Esercitazione sull'Analisi nel dominio del Tempo

ESERCIZIO 1

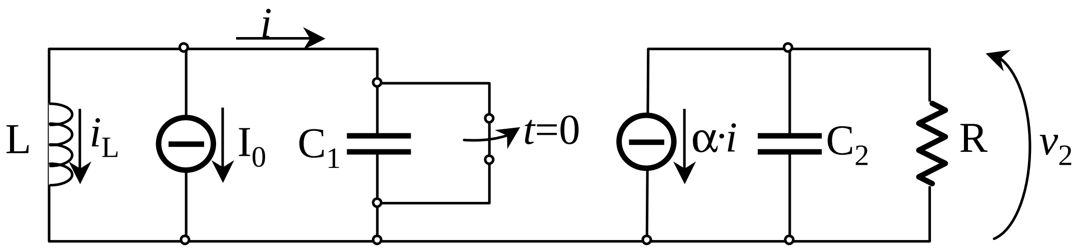


Fig 1

Per $t < 0$ il condensatore C_1 è cortocircuitato, la corrente nell'induttore è NULLA ed il circuito è a REGIME.

In $t = 0$ si apre il tasto. Determinare :

- $v_2(0^-)$
- $i_L(t)$ per $t > 0$
- $i(t)$ per $t > 0$
- $v_2(t)$ per $t > 0$

Risoluzione

Per $t < 0$ il generatore di corrente indipendente ha i morsetti corto-circuitati, quindi non circola corrente nell'induttore, e la corrente i ha lo stesso modulo e verso opposto di quella erogata dal generatore. Da questo deriviamo i due valori di corrente in 0^-:

$i_L(0^-) = 0$ $\qquad\qquad$ $i(0^-) = -I_0$

Possiamo allora ricavare lo stato in 0^- anche per la secnda parte del circuito:

$\alpha \cdot i\ (0^-) = -\alpha \cdot I_0$

$v_2\ (0^-) = -\ R \cdot \alpha \cdot i\ (0^-) = R \cdot \alpha \cdot I_0 = V_0$ $\qquad$ (C_2 a regime è un circuito aperto)

All'apertura del tasto **T** il circuito equivalente è il seguente:

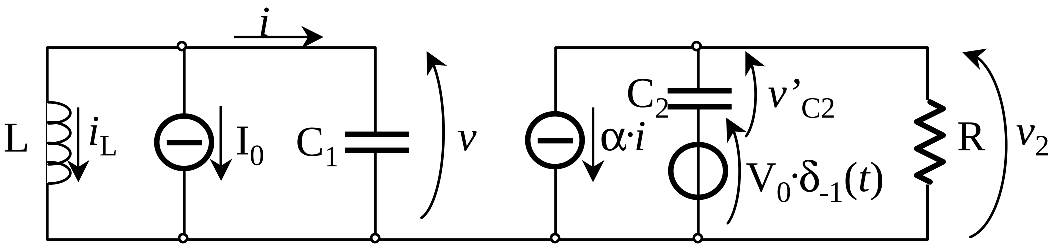


Fig 2

MAGLIA DI SINISTRA

$$\begin{cases} I_0 + i_L + C_1 \cdot \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ L \cdot \dfrac{di_L}{dt} = v \end{cases} \Rightarrow I_0 + LC \cdot \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L = 0 \Rightarrow LC \cdot \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L = -I_0$$

Ricaviamo l'integrale generale:

$$LC \cdot \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm j\sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm j\omega_0 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$i_L = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 \cdot t) + i_{Lp}$$

Per quanto riguarda l'integrale particolare, cerchiamo un valore costante:

$$i_{Lp} = K \Rightarrow K = -I_0$$

Non essendo presenti né co-cicli LA né maglie CE, le variabili di stato hanno discontinuità inferiore a quella dell'ingresso. In questo caso l'ingresso è un gradino, quindi le variabili conservano lo stato passando da 0^- 0^+

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= i_L(0^-) = 0 \\ v(0^+) &= v(0^-) = 0 \end{aligned} \Rightarrow L \cdot \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = v(0^+) = 0 \Rightarrow \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = 0$$

Applicando le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} 0 = A - I_0 \\ 0 = -A\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 \cdot t)\big|_0 + B\omega_0 \cos(\omega_0 \cdot t)\big|_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = I_0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Conosciamo quindi la corrente i_L e, da questa, ricaviamo la corrente i

$$i_L = I_0 \cos(\omega_0 t) - I_0 = I_0 \cdot [\cos(\omega_0 t) - 1]$$

$$i = -(i_L + I_0) = -I_0 \cdot \cos(\omega_0 t)$$

Verifichiamo i risultati fin qui trovati:

$$v(t) = L\frac{dL}{dt} = -LI_0\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t) \Rightarrow C\frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 LI_0 C\cos(\omega_0 t)$$

essendo $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\Rightarrow$ $C\dfrac{dv}{dt} = -I_0 \cos(\omega_0 t) = i(t)$ c.v.d

<u>MAGLIA DI DESTRA</u>

$$\alpha \cdot i + C_2 \cdot \frac{dv'_{C2}}{dt} + \frac{1}{R}(v'_{C2} + V_0) = 0 \Rightarrow$$

$$C_2 \cdot \frac{dv'_{C2}}{dt} + \frac{1}{R}v'_{C2} - \frac{V_0}{R} - \alpha \cdot i = -\frac{V_0}{R} + \alpha I_0 \cos(\omega_0 t)$$

Non essendoci maglie CE, la tensione ai capi del condensatore si conserva tra 0^- e 0^+:

$$v'_{C2}(0^+) = v'_{C2}(0^-) = 0$$

L'integrale generale prevede un solo termine, essendo l'equazione caratteristica di primo grado:

$$C_2\lambda + \frac{1}{R} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{1}{RC_2}$$

$$v_{c2}(t) = A\cdot e^{-\frac{1}{RC_2}t} + v_{c2p}(t)$$

L'integrale particolare prevede due termini in seno e coseno, dovuti al generatore pilotato e un termine costante dovuto al generatore di tensione:

$$v'_{C2p} = K + H\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + M\cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{dv'_{C2p}}{dt} = \omega_0 H\cos(\omega_0 t) - \omega_0 M\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, otteniamo:

$$C_2\omega_0\left[H\cos(\omega_0 t) - M\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\right] + \frac{K}{R} + \frac{H}{R}\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \frac{M}{R}\cos(\omega_0 t) = -\frac{V_0}{R} + \alpha I_0\cos(\omega_0 t)$$

imponendo l'identità dei termini in seno e quelli in coseno:

$$\begin{cases} -\dfrac{V_0}{R} = \dfrac{K}{R} \\ C_2\omega_0 H + \dfrac{M}{R} = \alpha I_0 \\ -C_2\omega_0 M + \dfrac{H}{R} = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} K = -V_0 \\ C_2^2\omega_0^2 R^2 M + M = \alpha R I_0 \\ H = RC_2\omega_0 M \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} K = -V_0 \\ M = \dfrac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2} \\ H = \dfrac{\alpha R^2 C_2 \omega I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2} \end{cases}$$

$$v'_{C2p} = -V_0 + \frac{\alpha\omega_0 C_2 R^2 I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\mathrm{sen}(\omega_0 t) - \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\cos(\omega_0 t)$$

Possiamo quindi sostituire l'integrale particolare nell'espressione generale di $v_{C2}(t)$:

$$v_{c2}(t) = A \cdot e^{-\frac{1}{RC_2}t} + v_{c2p}(t) = A \cdot e^{-\frac{1}{RC_2}t} - V_0 + \frac{\alpha\omega_0 C_2 R^2 I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\cos(\omega_0 t)$$

Imponiamo la condizone $v'_{C2}(0^+) = 0$

$$A - V_0 + \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = V_0 - \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}$$

$$v'_{C2}(t) = \left(V_0 - \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{RC_2}t} - V_0 + \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\left[\omega_0 C_2 R\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)\right]$$

Tenendo conto del fatto che:

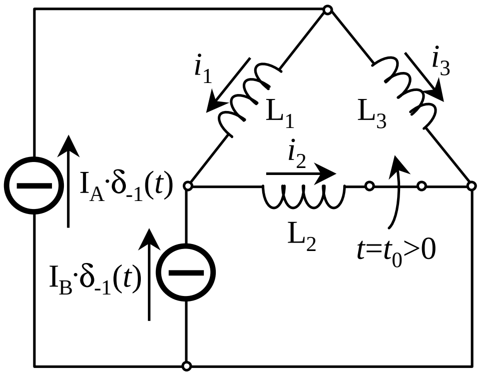
$$v_2(t) = v'_{C2}(t) + V_0 \qquad\qquad V_0 = \alpha R I_0$$

otteniamo:

$$v_2(t) = \left(\alpha R I_0 - \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{RC_2}t} + \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\left[\omega_0 C_2 R\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)\right] \quad \Rightarrow$$

$$v_2(t) = \left(\frac{\alpha\omega_0^2 R^3 C_2^2 I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{RC_2}t} + \frac{\alpha R I_0}{1+\omega_0^2 R^2 C_2^2}\left[\omega_0 C_2 R\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)\right]$$

ESERCIZIO 2



Per $t < 0$ gli induttori sono scarichi. Per $t > 0$ agiscono i generatori a gradino. A partire da un istante $t_0 > 0$ l'induttore L_2 è appeso per effetto dell'apertura del tasto. Determinare:

- $i_1(t)$ $i_2(t)$ $i_3(t)$ nell'intervallo di tempo [0 ; t_0];
- le aree degli impulsi di tensione su L_1 ed L_3 nell'istante t_0 di apertura del tasto

Risoluzione

Poiché, per ipotesi, gli induttori sono scarichi in $t < 0$ ed i generatori sono a gradino in $t = 0$, allora possiamo scrivere:

$$i_1(0^-) = 0 \qquad i_2(0^-) = 0 \qquad i_3(0^-) = 0$$

per $0 < t < t_0$:

$$\begin{cases} I_A = i_1 + i_3 \\ I_B = i_2 - i_1 \\ L_1 \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} = L_3 \dfrac{di_3}{dt} \end{cases}$$

La terza equazione si integra tra 0^- e $t > 0$, tenendo conto del fatto che lo stato in 0^- è nullo.

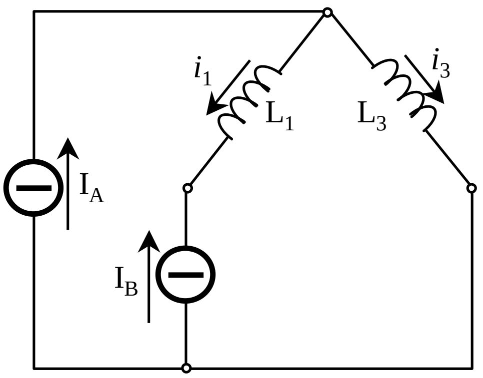
Otteniamo quindi:

$$L_1 i_1 + L_2 i_2 = L_3 i_3$$

$$L_1 i_1 + L_2 (i_B + i_1) = L_3 (I_A - i_1) \Rightarrow (L_1 + L_2 + L_3) \cdot i_1 = L_3 I_A - L_2 I_B$$

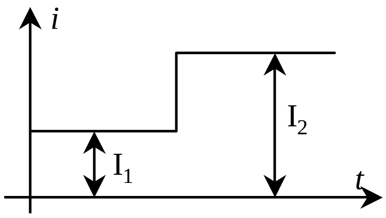
$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{L_3 I_A - L_2 I_B}{L_1 + L_2 + L_3} = I_1 \\ i_2 = I_B + i_1 = I_B + \dfrac{L_3 I_A - L_2 I_B}{L_1 + L_2 + L_3} = \dfrac{(L_1 + L_3) I_B + L_3 I_A}{L_1 + L_2 + L_3} = I_2 \\ i_3 = I_A - i_1 = \dfrac{L_1 I_A + L_2 (I_A + I_B)}{L_1 + L_2 + L_3} = I_3 \end{cases}$$

Nell’istante $t = t_0$ si apre il tasto, escludendo L_2. Il circuito diventa:



Le correnti negli induttori L_1 e L_3 presentano in t_0 un gradino. Come è avvenuto in precedenza, le variabili di stato sono legate tra loro da legami non-differenziali, per cui il circuito non presenta transitorio: le due correnti negli induttori assumono istantaneamente il valore di regime.

La tensione ai capi degli induttori è proporzionale alla derivata prima della corrente, quindi in t_0 tali tensioni presentano un impulso. L’area dell’impulso si ottiene integrando tra t_0^- e t_0^+ l’equazione del componente, noti i valori della corrente negli estremi di integrazione.



$$\text{area dell'impulso} = \int_{t_0^-}^{t_0^+} v(t)dt = L\int_{t_0^-}^{t_0^+} \frac{di(t)}{dt}dt = L\left[i\left(t_0^+\right) - i\left(t_0^-\right)\right]$$

Nel caso in esame conosciamo il valore delle correnti in t_0^- . Possiamo calcolare i valori delle stesse in t_0^+ anche senza ricorrere al circuito equivalente con variabili scaricate:

$$I_1\left(t_0^+\right) = -I_B \qquad\qquad I_3\left(t_0^+\right) = I_A + I_B$$

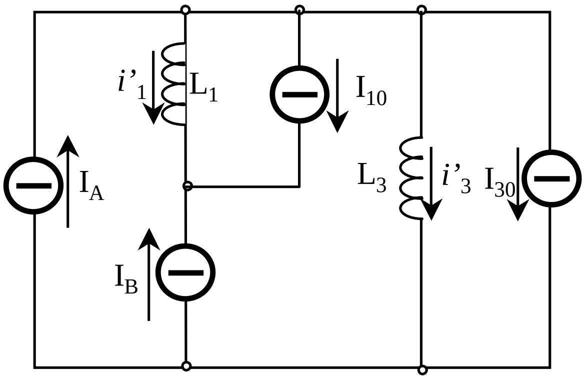
quindi l’area dell’impulso in L_1 sarà:

$$L_1\left(-I_B - \frac{L_3 I_A - L_2 I_B}{L_1 + L_2 + L_3}\right) = -L_1\left[I_B + \frac{L_3 I_A - L_2 I_B}{L_1 + L_2 + L_3}\right]$$

e dell’impulso in L_3:

$$L_3 \cdot \left(I_A + I_B - \frac{L_1 I_A + L_2\left(I_A + I_B\right)}{L_1 + L_2 + L_3}\right)$$

Gli stessi risultati si possono ricavare considerando il circuito equivalente con le variabili scaricate. In questo caso, essendo per i potesi nulle le variabili saricate in t_0^- , la variazione della corrente in t_0 corrisponde al valore assunto in t_0^+



$$i'_1 = I_B - I_{10} = I_B - \frac{L_3 I_A - L_2 I_B}{L_1 + L_2 + L_3}$$

$$i'_3 = I_A + I_B - I_{30} = I_A + I_B - \frac{L_1 I_A + L_2 (I_A + I_B)}{L_1 + L_2 + L_3}$$

Le aree degli impulsi valgono:

$$\begin{cases} L_1 \cdot i'_1 \\ L_2 \cdot i'_2 \end{cases}$$