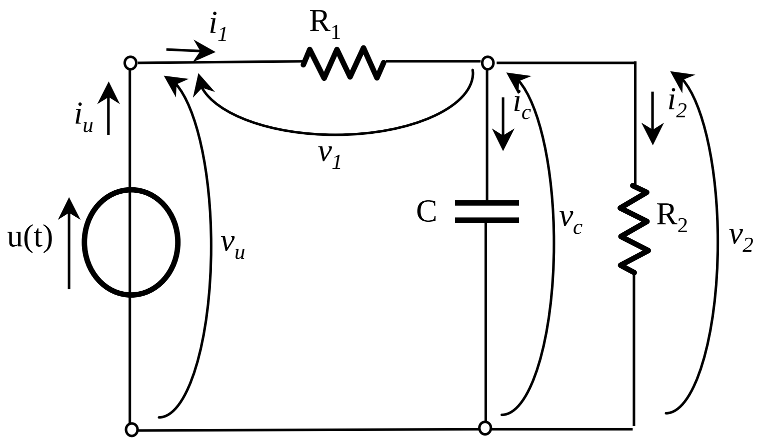
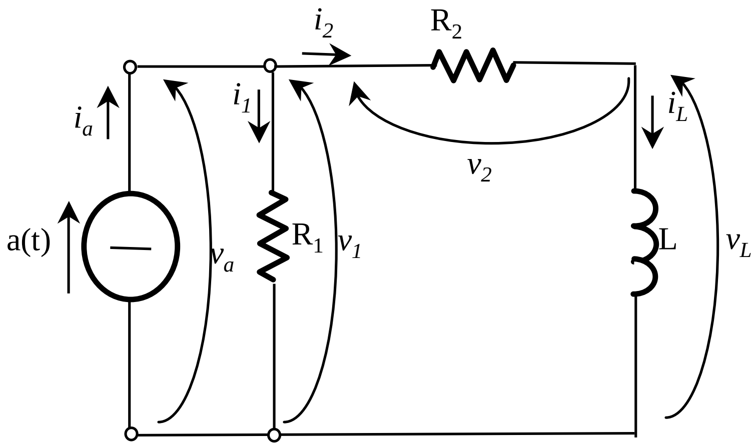
Esercitazione sull'Analisi nel Dominio del Tempo

ESERCIZIO 1

Scrivere le equazioni topologiche e quelle dei componenti necessarie per individuare tutte le variabili del circuito nei seguenti casi.

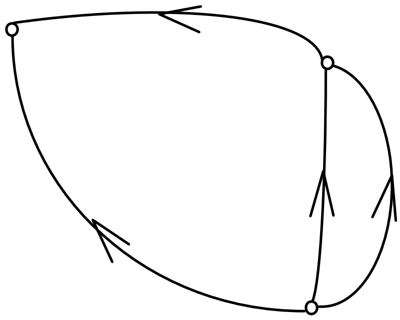




con u(t), a(t), R_1, R_2, C, L note.

Risoluzione

Per il primo circuito si ha:

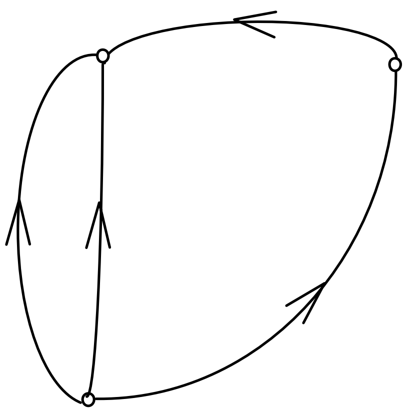


$$n=3 \quad l=4 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (n-1)=2 & \text{equazioni di co-ciclo} \\ (l\text{-}n+1)=2 & \text{equazioni di maglia} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad l=4 \ \text{ equazioni topologiche}$$

$l=4$ equazioni dei componenti

$$\text{equazioni topologiche} \begin{cases} i_u - i_1 = 0 \\ i_1 - i_c - i_2 = 0 \\ v_u - v_1 - v_c = 0 \\ v_c - v_2 = 0 \end{cases}; \quad \text{equazioni dei componenti} \begin{cases} v_u = \mathrm{u(t)} \\ v_1 = R_1 \cdot i_1 \\ i_c = C \cdot \dfrac{dv_c}{dt} \\ v_2 = R_2 \cdot i_2 \end{cases}$$

Per il secondo circuito si ha:



$$\begin{matrix} n = 3 \\ l = 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (n-1) = 2 & \text{equazioni di co-ciclo} \\ (l\text{-}n+1)=2 & \text{equazioni di maglia} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad l = 4 \ \text{ equazioni topologiche}$$

$l = 4$ equazioni dei componenti

In totale dovremo scrivere 4 equazioni topologiche ed altrettante equazioni del componente.

$$\text{equazioni topologiche} \begin{cases} i_a - i_2 - i_1 = 0 \\ i_2 - i_L = 0 \\ v_a - v_1 = 0 \\ v_1 - v_2 - v_L = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix}\text{equazioni dei} \\ \text{componenti}\end{matrix} \begin{cases} i_a = \mathrm{a(t)} \\ v_1 = R_1 \cdot i_1 \\ v_2 = R_2 \cdot i_2 \\ v_L = L \cdot \dfrac{di_L}{dt} \end{cases}$$

Essendo in entrambi i casi 8 le incognite del problema e precisamente una tensione ed una corrente per ciascun lato del grafo, le equazioni scritte sono sufficienti a risolvere il problema.

ESERCIZIO 2

Dato il circuito in fig. 1, determinare la relazione differenziale che lega i_L alla corrente $a(t)$

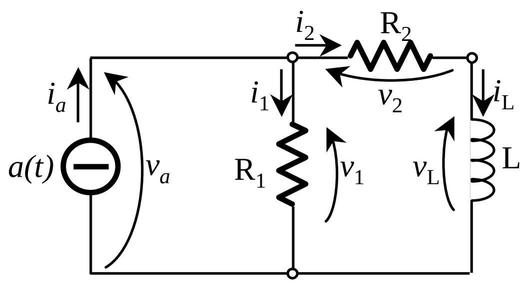


Fig 1

Risoluzione

Assumendo come ingresso la $a(t)$ assegnata e come uscita la i_L, scriviamo il seguente sistema di equazioni. Scriviamo quattro equazioni topologiche e altrettante dei componenti, le prime divise in due equazioni ai nodi e due alle maglie:

$$\begin{cases} i_a = i_1 + i_2 \\ i_2 = i_L \\ v_a = v_1 \\ v_1 = v_L + v_2 \end{cases}$$

equazioni topologiche

$$\begin{cases} i_a = a(t) \\ v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_L = L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases}$$

equazioni dei componenti

La variabile in uscita è la i_L: faremo in modo, servendoci del sistema di equazioni precedente, di ottenere una relazione in cui compaiono solo le variabili di ingresso e di uscita. Tale relazione viene detta RELAZIONE INGRESSO-USCITA.

Riportiamo, dunque, i passaggi algebrici che ci consentono di scrivere l'equazione cercata:

$$\begin{cases} i_a = i_1 + i_2 \\ i_2 = i_L \\ v_a = v_1 \\ v_1 = v_L + v_2 \end{cases}$$

equazioni topologiche

$$\begin{cases} i_a = a(t) \\ v_1 = R_1 i_1 \\ v_2 = R_2 i_2 \\ v_L = L\dfrac{di_L}{dt} \end{cases}$$

equazioni dei componenti

$$\begin{cases} a(t) = i_1 + i_2 \\ i_2 = i_L \\ R_1 i_1 = L\dfrac{di_L}{dt} + R_2 i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = a(t) - i_L \\ i_2 = i_L \\ R_1\left(a(t) - i_L\right) = L\dfrac{di_1}{dt} + R_2 i_L \end{cases} \Rightarrow$$

$$R_1 a(t) = R_1 i_L + L\frac{di_L}{dt} + R_2 i_L$$

ovvero:

$$\boxed{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot i_L + \frac{L}{R_1}\frac{di_L}{dt} = a(t)}$$

ESERCIZIO 3

Dato il circuito in fig. 2, e supposte le tensioni ai capi dei condensatori nulle in $t = 0^-$ $[v_1(0^-)= v_2(0^-)= v_3(0^-)= 0)]$:

- Mostrare che le variabili di stato effettive sono soltanto due
- Ottenere le equazioni nelle variabili di stato v_1 e v_2
- Per $e(t) = f(t) \cdot \delta_{-1}(t)$ con $f(0^+) \neq 0$, determinare $v_1(0^+)$ e $v_2(0^+)$
- Ricavare la relazione ingresso-uscita scegliendo come uscita la variabile di ingresso $v_1(t)$

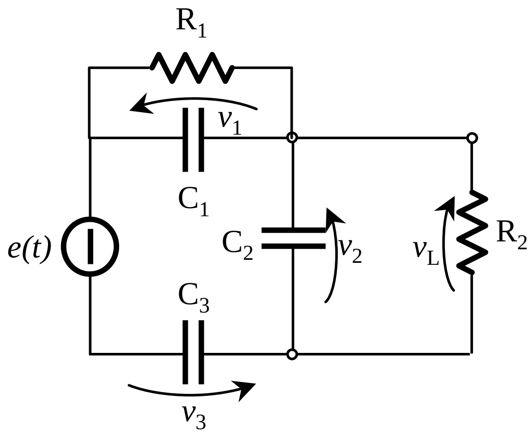


Fig 2

Risoluzione

Il sistema di equazioni complessivo si può ridurre al seguente:

$$\begin{cases} e = v_1 + v_2 + v_3 \\ C_1 \dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{v_1}{R_1} = C_3 \dfrac{dv_3}{dt} \\ C_2 \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_2} = C_3 \dfrac{dv_3}{dt} \end{cases}$$

poiché dalla prima equazione risulta $v_3 = e - v_1 - v_2$ le variabili di stato effettive sono solo due delle tre incognite. Come variabili di stato prendiamo v_1 e v_2. Sostituiamo allora la v_3 nella seconda e nella terza equazione; otteniamo:

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dv_1}{dt} + \dfrac{v_1}{R_1} = C_3 \cdot \left(\dfrac{de}{dt} - \dfrac{dv_1}{dt} - \dfrac{dv_2}{dt} \right) \\ C_2 \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_2} = C_3 \cdot \left(\dfrac{de}{dt} - \dfrac{dv_1}{dt} - \dfrac{dv_2}{dt} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (C_1 + C_3) \cdot \dfrac{dv_1}{dt} + C_3 \cdot \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_1}{R_1} = C_3 \cdot \dfrac{de}{dt} \\ C_3 \cdot \dfrac{dv_1}{dt} + (C_2 + C_3) \cdot \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{v_2}{R_2} = C_3 \cdot \dfrac{de}{dt} \end{cases}$$

che contengono solo le variabili di stato v_1 e v_2. Integrando tra 0^- e 0^+ otteniamo:

$$\begin{cases} (C_1 + C_2) \cdot v_1(0^+) + C_3 \cdot v_2(0^+) = C_3 \cdot e(0^+) \\ C_3 \cdot v_1(0^+) + (C_2 + C_3) \cdot v_2(0^+) = C_3 \cdot e(0^+) \end{cases}$$

con $e(0^+)$ nota per ipotesi. Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} v_1(0^+) = \dfrac{C_1C_2 \cdot e(0^+)}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} \\ v_2(0^+) = \dfrac{C_1C_3 \cdot e(0^+)}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} \end{cases}$$

Deriviamo infine la relazione ingresso-uscita per la variabile di stato v_1. Dalle due equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{1}{C_3} \cdot \left[C_3 \cdot \dfrac{de}{dt} - (C_1 + C_3) \cdot \dfrac{dv_1}{dt} - \dfrac{v_1}{R_1} \right] \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{1}{(C_2 + C_3)} \left[C_3 \cdot \dfrac{de}{dt} - C_3 \cdot \dfrac{dv_1}{dt} - \dfrac{v_2}{R_2} \right] \end{cases} \qquad (*)$$

$$\frac{1}{C_3} \cdot \left[C_3 \cdot \frac{de}{dt} - (C_1 + C_3) \cdot \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1}{R_1} \right] = \frac{1}{(C_2 + C_3)} \left[C_3 \cdot \frac{de}{dt} - C_3 \cdot \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_2}{R_2} \right]$$

$$\left(\frac{C_1 + C_3}{C_3} - \frac{C_3}{C_2 + C_3} \right) \cdot \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1C_3} - \frac{v_2}{R_2 \cdot (C_2 + C_3)} = \left(1 - \frac{C_3}{C_2 + C_3} \right) \cdot \frac{de}{dt}$$

$$\frac{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}{C_3 \cdot (C_2 + C_3)} \cdot \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1C_3} - \frac{v_2}{R_2 \cdot (C_2 + C_3)} = \frac{C_2}{C_2 + C_3} \cdot \frac{de}{dt}$$

per eliminare v_2 dall'equazione deriviamo rispetto al tempo

$$\frac{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}{C_3 \cdot (C_2 + C_3)} \cdot \frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{1}{R_1C_3} \frac{dv_1}{dt} - \frac{1}{R_2 \cdot (C_2 + C_3)} \frac{dv_2}{dt} = \frac{C_2}{C_2 + C_3} \cdot \frac{d^2e}{dt^2}$$

e sostituiamo l'espressione di $\frac{dv_2}{dt}$ che ricaviamo dalla (*)

$$\frac{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}{C_3 \cdot (C_2 + C_3)} \cdot \frac{d^2v_1}{dt^2} + \frac{1}{R_1C_3}\frac{dv_1}{dt} - \frac{1}{R_2 \cdot (C_2 + C_3)} \cdot \frac{1}{C_3} \cdot \left[C_3 \cdot \frac{de}{dt} - (C_1 + C_3) \cdot \frac{dv_1}{dt} - \frac{v_1}{R_1} \right] = \frac{C_2}{C_2 + C_3} \cdot \frac{d^2e}{dt^2}$$

$$\frac{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}{C_3 \cdot (C_2 + C_3)} \cdot \frac{d^2v_1}{dt^2} + \left[\frac{1}{R_1C_3} + \frac{1}{R_2C_3} \cdot \frac{C_1 + C_3}{C_2 + C_3} \right] \frac{dv_1}{dt} - \frac{1}{R_1R_2C_3 \cdot (C_2 + C_3)} \cdot v_1 = \frac{C_2}{C_2 + C_3} \cdot \frac{d^2e}{dt^2}$$

La determinazione delle due frequenze libere è concettualmente banale, ma onerosa finché i parametri della rete sono espressi in modo "letterale". Diventa facile quando alle R e C si sostituiscono i valori numerici

ESERCIZIO 4

Dato il circuito in fig. 3, e supposto nullo lo stato di tutti i componenti in $t = 0$:

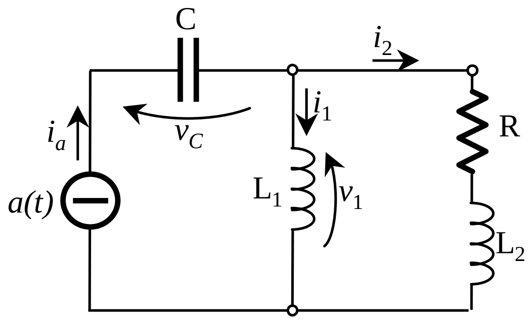
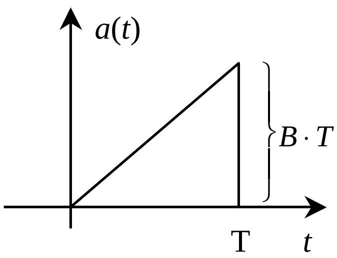


Fig 3

$$\begin{cases} v_C(0^-) = 0 \\ i_1(0^-) = 0 \\ i_2(0^-) = 0 \end{cases}$$

- Mostrare che le variabili di stato effettive per la rete sono soltanto due
- Ottenere le equazioni nelle variabili di stato v_C e i_2
- Sia $a(t) = f(t)\cdot\delta_{-1}(t)$ con $f(0^+) \neq 0$. Determinare $v_C(0^+)$ e $i_2(0^+)$
- Per $a(t) = A\cdot\delta_{-1}(t)$ (ingresso a gradino) determinare $v_C(t)$, $i_2(t)$ e ricavare $i_1(t)$. Tracciarne i grafici
- Per $a(t) = A\cdot\cos(\omega t)\cdot\delta_{-1}(t)$ ottenere $v_C(t)$, $i_2(t)$ e tracciarne i grafici (qualitativi)
- Per $a(t) = B\cdot t\cdot\delta_{-1}(t)$ (ingresso a rampa) ottenere $v_C(t)$ e $i_2(t)$ impiegando i risultati già disponibili.tracciare i grafici
- Si consideri, infine, il seguente ingresso $a(t)$:



$$\begin{cases} a(t) = Bt\cdot\delta_{-1}(t) & per\ t < T \\ a(t) = 0 & per\ t > T \end{cases}$$

ottenere la risposta $i_2(t)$ impiegando i risultati già disponibili

Risoluzione

- I componenti dotati di memoria sono tre, ma due di questi sono induttori che convergono in un co-ciclo LA. La corrispondente equazione ci serve per eliminare una delle variabili di stato, che si riducono quindi a due.

$$a(t) = i_1 + i_2 \qquad \text{Equazione del co-ciclo LA}$$

- Otteniamo le equazioni nelle variabili di stato v_C e i_2:

$$\begin{cases} a(t) = i_1 + i_2 \\ L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} = R \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \\ a(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{da}{dt} - \frac{di_2}{dt} \\ L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} = R \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \\ a(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_1 \cdot \left(\frac{da}{dt} - \frac{di_2}{dt} \right) = R \cdot i_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \\ a(t) = C \cdot \frac{dv_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} (L_1 + L_2) \cdot \frac{di_2}{dt} = -R \cdot i_2 + L_1 \cdot \frac{da}{dt} \\ C \cdot \frac{dv_C}{dt} = a(t) \end{cases}} \qquad (*)$$

equazioni nelle variabili di stato v_C e i_2

- Otteniamo lo stato in (0^+) delle variabili di stato v_C e i_2 nell'ipotesi:

$$a(t) = f(t) \cdot \delta_{-1}(t) \qquad \text{con } f(0^+) \neq 0; \quad i_2(0^-) = 0; \qquad v_C(0^-) = 0;$$

Integriamo l'equazione di stato tra (0^-) e (0^+):

$$\begin{cases} (L_1 + L_2) \cdot [i_2(0^+) - \cancel{i_2(0^-)}] = -R \cancel{\int_{0^-}^{0^+} i_2} \cdot dt + L_1 \cdot [a(0^+) - \cancel{a(0^-)}] \\ C \cdot [v_C(0^+) - \cancel{v_C(0^-)}] = \cancel{\int_{0^-}^{0^+}} a(t) \cdot dt \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot f(0^+) \\ v_C(0^+) = 0 \end{cases}}$$

stato del circuito in 0^+

- Cerchiamo ora l’andamento delle variabili di stato nel caso di ingresso a gradino e stato in 0^- nullo

$$a(t) = A \cdot \delta_{-1}(t) \qquad\qquad i_2(0^-) = 0; \qquad v_C(0^-) = 0;$$

Dalla prima delle (*) ricaviamo l’omogenea per il calcolo di i_2:

$$\left(L_1 + L_2\right) \cdot \frac{di_2}{dt} + R \cdot i_2 = 0$$

con l’equazione caratteristica: $\left(L_1 + L_2\right) \cdot \lambda + R = 0$

Quindi la i_2 avrà la forma del tipo: $i_2 = K \cdot e^{-\frac{R}{L_1+L_2}\cdot t} + i_{2p}$

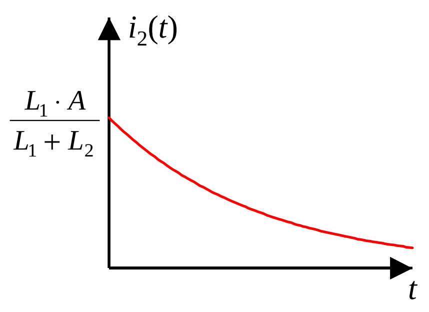
con i_{2p} integrale particolare. Questo integrale particolare si trova facilmente pensando che il secondo membro dell’equazione differenziale è la derivata di una funzione sempre costante a destra dell’origine; l’integrale particolare sarà quindi una funzione nulla:

$$i_{2p}(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad i_2(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L_1+L_2}\cdot t}$$

Per determinare la costante K possiamo servirci del risultato ottenuto al punto precedente, essendo questo il caso particolare di funzione $f(t)$ costante:

$$i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot A = K \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot A$$

$$\boxed{i_2(t) = \frac{L_1 \cdot A}{L_1 + L_2} \cdot e^{-\frac{R}{L_1+L_2}\cdot t}}$$

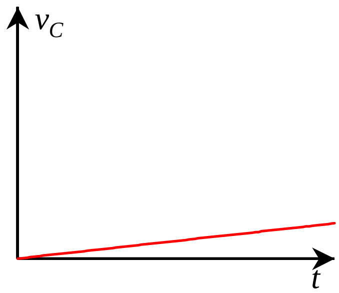


Dalla seconda delle (*) ricaviamo direttamente l'andamento *di* v_C:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} A \cdot dt + v_C(0^+) \qquad \text{per } t > 0$$

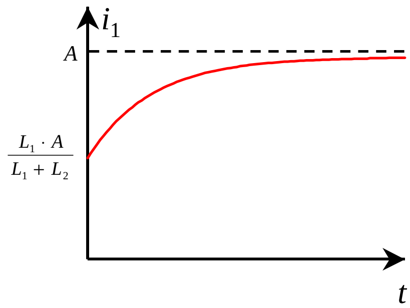
anche in questo caso, per lo stato iniziale, vale il risultato ottenuto al punto precedente:

$$\boxed{v_C(t) = \frac{A}{C} \cdot t}$$

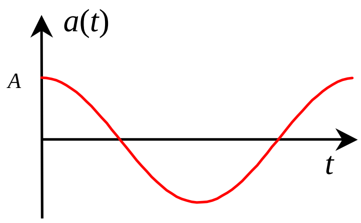


mentre la i_1 si ottiene come differenza tra la a(t) e i_2 :

$$\boxed{i_1(t) = A \cdot \left[1 - \frac{L_1 \cdot}{L_1 + L_2} \cdot e^{-\frac{R}{L_1+L_2} \cdot t}\right]}$$



- Ingresso cosinusoidale:



$a(t) = A \cdot \cos(\omega t) \cdot \delta_{-1}(t)$

$f(0^+) = A$

La frequenza libera è già nota: $$\lambda = -\frac{R}{L_1 + L_2}$$

L'integrale particolare è del tipo: $$i_{2p} = H\cos(\omega \cdot t) + K\,\text{sen}(\omega \cdot t)$$

la cui derivata vale: $$\frac{di_p}{dt} = \omega \cdot [-H\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t) + K\cos(\omega \cdot t)]$$

e sostituendo nell'equazione differenziale:

$$(L_1 + L_2)\omega \cdot [-H\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t) + K\cos(\omega \cdot t)] + R \cdot [H\cos(\omega \cdot t) + K\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t)] = L_1 A[-\omega\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t)]$$

da cui ricaviamo le costanti H e K uguagliando i termini in seno e quelli in coseno:

$$\begin{cases} -\omega \cdot (L_1 + L_2)H + RK = -\omega \cdot L_1 A \\ \omega \cdot (L_1 + L_2)K + RH = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} K = \dfrac{-\omega \cdot L_1 AR}{R^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2} \\ H = \dfrac{\omega \cdot L_1 (L_1 + L_2) A}{R^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2} \end{cases}$$

$$i_{2p} = \frac{\omega \cdot L_1 A}{R^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}\left[\omega \cdot (L_1 + L_2)\cos(\omega \cdot t) - R\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t)\right]$$

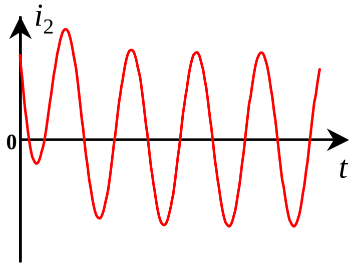
Resta da definire la costante dell'integrale generale in base alle condizioni iniziali:

$$i_2(t) = N \cdot e^{\frac{-R}{L_1 + L_2} \cdot t} + i_{2p} \qquad i_2(0^+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} A = N + i_{2p}(0^+)$$

$$N = \frac{AL_1}{L_1 + L_2} - \frac{A\omega^2 L_1 (L_1 + L_2)}{R^2 + \omega^2 \cdot (L_1 + L_2)^2}$$

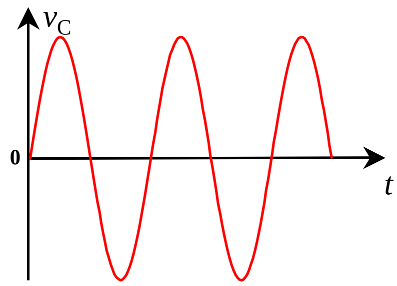
$$\boxed{i_2(t) = A \cdot \left\{ \left[\frac{L_1}{L_1 + L_2} - \frac{\omega^2 L_1 (L_1 + L_2)}{R^2 + \omega^2 \cdot (L_1 + L_2)^2} \right] \cdot e^{\frac{-R}{L_1 + L_2} \cdot t} + \frac{\omega \cdot L_1}{R^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}\left[\omega \cdot (L_1 + L_2)\cos(\omega \cdot t) - R\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t)\right] \right\}}$$

si noti la linearità della risposta nello stato zero. La i_2 è data dalla somma di un termine transitorio e di uno sinusoidale; per $t >> (L_1+L_2)/R$ l'unico termine significativo è l'integrale particolare (regime sinusoidale permanente).

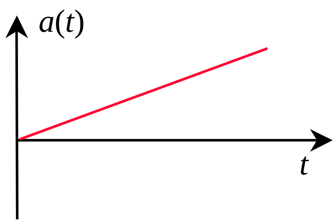


Il calcolo della v_C è particolarmente agevole:

$$\boxed{v_C = v_C(0^+) + \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} a(\tau)\cdot d\tau = \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} A\cos(\omega\cdot\tau)\cdot d\tau = \frac{1}{\omega\cdot C}A\,\mathrm{sen}(\omega\cdot t)}$$



- Ingresso a rampa:

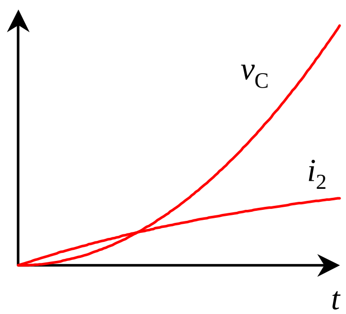


$a(t) = B\cdot t\cdot \delta_{-1}(t)$

Poiché la risposta nello stato zero, per reti lineari tempo-invarianti, è lineare, basta tenere conto della risposta al gradino e, nel caso della rampa, integrare con gli opportuni coefficienti moltiplicativi. Riferendoci quindi ai risultati ottenuti in precedenza per ingresso a gradino, otteniamo:

$$\begin{cases} i_2 = \dfrac{BL_1}{L_1+L_2}\cdot\displaystyle\int_0^t e^{-\frac{R\cdot\tau}{L_1+L_2}}d\tau = \dfrac{BL_1}{L_1+L_2}\left(-\dfrac{L_1+L_2}{R}\right)\cdot\left[e^{-\frac{R\cdot\tau}{L_1+L_2}}-1\right] \\ v_C = \dfrac{B}{C}\displaystyle\int_0^t \tau\cdot d\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{B}{C}t^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} i_2 = \dfrac{BL_1}{R}\cdot\left[1-e^{-\frac{R\cdot\tau}{L_1+L_2}}\right] \\ v_C = \dfrac{B}{2C}t^2 \end{cases}}$$



Per quanto riguarda poi la i_1:

$$\boxed{i_1(t) =} a(t) - i_2 = B \cdot t - \frac{BL_1}{R}\left[1 - e^{\frac{-R \cdot t}{L_1 + L_2}}\right] = \boxed{B \cdot \left[t - \frac{L_1}{R} + \frac{L_1}{R} \cdot e^{\frac{-R \cdot t}{L_1 + L_2}}\right]}$$

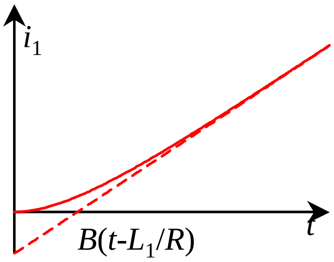
al crescere di t il termine esponenziale diventa trascurabile, e la curva si confonde con la retta di equazione

$$y = B \cdot t - \frac{B \cdot L_1}{R}$$

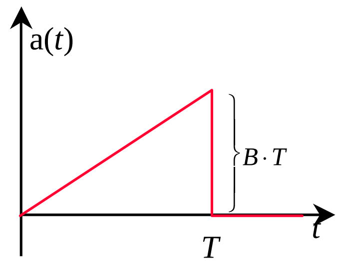
che ne rappresenta l'asintoto. La i_1 approssima questo asintoto da "sopra" a causa del termine

$$\frac{L_1}{R} \cdot e^{\frac{-R \cdot t}{L_1 + L_2}}$$

che è sempre maggiore di 0.

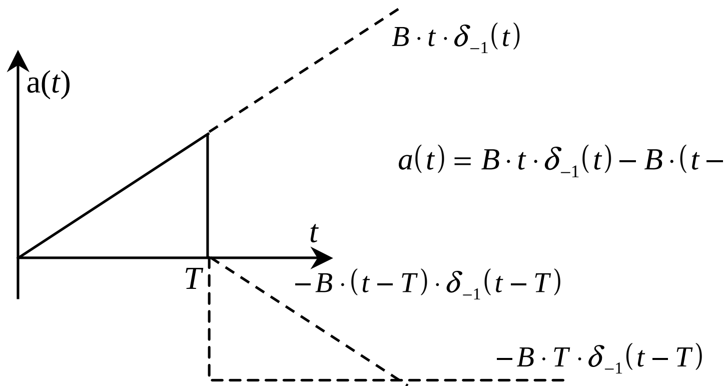


- Ingresso a triangolare:



$$a(t) = \begin{cases} B \cdot t \cdot \delta_{-1}(t) & per\ t < T \\ 0 & per\ t > T \end{cases}$$

L'ingresso si può ottenere come combinazione di due rampe e un gradino opportunamente traslati nel tempo:



$$a(t) = B \cdot t \cdot \delta_{-1}(t) - B \cdot (t - T) \cdot \delta_{-1}(t - T) - B \cdot T \cdot \delta_{-1}(t - T)$$

per la linearità del sistema la risposta all'ingresso $a(t)$ così fatto può essere calcolato come somma delle risposte ad ogni singolo termine. Indicando con:

$$i_{2g} = \left[\frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot e^{\frac{-Rt}{L_1+L_2}} \right] \cdot \delta_{-1}(t)$$

la i_2 in risposta al gradino unitario

$$i_{2r} = \frac{L_1}{R}\left[1 - e^{-\frac{R \cdot t}{L_1+L_2}} \right] \cdot \delta_{-1}(t)$$

la i_2 in risposta alla rampa di pendenza unitaria

la risposta i_2 all'ingresso triangolare è:

$$\boxed{i_2 = B \cdot i_{2r}(t) - B \cdot i_{2r}(t-T) - B \cdot T \cdot i_{2g}(t-T)}$$

per le altre grandezze si procede allo stesso modo.

NOTE:

- La rete in esame è nello stato zero, quindi le relazioni ingresso-uscita sono lineari tempo-invarianti. Se $y(t)$ è la risposta a $u(t)$, la risposta alla derivata prima di $u(t)$ è la derivata prima di $y(t)$, e la risposta all'integrale di $u(t)$ è l'integrale di $y(t)$.
- La rampa è l'integrale del gradino
- Qualunque funzione lineare a tratti può essere decomposta in gradini e rampe e si può quindi scrivere in forma generale come:

$$u(t) = \sum_i G_i \cdot \delta_{-1}(t - t_i) + \sum_j R_j \cdot \delta_{-2}(t - t_j)$$

Per la linearità e tempo-invarianza della relazione ingresso-uscita la risposta alla $u(t)$ può essere ottenuta come somma delle risposte relative a ciascuno dei termini della sommatoria a secondo membro. Allora se $h(t)$ è la risposta all'impulso, $k(t)$ l' integrale di $h(t)$ che rappresenta quindi la risposta al gradino, $l(t)$ l'integrale di $k(t)$ che rappresenta quindi la risposta alla rampa, la risposta allingresso lineare a tratti assume la forma:

$$y(t) = \sum_i G_i \cdot k(t - t_i) + \sum_j R_j \cdot l(t - t_j)$$

- Siano due ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e le relative uscite, con lo stato della rete nullo, siano $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Se la risposta a un ingresso $u_3=\alpha \cdot u_1+\beta \cdot u_2$ è $y_3=\alpha \cdot y_1+\beta \cdot y_2$ la rete è lineare.
- Se la risposta a un ingresso $u(t)$ è $y(t)$ e la risposta allo stesso ingresso traslato $u(t-T)$ è $y(t-T)$, la rete è tempo-invariante
- Si dice che una rete è nello stato zero quando tutti gli accumulatori di energia si trovano a livello zero, cioè ciascuno di essi contiene energia nulla.
- Sia:

$$a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_0 \cdot u$$

una relazione ingresso-uscita. La soluzione dell'equazione sarà:

$$y(t) = y_{oa}(t) + y_p(t)$$

in cui la $y_p(t)$ è una qualsiasi funzione che soddisfa la relazione ingresso-uscita per t > 0 e prende il nome di **integrale particolare**, mentre $y_{oa}(t)$ è la soluzione della relazione ingresso-uscita quando il secondo membro è uguale a zero (omogenea associata) . L'equazione caratteristica:

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

ha n radici. Nell'ipotesi che siano tutte distinte l'integrale generale si scrive nella forma:

$$y_{oa} = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot e^{\lambda_i \cdot (t-t_0)}$$

se la j-esima radice avesse molteplicità q comparirebbero termini del tipo (se t_0=0):

$$A_j \cdot e^{\lambda_j \cdot t} + A_{j+1} \cdot t \cdot e^{\lambda_j \cdot t} + \cdots + A_{j+q-1} \cdot t^{q-1} \cdot e^{\lambda_j \cdot t}$$

Per una coppia di radici complesse coniugate $a \pm jb$:

$$y_{oa}(t) = e^{at}\left(A \cos bt + B \operatorname{sen} bt\right)$$

Per una coppia di radici immaginarie pure $\pm jb$:

$$y_{oa}(t) = A \cos bt + B \operatorname{sen} bt$$

Per q coppie uguali di radici complesse coniugate $\lambda = a \pm jb$ compariranno termini del tipo:

$$e^{at}\left\{\left(A_1 + A_2 t + \ldots + A_q t^{q-1}\right)\cos bt + \left(B_1 + B_2 t + \ldots + B_q t^{q-1}\right)\operatorname{sen} bt\right\}$$

Le costanti si determinanoimponendo che la $y(t)$ e le sue derivate fino all'ordine n-1 assumano in $t = t_0^+$ i valori noti. L'insieme di tali valori può essere assunto come stato del circuito

- Se $u(t)$ è identicamente nulla fino a $t = t_0^+$ e la rete è nello stato zero per tutti gli istanti precedenti t_0 la relazione ingresso-uscita rappresenta una relazione lineare tempo-invariante

- **Compensazione (o identificazione) degli impulsi** : se è assegnata un'uguaglianza $\varphi(t) = \psi(t)$ e $\psi(t)$ presenta, in $t = t_0$ un impulso di ordine non negativo $A\cdot\delta_{-1}(t- t_0)$, l'uguaglianza con $\varphi(t)$ può essere verificata solo se in t_0 anche $\varphi(t)$ presenta un impulso dello stesso ordine e con uguale costante moltiplicativa.

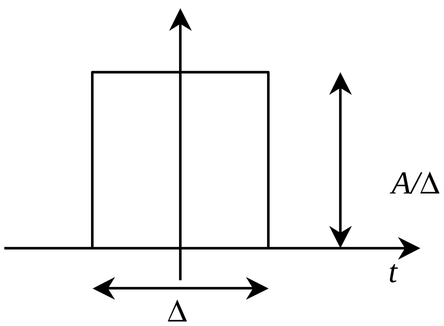
- Se ci si trova di fronte a segnali $u(t)$ contenenti impulsi di ordine zero in diversi istanti, si può, se la relazione ingresso-uscita è lineare e tempo-invariante, ometterli e cercare la risposta al segnale privato degli impulsi. Trovata tale risposta, basterà aggiungervi la risposta all'impulso traslata in tutti gli istanti in cui gli impulsi si sono verificati.

- Se l'ordine massimo della derivata che compare nel secondo membro della relazione ingresso-uscita (m) è maggiore dell'ordine massimo del primo membro (n), allora l'uscita è più impulsiva dell'ingresso

- L'ordine più elevato di un impulso nella risposta è uguale all'ordine più elevato degli impulsi all'ingresso aumentato di (m-n).

- Si definisce $A\cdot\delta(t)$ come il limite di $A\cdot\delta_\Delta(t)$ quando Δ tende a zero con A=1 si ottiene l'impulso unitario di ordine zero.

$\delta_0(t)$ o $\delta^{(0)}(t)$ o $\delta(t)$



Affinché un impulso sia Laplace-trasformabile deve valere la:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\delta(t-t_0)\cdot dt = f(t_0)$$ con $f(t)$ funzione finita

$$L\left[\delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s}; \quad L\left[\delta_{-2}(t)\right] = \frac{1}{s^2}; \quad \cdots$$

$$L\left[\delta^{(1)}(t)\right] = s; \quad L\left[\delta^{(2)}(t)\right] = s^2; \quad \cdots$$