuito equivalente è:



Abbiamo introdotto le variabili scaricate i' e v_c' per le quali è:

$i = i' + I_0$

$v_c = v_c' + V_0$

$i'(0^-) = 0$

$v_c'(0^-) = 0$

Avremo che:

$$L\frac{di'}{dt} + v_c' + V_0 + R_1 i' + R_1 I_0 = 10 \qquad (1)$$

$$\left(i' + I_0\right) = C\frac{dv_c'}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(i' + I_0\right)}{C} = \frac{dv_c'}{dt} \qquad (2)$$

Dalla (1) sostituendo i valori si ottiene:

$$2\frac{di'}{dt} + v_c' + 3i' + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{di'}{dt} + v_c' + 3i' = -30 \qquad (3)$$

Siccome dalla (2) abbiamo che $\frac{dv_c'}{dt} = i' + I_0 = i' + 10$

derivando la (3) a primo e secondo membro si ha:

$$2\frac{d^2 i'}{dt^2} + \frac{dv_c'}{dt} + 3\frac{di'}{dt} = 0$$

e quindi:

$$2\frac{d^2 i'}{dt^2} + i' + 10 + 3\frac{di'}{dt} = 0$$

infine:

$$2\frac{d^2 i'}{dt^2} + 3\frac{di'}{dt} + i' = -10$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è:

$$2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \\ -1 \end{array} \right.$$

$$i' = Ae^{-\frac{1}{2}t} + Be^{-t} - i_p'$$

$$i_p' = k \qquad \text{con} \quad k = -10$$

$$i' = Ae^{-\frac{1}{2}t} + Be^{-t} - 10$$

Occorrono 2 condizioni iniziali:

$$i'(0^+) = i'(0^-) = 0$$

Per la condizione su $\left.\frac{di'}{dt}\right|_{0^+}$ si prende la (3):

$$2\left.\frac{di'}{dt}\right|_{0^+} + v_c'(0^+) + 3i'(0^+) = -30 \qquad \Rightarrow \qquad \left.\frac{di'}{dt}\right|_{0^+} = -15$$

ed essendo:

$$\frac{di'}{dt} = -\frac{1}{2}Ae^{-\frac{1}{2}t} - Be^{-t}$$

si ha che:

$$\begin{cases} 0 = A + B - 10 \\ \\ -15 = -\frac{1}{2}A - B \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A = -10 \\ \\ B = 20 \end{cases}$$

allora:

$$i' = 10 \cdot \left(-e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-t} \right) - 10$$

$$i = i' + I_0 = i' + 10$$

$$i(t) = 10 \cdot \left(-e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-t} \right)$$

L'energia erogata dal generatore di tensione è:

$$W = \int_0^{+\infty} E \cdot i(t)dt = \int_0^{+\infty} 10 \cdot 10 \cdot \left(2e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}} \right) dt = 100 \cdot \left[-2e^{-t} + 2e^{-\frac{t}{2}} \right]_0^{+\infty} = 100 \cdot [0 - 2 + 0 + 2] = 0$$

$$W = 0$$