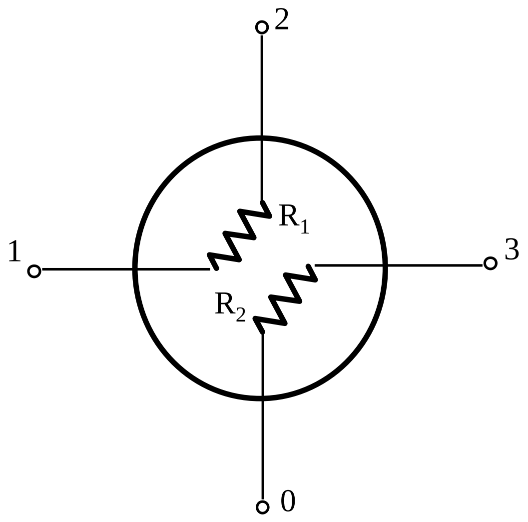
Esercitazione sulle Equazioni dei Componenti

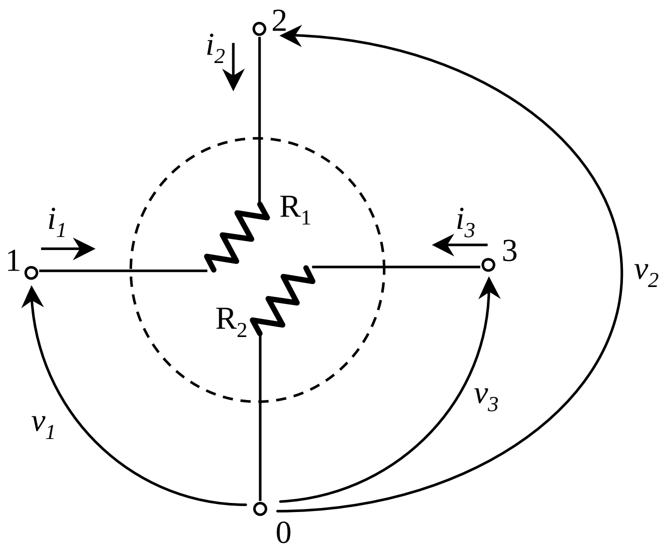
ESERCIZIO 1

Nella figura seguente è rappresentato un quadrupolo la cui struttura interna alla superficie limite contiene i resistori R_1 e R_2. Determinare le equazioni del componente utilizzando come variabili descrittive quelle corrispondenti alla convenzione degli utilizzatori, scelto come "comune" il morsetto 0.



Risoluzione

Poiché si tratta di un componente a 4 terminali, dovremo individuare $n-1=4-1=3$ equazioni del componente: esse devono essere espresse in termini di $v_1, v_2, v_3, i_1, i_2, i_3$ che vengono prese nel modo seguente, rispettando la convenzione degli utilizzatori:



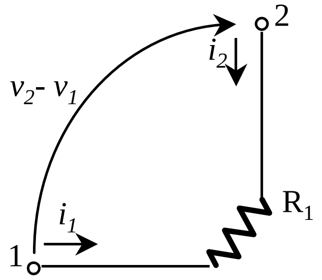
Un’equazione è certamente:

$v_3 = R_2 \cdot i_3$

Si osservi poi che i morsetti 1 e 2 sono collegati tra loro solo attraverso il bipolo R_1. Allora la seconda equazione sarà:

$i_1 + i_2 = 0$

La terza equazione si può dedurre facilmente osservando che la tensione e la corrente associate al bipolo R_1 sono $(v_2 - v_1), i_2$ per cui:



$$v_2 - v_1 = R_1 \cdot i_2$$

Riassumendo, le tre equazioni sono:

$$\begin{cases} v_3 = R_2 \cdot i_3 \\ i_1 + i_2 = 0 \\ v_2 - v_1 = R_1 \cdot i_2 \end{cases}$$

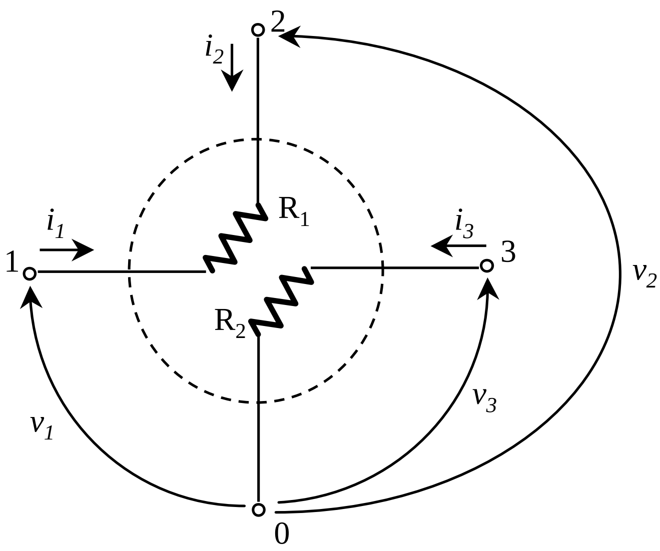
A partire da esse si possono discutere le possibili basi di definizione:

i_3	i_2	i_1	non ammissibile
		v_1	ammissibile
	v_2	i_1	ammissibile
		v_1	ammissibile
v_3	i_2	i_1	non ammissibile
		v_1	ammissibile
	v_2	i_1	ammissibile
		v_1	ammissibile

ESERCIZIO 2

Utilizzando le equazioni del componente di cui all'esercizio precedente dimostrare che la potenza complessiva entrante nella superficie limite è pari a quella dissipata in R_1 ed R_2.

Risoluzione



$$\begin{cases} v_3 = R_2 \cdot i_3 \\ i_1 + i_2 = 0 \\ v_2 - v_1 = R_1 \cdot i_2 \end{cases}$$

<u>La potenza assorbita dal componente è data dalla somma dei prodotti tensione - corrente delle sue variabili descrittive, date con la convenzione normale</u>. Nel caso in esame le variabili descrittive sono state appunto prese con la convenzione normale per cui la potenza entrante nella superficie limite è:

$$p = v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2 + v_3 \cdot i_3$$

Dalle equazioni del componente essa diventa:

$$p = v_1 \cdot i_1 + (v_1 + R_1 \cdot i_2) \cdot i_2 + R_2 \cdot i_3^2 = v_1 \cdot i_1 + (v_1 - R_1 \cdot i_1) \cdot (-i_1) + R_2 \cdot i_3^2 =$$
$$= v_1 \cdot i_1 - v_1 \cdot i_1 + R_1 \cdot i_1^2 + R_2 \cdot i_3^2 = R_1 \cdot i_1^2 + R_2 \cdot i_3^2 \qquad \text{c.v.d.}$$

Infatti il componente è puramente dissipativo; l'energia accumulata in qualunque intervallo di tempo è nulla e la potenza assorbita è pari alla somma delle potenze dissipate nei singoli resistori che, per la legge di Joule, è pari al prodotto della resistenza per il quadrato della corrente che attraversa il resistore. Poiché fra i resistori convenzionali è $R>0$, allora la quantità $R \cdot i^2 \geq 0$ sempre. L'energia dissipata in un determinato intervallo di tempo è:

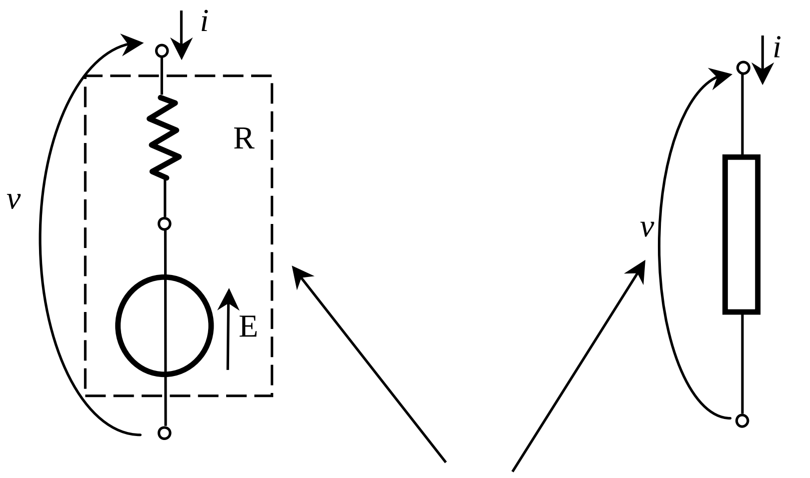
$$\Delta w = \int_{t_0}^{t} p(\tau) \cdot d\tau = R \cdot i^2 \cdot (t - t_0) > 0 \qquad \forall \text{ intervallo}$$

Un componente a *n* terminali si dice passivo se:

$$\int_{-\infty}^{t} \sum_{i=1}^{n-1} v_i \cdot i_i \cdot d\tau \geq 0 \qquad \forall t$$

ESERCIZIO 3

Determinare l'equazione descrittiva e tracciare la caratteristica del bipolo risultante dalla composizione dei seguenti due componenti:

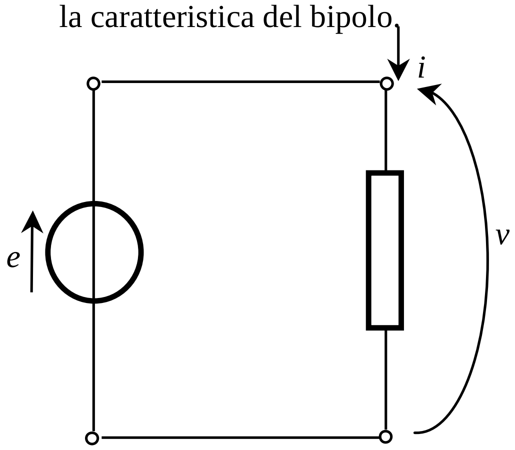


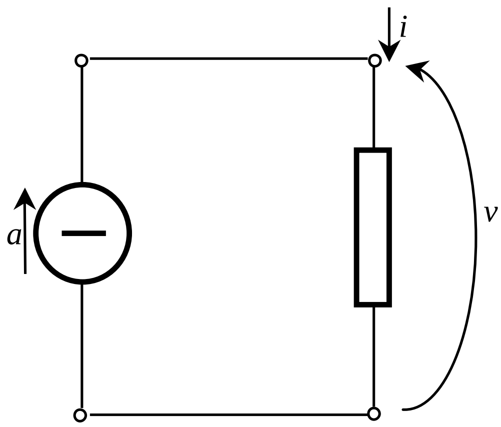
SUPERFICIE LIMITE RISULTANTE

Risoluzione

Anche se l'esempio è semplice conviene sviluppare la metodologia necessaria in modo dettagliato.

Determinare la caratteristica di un componente, in particolare di un bipolo, significa imporre dall'esterno, con un particolare circuito (generatore) una delle variabili descrittive (purchè la base, a priori incognita, lo consenta) e individuare l'altra variabile descrittiva. Al variare della variabile imposta, l'altra verificherà l'equazione descrittiva, la cui rappresentazione grafica è la caratteristica del bipolo.

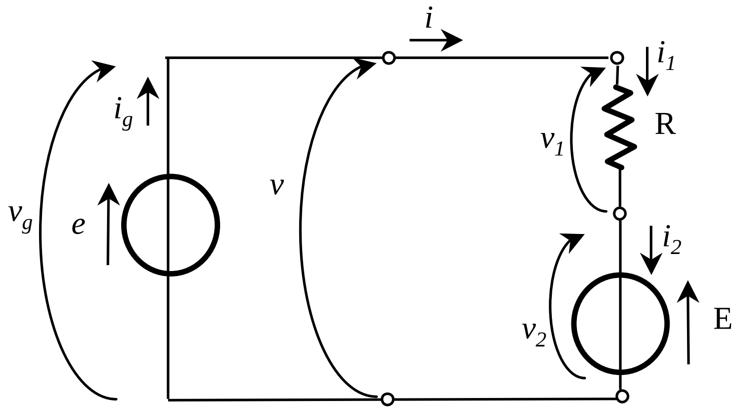




Al variare di $v = e$ si rappresenta $i = f(v)$ (purchè sia definito su base tensione).

Al variare di $i = a$ si rappresenta $v = f(i)$ (purchè sia definito su base corrente).

In questo caso, supponendo ad esempio che il bipolo sia definito su base tensione:



Equazioni topologiche

$$\begin{cases} v = v_1 + v_2 \\ i = i_1 \\ i_1 = i_2 \\ \\ v_g = v \\ i_g = i \end{cases}$$

Equazioni dei componenti

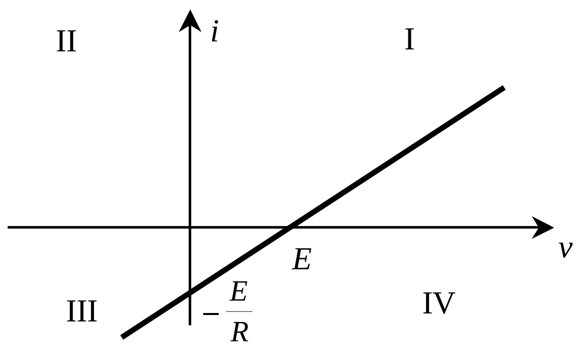
$$\begin{cases} v_g = e \\ v_1 = R \cdot i_1 \\ v_2 = E \end{cases}$$

sostituendo si ha:

$$v(= e) = R \cdot i + E$$

ove v è la variabile indipendente, controllata dal generatore e, mentre i è la variabile dipendente.

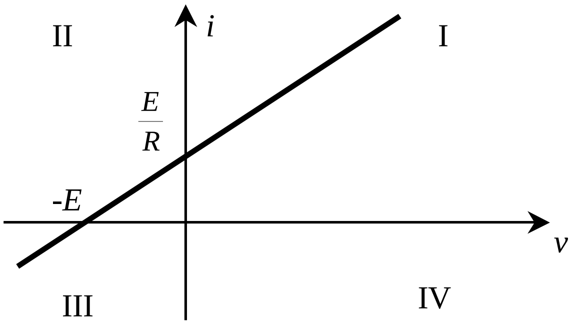
La caratteristica $i(v)$ è allora (supponendo E>0): $\quad i = \frac{v}{R} + \frac{E}{R}$



Il bipolo è definito su entrambe le basi, ed è ATTIVO: infatti la caratteristica passa anche nel IV quadrante, ove $v \cdot i < 0 \quad \Rightarrow$ si può avere

$$\int_{-\infty}^{t} v \cdot i \cdot d\tau < 0$$

Verificare che per E<0 il bipolo è ancora attivo (la caratteristica passa nel II quadrante):

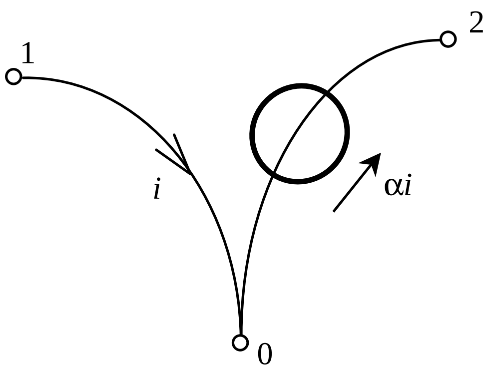


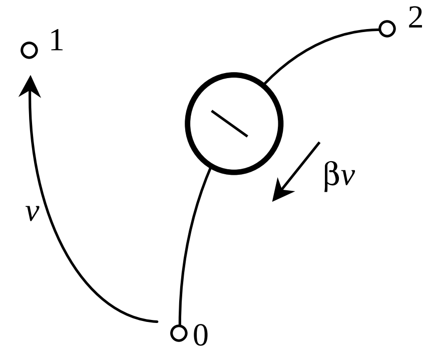
$$v = R \cdot i - E$$

$$i = \frac{v}{R} - \frac{E}{R}$$

ESERCIZIO 4

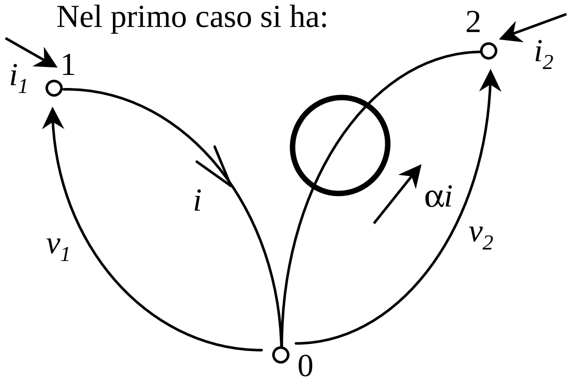
Ricavare le equazioni del componente, per i due generatori pilotati rappresentati sopra. Trovare poi le basi di definizione e verificare che sono entrambi componenti attivi.





Risoluzione

Nel primo caso si ha:

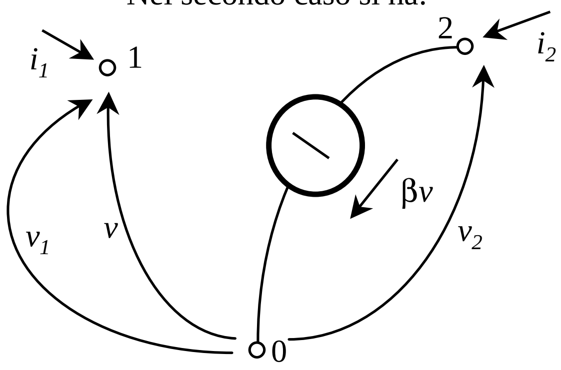


Equazioni del componente:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \alpha \cdot i_1 \end{cases}$$

base $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ (è l'unica possibile)

Nel secondo caso si ha:

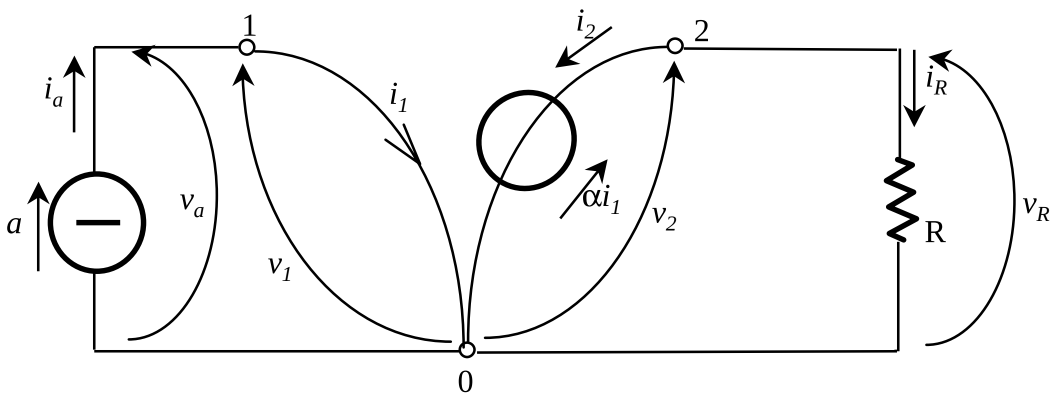


Equazioni del componente:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = \beta \cdot v_1 \end{cases}$$

base $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ (è l'unica possibile)

PASSIVITA': Consideriamo il primo generatore pilotato collegato con il seguente circuito:



Con le variabili descrittive usate prima si ha:

$$p = v_1 \cdot i_1 + v_2 \cdot i_2$$

equazioni dei componenti:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \alpha \cdot i_1 \\ v_R = R \cdot i_R \\ i_a = a \end{cases}$$

equazioni topologiche:

$$\begin{cases} i_R + i_2 = 0 \\ v_R - v_2 = 0 \\ i_a - i_1 = 0 \\ v_a - v_1 = 0 \end{cases}$$

allora:

$$p = 0 \cdot i_1 + \alpha \cdot i_1 \cdot i_2 = \alpha \cdot i_1 \cdot i_2 = \alpha \cdot i_1 \cdot \left(-\frac{v_R}{R} \right) = \alpha \cdot i_1 \cdot \left(-\frac{\alpha \cdot i_1}{R} \right) = -\frac{1}{R} \left(\alpha \cdot i_1 \right)^2$$

per cui:

$$w = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) \cdot d\tau < 0 \qquad \text{(la funzione integranda è negativa)}$$

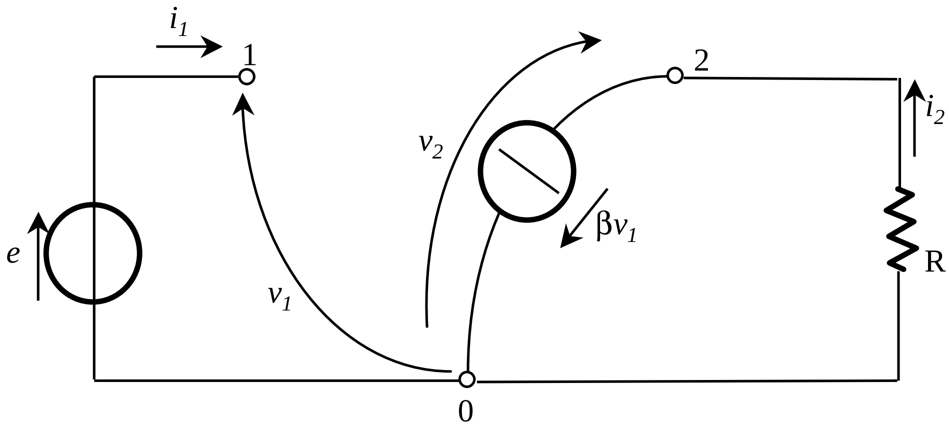
Il componente è attivo in quanto l'integrale descritto è definito negativo.

Si noti che:

$$i_R = -i_2 = \frac{\alpha \cdot i_1}{R} = \frac{\alpha \cdot a}{R}$$

ossia che i_2, i_R sono determinate dal generatore a e dai parametri della rete.

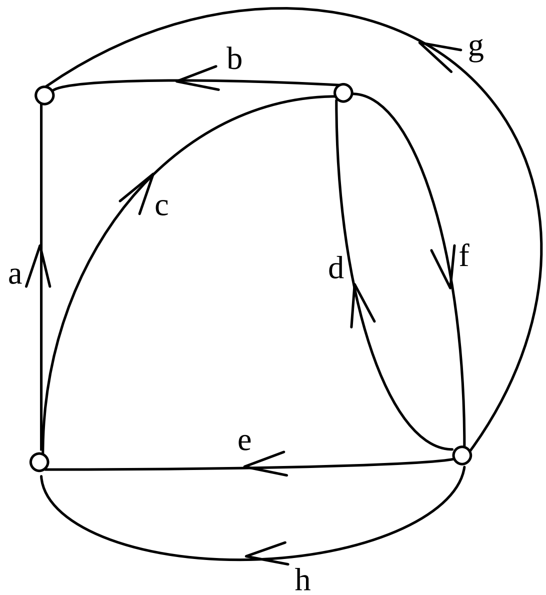
Nel secondo caso:



$$p = e \cdot 0 + v_2 \cdot \beta \cdot v_1 = (-R \cdot \beta \cdot v_1) \cdot \beta \cdot v_1 = -R \cdot \left(\beta \cdot v_1\right)^2$$

per cui le conclusioni sono analoghe.

ESERCIZIO 5



Costruire un vettore tensioni e uno correnti compatibili col grafo e verificare il teorema di Tellegen.

Risoluzione

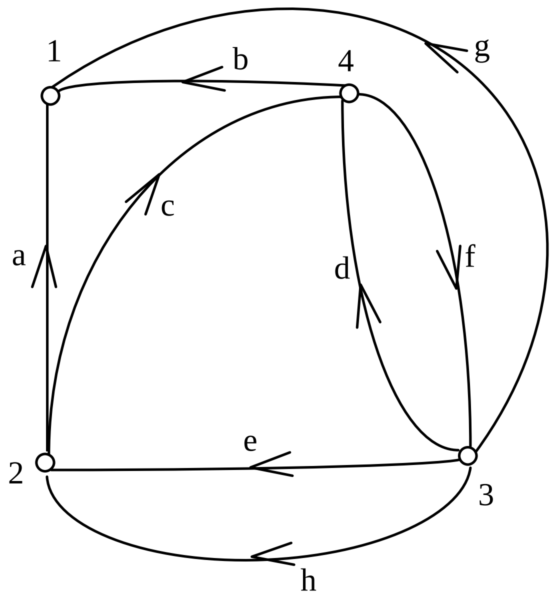
Data una rete generica, per ogni lato della rete possiamo scrivere l'espressione della potenza assorbita $p(t) = v \cdot i$,allora sarà:

$$\sum_k (v_k \cdot i_k) \cdot \delta t = 0$$

per il principio di conservazione dell'energia. Ed anche:

$$\sum_k v_k \cdot i_k = 0$$

che esprime il teorema di Tellegen.
Questa relazione non vale solo per le $\underline{v}$ ed $\underline{i}$ effettive ma per qualunque insieme di $\underline{v}$ ed $\underline{i}$ purchè compatibili col grafo della rete, cioè un insieme di $\underline{v}$ ed un insieme di $\underline{i}$ che soddisfino le leggi di Kirchhoff separatamente.
Nel caso in esame ad esempio: l=8, n=4;



$$\begin{bmatrix} v_a = \ \ 1\ \text{V} \\ v_c = -3\ \text{V} \\ v_b = \ \ 4\ \text{V} \\ v_e = \ \ 5\ \text{V} \\ v_d = \ \ 2\ \text{V} \\ v_f = -2\ \text{V} \\ v_h = \ \ 5\ \text{V} \\ v_g = \ \ 6\ \text{V} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} i_a = \ \ 1\ \text{A} \\ i_b = \ \ 1\ \text{A} \\ i_g = -2\ \text{A} \\ i_c = \ \ 1\ \text{A} \\ i_e = -3\ \text{A} \\ i_h = \ \ 5\ \text{A} \\ i_d = \ \ 1\ \text{A} \\ i_f = \ \ 1\ \text{A} \end{bmatrix}$$

$$\sum v \cdot i = v_a \cdot i_a + v_b \cdot i_b + v_c \cdot i_c + v_d \cdot i_d + v_e \cdot i_e + v_f \cdot i_f + v_g \cdot i_g + v_h \cdot i_h =$$
$$= 1 + 4 - 3 + 2 - 15 - 2 - 12 + 25 = 0$$

cioè $\underline{v}$ ed $\underline{i}$ sono ortogonali $\left(\sum v \cdot i = 0\right)$ e lo stesso vale per tutte le infinite coppie tensione-corrente compatibili.