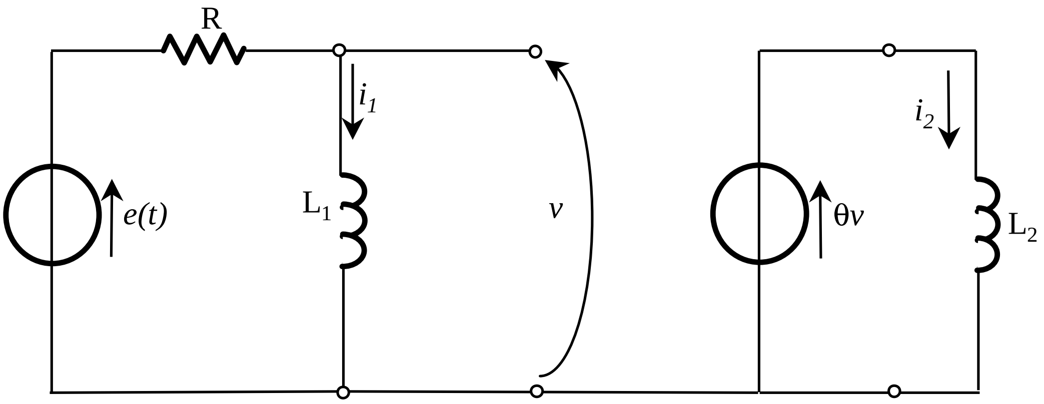
Esercitazione sull'Analisi nel dominio del Tempo

ESERCIZIO 1



Stato in 0^-

$i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$

Il circuito contiene un generatore di tensione pilotato in tensione.

- Ottenere le equazioni relative alle variabili di stato i_1 e i_2.
- Verificare che, per stato iniziale nullo, i_1 e i_2 sono proporzionali.
- Determinare $i_1(t)$ e $i_2(t)$ per $t>0$ in corrispondenza ad un ingresso a gradino $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t)$. Tracciare i grafici di i_1 e i_2.
- Analizzare le soluzioni ottenute al punto precedente per $t \to \infty$ disegnare il "circuito equivalente" cui il circuito di partenza si riduce corrispondentemente.

Risoluzione

Le equazioni nelle variabili di stato sono:

$$\begin{cases} e(t) = Ri_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} \\ \vartheta \cdot L_1 \dfrac{di_1}{dt} = L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases} \qquad (*)$$

Si osservi che le equazioni possono essere risolte in sequenza (prima i_1 e poi i_2) oppure per ricavare i_2, si può ricavare la relazione i/o. Per quanto riguarda i_1 la relazione i/o è banalmente la prima delle $(*)$.

Poichè $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0,$ la seconda delle $(*)$ genera una relazione assai semplice. Si ha infatti:

$$\vartheta \cdot L_1 \int_{0^-}^{t} \frac{di_1}{dt} \cdot d\tau = L_2 \int_{0^-}^{t} \frac{di_2}{dt} \cdot d\tau \;\Rightarrow\; \vartheta \cdot L_1 i_1 = L_2 i_2$$

perciò i_1 e i_2 sono proporzionali sotto l'ipotesi di stato zero in t=0. Ciò rende particolarmente semplici i calcoli per la relazione i/o su i_2 . Si ha infatti:

$$i_1 = \frac{L_2}{\vartheta \cdot L_1} \cdot i_2 \;\; ; \;\; L_1 \frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{\vartheta} \frac{di_2}{dt} \quad \text{che sostituite nella prima delle } (*):$$

$$e(t) = \frac{RL_2}{\vartheta \cdot L_1} \cdot i_2 + \frac{L_2}{\vartheta} \frac{di_2}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{\vartheta}{L_2} e(t) = \frac{R}{L_1} i_2 + \frac{di_2}{dt}$$

la frequenza libera è $\lambda = -\frac{R}{L_1}$

per $e(t) = E\delta_{-1}(t)$ si ha che l'integrale particolare è una costante:

$$i_{2p} = k \quad \text{con} \quad \frac{\vartheta}{L_2} E = \frac{R}{L_1} k \;\Rightarrow\; k = \frac{L_1}{L_2} \frac{\vartheta}{R} E$$

Le condizioni iniziali $i_2(0^+)$ e $i_1(0^+)$ sono le stesse che in (0^-) (cioè nulle) perchè non ci sono co-cicli costituiti da soli induttori e generatori di corrente, nè maglie con soli condensatori e generatori di tensione. Ne consegue che l'integrale dell'omogenea associata ha la forma:

$$i_{2oa} = A \cdot e^{-\frac{R}{L_1} t}$$

Quindi l'espressione della $i_2(t)$ è la seguente:

$$i_2(t) = \frac{L_1}{L_2} \frac{\vartheta}{R} E + A \cdot e^{-\frac{R}{L_1} t}$$

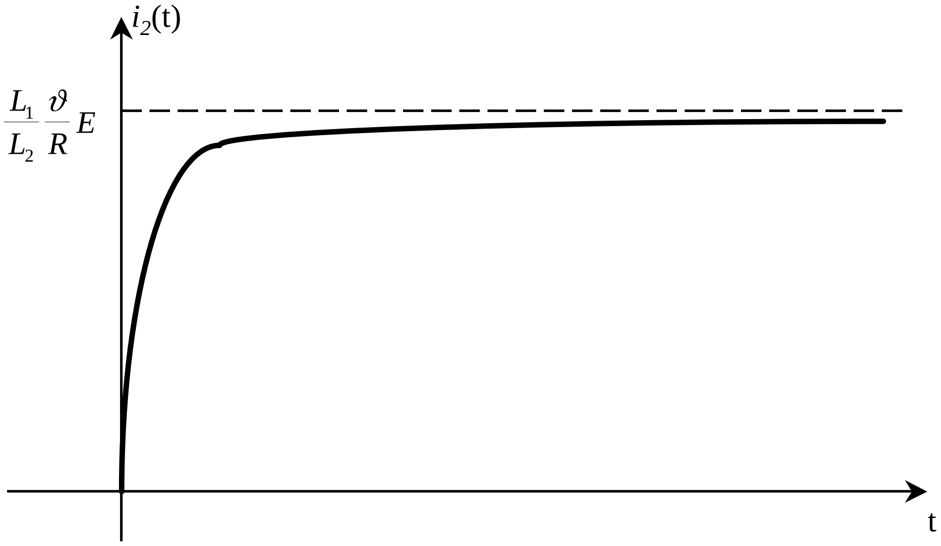
Imponendo le condizioni in 0^+ si può determinare A:

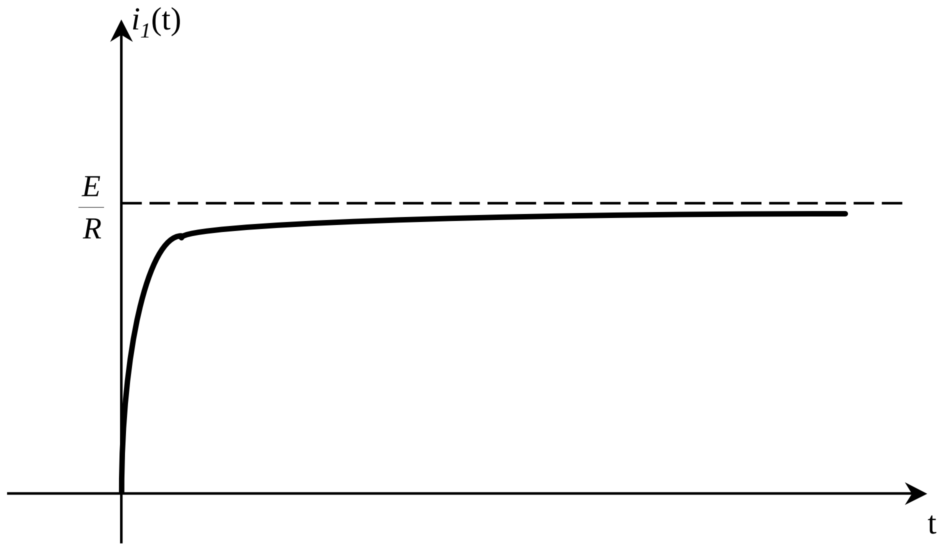
$$i_2(0^+) = 0 = \frac{L_1}{L_2} \frac{\vartheta}{R} E + A \;\Rightarrow\; A = -\frac{L_1}{L_2} \frac{\vartheta}{R} E$$

Quindi:

$$i_2(t) = \frac{L_1}{L_2} \frac{\vartheta}{R} E \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L_1} t}\right) \quad \text{per } t > 0$$

$$i_1(t) = \frac{L_2}{\vartheta \cdot L_1} \cdot i_2(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L_1} t}\right) \quad \text{per } t > 0$$





E' interessante osservare il circuito equivalente per $t \to \infty$.

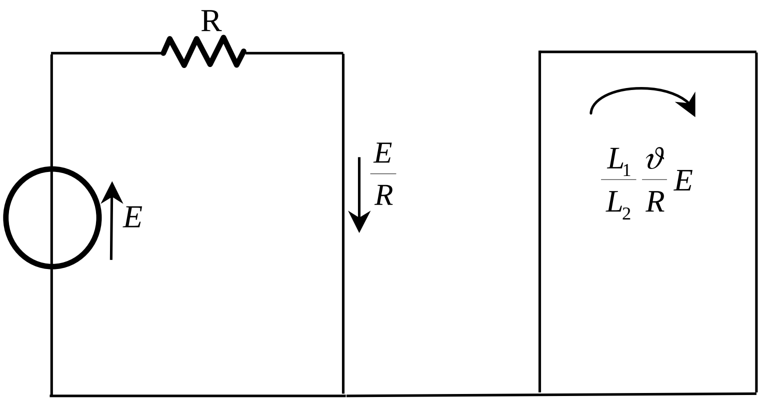
Si osservi che:

$$\lim_{t \to \infty}\left(\frac{di_1}{dt}\right) = \lim_{t \to \infty}\left(\frac{di_2}{dt}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} v = \lim_{t \to \infty} \vartheta \cdot v = 0$$

mentre

$$\lim_{t \to \infty} i_1(t) = \frac{E}{R} \quad ; \quad \lim_{t \to \infty} i_2(t) = \frac{L_1}{L_2}\frac{\vartheta}{R}E$$

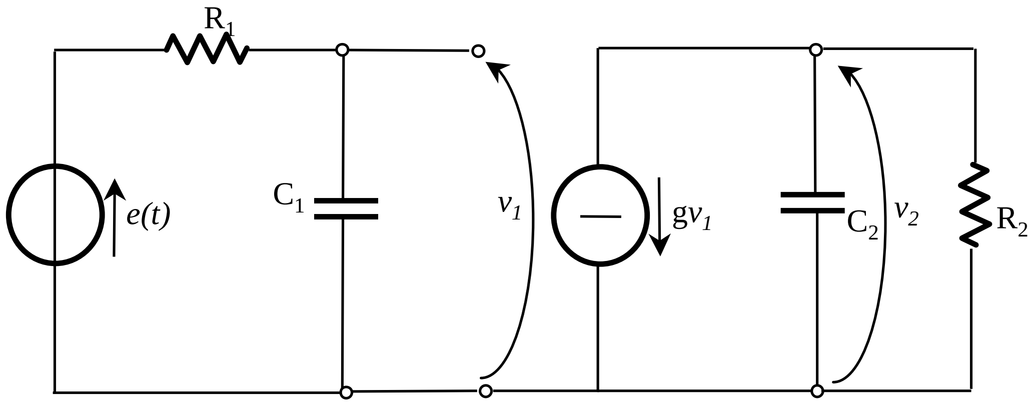
Gli induttori ed il generatore pilotato diventano altrettanti corto - circuiti e si ha:



per $t \to \infty$

Il secondo tronco di rete è dunque percorso da una corrente di maglia costante e non nulla.

ESERCIZIO 2



Stato in 0^-

$v_1(0^-) = v_2(0^-) = 0$

Il circuito contiene un generatore di corrente pilotato in tensione.

- Ottenere le equazioni relative alle due variabili di stato v_1 e v_2.
- Verificare che, per $e(t) = f(t)\delta_{-1}(t)$ con $f(0^+) \neq 0$, si ha $v_1(0^+) = v_2(0^+) = 0$.
- Ricavare la relazione ingresso-uscita per l'ingresso *e(t)* e l'uscita $v_2(t)$.
- Posto $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t)$ determinare $v_2(t)$ per $t \geq 0$ servendosi della relazione ingresso - uscita.
- Si riprendano infine le equazioni ottenute al punto 1 e si verifichi la possibilità di ottenere $v_2(t)$ risolvendo la coppia di equazioni "in sequenza" (sempre con $e(t) = E \cdot \delta_{-1}(t)$).
- Tracciare il grafico (qualitativo) di $v_2(t)$.
- Verificare che ogni altra grandezza diversa dalle variabili di stato, si ricava algebricamente come combinazione lineare delle variabili di stato e degli ingressi.

Risoluzione

Supponiamo per ipotesi $R_1C_1 \neq R_2C_2$.

$$\begin{cases} e(t) = R_1C_1\dfrac{dv_1}{dt} + v_1 \\ gv_1 + C_2\dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_2} = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Verifichiamo che per $e(t) = f(t)\cdot\delta_{-1}(t)$ $\quad v_1(0^+) = v_2(0^+) = 0$:

Integrando la prima delle (*):

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)\delta_{-1}(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} v_1 dt + R_1C_1\int_{0^-}^{0^+} dv_1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + R_1C_1\left(v_1(0^+) - v_1(0^-)\right) \quad \Rightarrow \quad v_1(0^+) = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Integrando la seconda delle (*):

$$\int_{0^-}^{0^+} gv_1 dt = -C_2\int_{0^-}^{0^+} dv_2 + \int_{0^-}^{0^+} \frac{v_2}{R_2}dt \quad \Rightarrow \quad 0 = -C_2\left(v_2(0^+) - v_2(0^-)\right) + 0 \quad \Rightarrow \quad v_2(0^+) = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Comunque si ha subito: $v_2(0^+) = v_1(0^+) = 0$ in quanto, non essendoci maglie di condensatori e generatori di tensione, nè co-cicli di generatori di corrente e induttori, lo stato si conserva fra 0^- e 0^+.

Le due equazioni possono essere risolte sequenzialmente: dalla prima delle (*) si può ricavare $v_1(t)$ e sostituirlo nella seconda. In tal modo il termine $gv_1(t)$ compare come termine noto (ingresso) e $v_2(t)$ come uscita. Ovviamente $v_2(t)$ può anche essere espressa direttamente da una relazione i/o in cui l'ingresso sia $e(t)$. Vediamolo a titolo di esercizio. Dalla seconda delle (*) si ha:

$$v_1 = -\frac{1}{g}\left(C_2\frac{dv_2}{dt}+\frac{v_2}{R_2}\right) \quad ; \quad \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{g}\left(C_2\frac{d^2v_2}{dt^2}+\frac{1}{R_2}\frac{dv_2}{dt}\right)$$

e sostituendolo nella prima delle (*):

$$e(t) = -\frac{R_1C_1}{g}\left(C_2\frac{d^2v_2}{dt^2}+\frac{1}{R_2}\frac{dv_2}{dt}\right)-\frac{1}{g}\left(C_2\frac{dv_2}{dt}+\frac{v_2}{R_2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$ge(t) = -R_1C_1C_2\frac{d^2v_2}{dt^2}-\left(\frac{R_1}{R_2}C_1+C_2\right)\frac{dv_2}{dt}-\frac{v_2}{R_2} \qquad \text{relazione i / o}$$

$$R_1R_2C_1C_2\frac{d^2v_2}{dt^2}+\left(R_1C_1+R_2C_2\right)\frac{dv_2}{dt}+v_2 = -R_2ge(t)$$

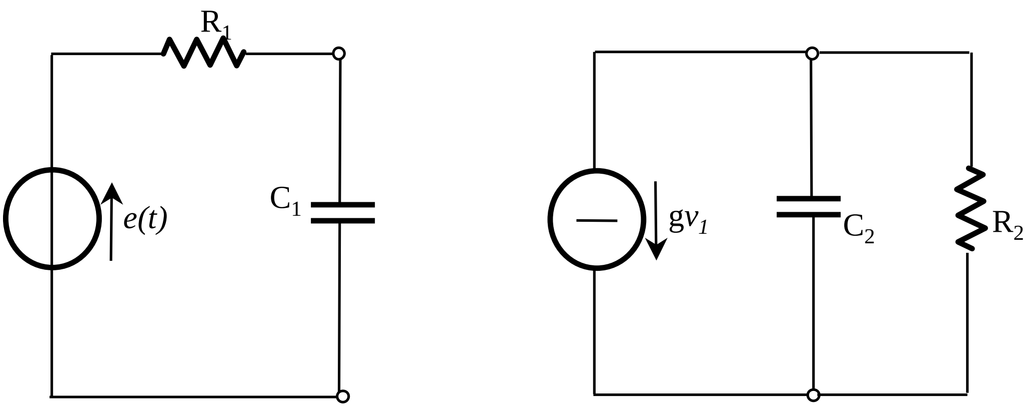
frequenze libere:

$$\lambda^2R_1R_2C_1C_2+\lambda\cdot\left(R_1C_1+R_2C_2\right)+1=0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\left(R_1C_1+R_2C_2\right)\pm\sqrt{\left(R_1C_1+R_2C_2\right)^2-4R_1R_2C_1C_2}}{2R_1R_2C_1C_2} = \frac{-\left(R_1C_1+R_2C_2\right)\pm\left(R_1C_1-R_2C_2\right)}{2R_1R_2C_1C_2} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} -\dfrac{2R_2C_2}{2R_1R_2C_1C_2} = -\dfrac{1}{R_1C_1} \\ -\dfrac{2R_1C_1}{2R_1R_2C_1C_2} = -\dfrac{1}{R_2C_2} \end{array} \right.$$

NOTA: Il fatto che le due frequenze libere siano dipendenti dai parametri del primo e del secondo tronco di rete separatamente, non è casuale. Il primo tronco di rete evolve nel tempo in modo indipendente dagli eventi elettrici che si verificano nel secondo. Inoltre, come già rilevato per le (*), gv_1 può essere considerato come "ingresso" nel secondo tronco di rete.



Supponiamo ora che $e(t) = E\delta_{-1}(t)$. Utilizzando la relazione i / o per v_2 si ha, per $t > 0$:

$$v_{2p} = -R_2 gE$$

$$v_{2oa} = Ae^{-\frac{t}{R_1C_1}} + Be^{-\frac{t}{R_2C_2}}$$

$$v_2(t) = -R_2 gE + Ae^{-\frac{t}{R_1C_1}} + Be^{-\frac{t}{R_2C_2}}$$

con A e B da identificare in base alle condizioni iniziali. Bisogna, a tal proposito, conoscere $v_2(0^+)$ e $\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{0^+}$

$v_2(0^+) = v_1(0^+) = 0$ come visto in precedenza.

Per ottenere $\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{0^+}$, dalla seconda delle (*):

$$gv_1(0^+) + C_2\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{0^+} + \frac{v_2(0^+)}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + C_2\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{0^+} + 0 = 0 \quad \Rightarrow \left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{0^+} = 0$$

Sostituendo le condizioni iniziali nell'espressione di $v_2(t)$:

$$0 = -R_2 gE + A + B$$

e derivando la $v_2(t)$ e sostituendo le condizioni in $t = 0^+$:

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{R_1C_1}Ae^{-\frac{t}{R_1C_1}} - B\frac{1}{R_2C_2}e^{-\frac{t}{R_2C_2}} \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{A}{R_1C_1} - \frac{B}{R_2C_2}$$

allora:

$$\begin{cases} A + B = R_2 gE \quad \Rightarrow \quad R_2 gE = A\left(1 - \dfrac{R_2C_2}{R_1C_1}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{R_2 gER_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow \\ \dfrac{A}{R_1C_1} + \dfrac{B}{R_2C_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A\dfrac{R_2C_2}{R_1C_1} \quad \Rightarrow \quad B = -\dfrac{R_2 gER_2C_2}{R_1C_1 - R_2C_2} \end{cases}$$

$$v_2(t) = -R_2 gE + \frac{R_2 gE}{R_1C_1 - R_2C_2}\left[R_1C_1e^{-\frac{t}{R_1C_1}} - R_2C_2e^{-\frac{t}{R_2C_2}}\right] \quad t > 0$$

Per tracciarne il grafico (qualitativo) è opportuno conoscere anche il valore di $\left.\frac{d^2v_2}{dt^2}\right|_{0^+}$

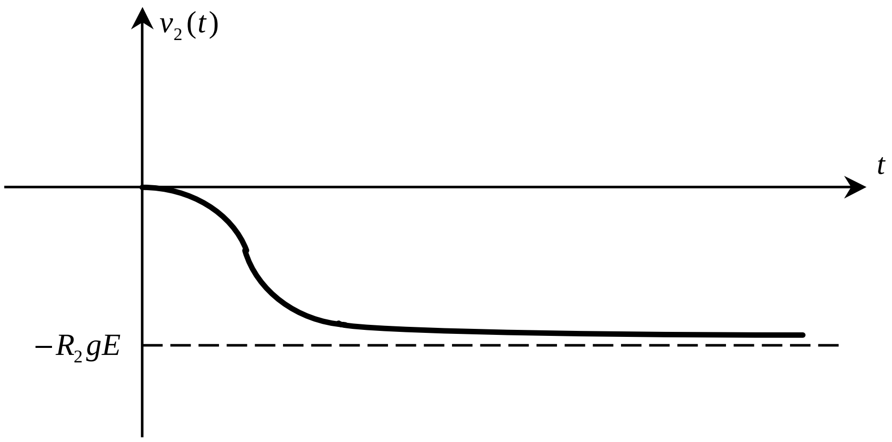
che si può ottenere per sostituzione diretta delle condizioni iniziali nella relazione i / o:

$$gE = -R_1C_1C_2\left.\frac{d^2v_2}{dt^2}\right|_{0^+} - 0 - 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{d^2v_2}{dt^2}\right|_{0^+} = -\frac{gE}{R_1C_1C_2} < 0$$

questo significa che $v_2(t)$ parte, per $t > 0$, dal valore zero, con tangente orizzontale e con concavità rivolta verso il basso.

Per $t \to \infty \quad v_2(t) \to -R_2 gE$ quindi la funzione presenta un asintoto $v_2 = -R_2 gE$.

In sostanza la $v_2(t)$ ha un andamento qualitativo del tipo:



Come anticipato, si poteva ottenere $v_2(t)$ risolvendo "sequenzialmente" la prima e poi la seconda delle (*).

Dalla prima, con $v_1(0^+) = 0$, si ha:

$$v_{1p} = E \qquad v_{1oa} = Ae^{-\frac{t}{R_1C_1}} \quad \Rightarrow \quad v_1(t) = E + Ae^{-\frac{t}{R_1C_1}}$$

$$\text{per } t = 0^+ \quad \Rightarrow \quad 0 = E + A \quad \Rightarrow \quad A = -E \quad \Rightarrow \quad v_1(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1C_1}}\right) \quad t > 0$$

La seconda assume la forma:

$$-gE\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1C_1}}\right) = C_2\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad -gR_2E\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1C_1}}\right) = C_2R_2\frac{dv_2}{dt} + v_2$$

$$R_2C_2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{R_2C_2} \qquad \text{frequenza libera}$$

L'integrale particolare è del tipo: $H + Ke^{-\frac{t}{R_1C_1}} \quad \Rightarrow$

$$-gR_2E\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1C_1}}\right) = -\frac{R_2C_2}{R_1C_1}Ke^{-\frac{t}{R_1C_1}} + H + Ke^{-\frac{t}{R_1C_1}} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -gR_2E = H \\ gR_2E = K\left(-\dfrac{R_2C_2}{R_1C_1} + 1\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{gR_2ER_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2}$$

$$v_{2p} = -gR_2E + \frac{gR_2ER_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2} e^{-\frac{t}{R_1C_1}}$$

$$v_{2oa} = Me^{-\frac{t}{R_2C_2}}$$

$$v_2(t) = -gR_2E + \frac{gR_2ER_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2} e^{-\frac{t}{R_1C_1}} + Me^{-\frac{t}{R_2C_2}}$$

Imponendo le condizioni in 0^+

$$0 = -gR_2E + \frac{gR_2ER_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2} + M \quad \Rightarrow \quad M = gR_2E - \frac{gR_2ER_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2}$$

$$v_2(t) = gR_2E\left(1 - \frac{R_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2}\right)e^{-\frac{t}{R_2C_2}} - gR_2E + \frac{gR_2ER_1C_1}{R_1C_1 - R_2C_2} e^{-\frac{t}{R_1C_1}} \qquad t > 0$$

che coincide, come è ovvio, con il risultato già trovato.