

Analisi in frequenza

Un circuito raggiunge il regime sinusoidale se esso è assolutamente stabile e le alimentazioni sono segnali sinusoidali della stessa frequenza. In condizioni di regime tutte le grandezze elettriche del circuito, tensioni e correnti, saranno sinusoidali della stessa frequenza dell'alimentazione.

L'analisi in frequenza consiste nell'analizzare il comportamento di un circuito in regime sinusoidale alle diverse frequenze: cioè non modificando l'ampiezza (o le ampiezze) del segnale sinusoidale che costituisce l'alimentazione e variarne invece la frequenza. Per studiare il comportamento del circuito al variare della frequenza, individuata una grandezza elettrica di interesse $y(t)$, si tratta di studiarne la così detta risposta in frequenza, cioè la variazione del comportamento di tale grandezza al variare della frequenza.

Uno strumento analitico utile per determinare la risposta in frequenza è la **Funzione di Trasferimento** (FdT) $\dot{H}(\omega)$. Essa è definita come il rapporto fra il fasore dell'uscita $\bar{Y}(\omega)$ (tensione o corrente) e il fasore dell'ingresso $\bar{X}(\omega)$ (tensione o corrente), sempre definito in funzione della pulsazione ω .

Essendo il rapporto fra due fasori la funzione di trasferimento è un numero complesso che può essere rappresentato con il suo modulo e la sua fase. Abbiamo già introdotto il concetto di funzione di trasferimento quando abbiamo parlato di impedenza e di ammettenza, ad esempio. Se rappresentiamo il circuito lineare con il diagramma a blocchi di Figura 1, l'ingresso $x(t)$ avrà come fasore $\bar{X}(\omega)$ e l'uscita che vogliamo studiare sarà rappresentata, nel dominio della frequenza, dal fasore $\bar{Y}(\omega)$.

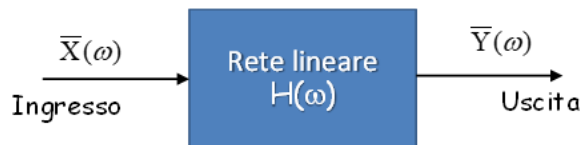


Figura 1. Uscita $y(t)$ di un circuito lineare alimentato con un ingresso $x(t)$

La funzione di trasferimento sarà quindi:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\bar{Y}(\omega)}{\bar{X}(\omega)} = |H(\omega)| \angle \phi$$

Quindi:

- La funzione di trasferimento descrive il comportamento del circuito al variare della frequenza di ingresso
- E' definita nel dominio della frequenza
- E' il rapporto fra il fasore corrispondente alla sinusoide di uscita e il fasore corrispondente alla sinusoide di ingresso

La risposta in frequenza può essere considerata come la variazione del guadagno e della fase della funzione di trasferimento del circuito.

Supponendo nulle le condizioni iniziali, a seconda della natura dei segnali di ingresso e di uscita, possiamo avere quattro differenti funzioni di trasferimento.

Se l'ingresso è una tensione e l'uscita è una tensione la funzione di trasferimento prende il nome di Guadagno di tensione:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_o(\omega)}{\bar{V}_i(\omega)} = \text{Guadagno di tensione}$$

Se l'ingresso è una corrente e l'uscita una tensione la funzione di trasferimento prende il nome di Impedenza di trasferimento (se i morsetti di ingresso e uscita coincidono sarà l'impedenza vista dai quei morsetti):

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_o(\omega)}{\bar{I}_i(\omega)} = \text{Impedenza di trasferimento}$$

Se l'ingresso è una corrente e l'uscita è una corrente la funzione di trasferimento si chiamerà Guadagno di corrente:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\bar{I}_o(\omega)}{\bar{I}_i(\omega)} = \text{Guadagno di corrente}$$

Infine, se l'ingresso è una tensione e l'uscita una corrente la FdT sarà una Ammettenza di trasferimento. Anche in questo caso se ingresso e uscita sono presi alla stessa coppia di morsetti la FdT sarà l'ammettenza vista da questi morsetti.

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\bar{I}_o(\omega)}{\bar{V}_i(\omega)} = \text{Ammettenza di trasferimento}$$

Data la funzione di trasferimento, definiamo guadagno il modulo della stessa al variare di ω e sfasamento la sua fase, pari alla fase del fasore di uscita meno la fase del fasore dell'ingresso. L'insieme delle espressioni che danno il guadagno e lo sfasamento in funzione della frequenza è la **Risposta in frequenza**.

$$\text{Funzione di rete} \quad \dot{H}(j\omega) = \frac{\bar{Y}(j\omega)}{\bar{X}(j\omega)}$$

$$\text{Guadagno} \quad G = \left| \dot{H}(j\omega) \right| = \frac{|\bar{Y}(j\omega)|}{|\bar{X}(j\omega)|}$$

$$\text{Sfasamento} \quad \text{fase}(\dot{H}(j\omega)) = \text{fase}(\bar{Y}(j\omega)) - \text{fase}(\bar{X}(j\omega))$$

La risposta in frequenza è quindi il grafico della funzione di trasferimento del circuito al variare di ω da 0 a infinito. In particolare il grafico del modulo e della fase della funzione di trasferimento. Cambiando la frequenza di ingresso anche il guadagno e lo sfasamento cambiano.

La funzione di trasferimento può essere espressa anche come il rapporto tra due polinomi in $(j\omega)$. Le radici del polinomio a numeratore sono chiamate zeri della FdT mentre le radici del polinomio a denominatore sono chiamate poli. Uno zero è un valore che rende nulla la funzione mentre un polo la rende infinita.

Una tecnica molto utilizzata per analizzare la FdT è quella di tracciare i diagrammi di Bode. Il diagramma di Bode è il grafico semilogaritmico del modulo (in decibel) e della fase (in gradi) della funzione di trasferimento in funzione della frequenza (o della pulsazione) ponendo il logaritmo della frequenza sull'asse orizzontale. Molto spesso i valori della pulsazione si estendono su più ordini di grandezza ed è quindi conveniente fare uso di scale logaritmiche per poterne apprezzare le variazioni.

In Figura 2 è riportato il diagramma di Bode della FdT:

$$\dot{H}(j\omega) = 1/(1 + j\omega/\omega_0).$$

La linea tratteggiata rappresenta la curva esatta mentre la linea continua rossa è una sua rappresentazione asintotica.

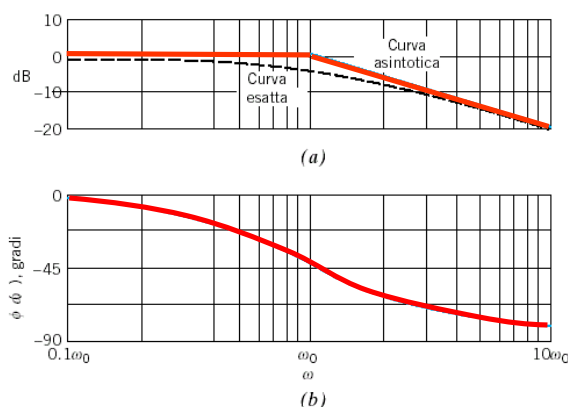


Figura 2. Diagramma di Bode per $\dot{H}(j\omega) = 1/(1 + j\omega/\omega_0)$.

I diagrammi di Bode sono oggetto di studio di altri insegnamenti. Qui richiameremo brevemente che essi contengono la stessa informazione contenuta nei grafici di cui si è appena detto ma sono molto più semplici da costruire. Nei diagrammi di Bode del modulo il guadagno viene rappresentato in decibel (dB), mentre nel grafico della fase essa è espressa in gradi. Entrambi i grafici sono riportati in scala semilogaritmica.

Come detto, il modulo della FdT è spesso espresso come logaritmo in base 10 del guadagno attraverso la relazione:

$$\dot{H}_{dB} = 20 \log_{10} H, \text{ la cui unità di misura è il decibel.}$$

L'unità in decibel deriva dall'unità in Bel. Nei sistemi di telecomunicazione, infatti, il guadagno viene spesso misurato in Bel che, storicamente, veniva usato per misurare il rapporto tra due livelli di potenza, o guadagno di potenza. Se P_1 e P_2 sono due potenze, il guadagno di potenza in Bel è dato da $\log_{10} P_2/P_1$. Il decibel è una unità di misura 10 volte più piccola del Bel e la sua espressione è:

Guadagno di potenza

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

Quando $P_2 = P_1$ non c'è variazione di potenza ed il guadagno è zero dB. Se $P_2 = 2P_1$ il guadagno è $10 \log_{10} 2 \cong 3dB$. Viceversa quando $P_2 = 0,5P_1$ il guadagno è circa $-3dB$. Si noti che il logaritmo del reciproco di una quantità è semplicemente il logaritmo della stessa quantità cambiato di segno.

In alternativa si può esprimere il guadagno in termini di rapporto di tensioni (o di correnti). Allora se V_2 e V_1 sono le due tensioni in uscita ed in ingresso, poiché esiste un rapporto quadratico tra tensione e potenza (o fra corrente e potenza), dalle proprietà dei logaritmi, si può esprimere il guadagno in tensione come:

Guadagno di tensione

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1}$$

Analogamente, il guadagno di corrente è:

Guadagno di corrente

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \frac{I_2}{I_1}$$

Nota: il valore in dB è una misura logaritmica del rapporto fra due grandezze dimensionalmente omogenee. Può quindi essere usato nelle funzioni di trasferimento che sono grandezze adimensionali. Non possono quindi essere usate nelle impedenze di trasferimento né nelle ammettenze di trasferimento.

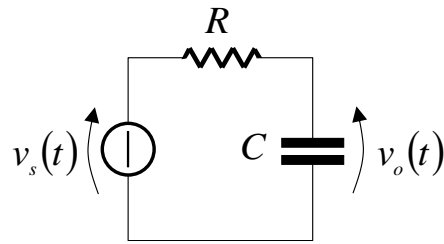
In Tabella 1 sono riportati alcuni valori di guadagno ed i corrispondenti valori in decibel.

Tabella 1 - Valori del guadagno e corrispondenti valori in dB

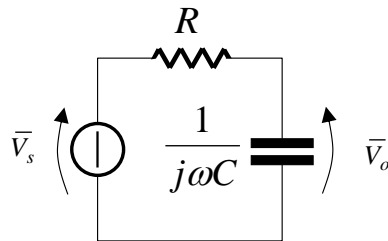
Modulo H	$20 \log_{10} H (dB)$
0.001	-60
0.01	-40
0.1	-20
0.5	-6
$1/\sqrt{2}$	-3
1	0
$\sqrt{2}$	3
2	6
10	20
20	26
100	40
1000	60

Esempio 1 – Filtro passa basso

Per il circuito RC di figura, ricavare la funzione di trasferimento \bar{V}_o/\bar{V}_s e la sua risposta in frequenza. Sia $v_s(t) = V_m \cos \omega t$



Soluzione: Nel dominio della frequenza il circuito diventa:



Per ricavare la FdT applichiamo la regola del partitore di tensione:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_s} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

La grandezza ωRC è un numero puro mentre il termine $1/RC$ ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e può essere interpretato come una pulsazione $\omega_0 = 1/RC$ con dimensioni ras/s. Ponendo quindi $\omega_0 = 1/RC$ la funzione di trasferimento assume la forma:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$$

le cui ampiezza e fase sono:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \quad \phi = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Tracciamo i grafici del modulo e della fase della FdT calcolando la funzione di trasferimento per qualche punto critico:

- per $\omega = 0$ il modulo di H vale 1 e la fase sarà 0° ,
- per $\omega = \infty$ il modulo di H va asintoticamente a 0 e la fase tende asintoticamente a -90°
- per $\omega = \omega_0$ il modulo di H è pari a $1/\sqrt{2} = 0,707$, e la fase è pari a -45° .

Il valore di $\omega = \omega_0$ in corrispondenza del quale il valore massimo del modulo della FdT si riduce di $1/\sqrt{2}$ è detta pulsazione di taglio. Il valore del modulo in decibel in corrispondenza alla frequenza di taglio è pari a -3dB . L'andamento qualitativo della funzione di trasferimento è riportato in Figura 3 dove sono tracciati il modulo e la fase.

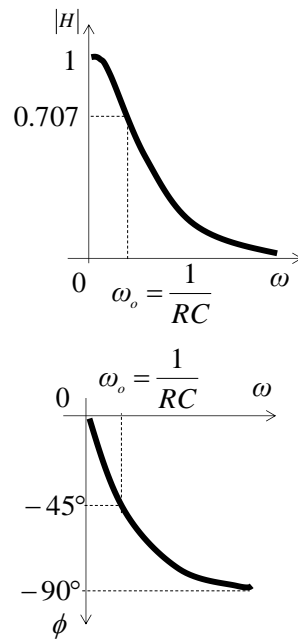


Figura 3. Modulo e fase della FdT: $\hat{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega/\omega_0}$

Il circuito analizzato è detto *filtro passa basso* grazie alla sua proprietà di lasciare praticamente inalterati i segnali a frequenza minore di ω_0 attenuando invece fortemente le componenti a frequenza maggiore di ω_0 . L'intervallo di frequenze nel quale il segnale rimane invariato viene chiamato *banda passante*.

In Figura 4 sono riportate le risposte in frequenza ideale e reale di un filtro passa basso. In blu è riportata la risposta in frequenza ideale per il filtro passa-basso, che dovrebbe lasciare inalterati i segnali con frequenza inferiore a ω_0 e tagliare completamente i segnali a frequenza superiore ad ω_0 . In nero è riportata la risposta reale del filtro.

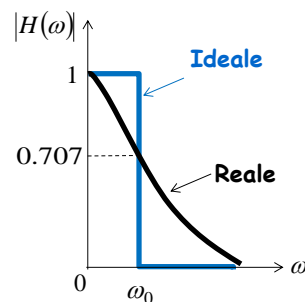
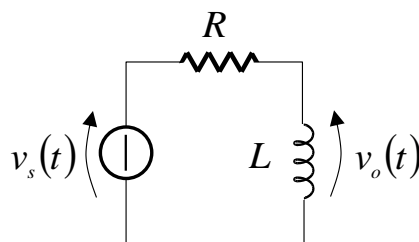


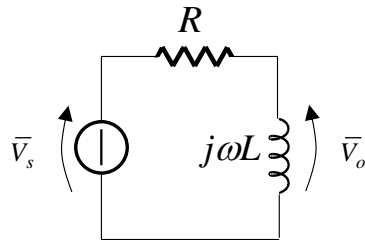
Figura 4. Risposta in frequenza ideale e reale di un filtro passa basso. Un filtro passa-basso è progettato per lasciar passare soltanto le frequenze da 0 (segnale stazionario) fino alla frequenza di taglio ω_0 .

Esempio 2 - Filtro passa alto

Per il circuito RL di figura, ricavare la funzione di trasferimento \bar{V}_o/\bar{V}_s e la sua risposta in frequenza. Disegnare la sua risposta in frequenza. Sia $v_s(t) = V_m \cos \omega t$



Soluzione: Nel dominio della frequenza il circuito diventa:



Per ricavare la FdT applichiamo la regola del partitore di tensione:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_s} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + \frac{R}{j\omega L}}$$

In questo caso la grandezza R/L ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e può essere interpretato come una pulsazione $\omega_0 = R/L$ con dimensioni ras/s . Ponendo quindi $\omega_0 = R/L$ la funzione di trasferimento assume la forma:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$$

le cui ampiezza e fase sono:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega_0}{\omega}$$

Tracciamo i grafici del modulo e della fase della FdT calcolando la funzione di trasferimento per qualche punto critico:

- per $\omega = 0$ il modulo di H vale 0 e la fase sarà 90°
- per $\omega = \infty$ il modulo di H va asintoticamente a 1 e la fase tende asintoticamente a 0°
- per $\omega = \omega_0$ il modulo di H è pari a $1/\sqrt{2} = 0,707$, e la fase è pari a 45° .

Anche in questo caso il valore di $\omega = \omega_0$ in corrispondenza del quale il valore massimo del modulo della FdT si riduce di $1/\sqrt{2}$ è detta pulsazione di taglio. Il valore del modulo in decibel in corrispondenza alla frequenza di taglio è pari a -3dB .

L'andamento qualitativo della funzione di trasferimento è riportato in Figura 5 dove sono tracciati il modulo e la fase.

Il circuito analizzato è detto *filtro passa alto* grazie alla sua proprietà di lasciare praticamente inalterati i segnali a frequenza maggiore di ω_0 attenuando invece fortemente le componenti a frequenza minore di ω_0 . L'intervallo di frequenze nel quale il segnale rimane invariato viene chiamato *banda passante*.

Tuttavia, l'uso degli induttori per la realizzazione di filtri ha lo svantaggio di portare a pesi ed ingombri elevati. La stessa funzione di filtro passa alto può essere ottenuta con un circuito di questo genere.

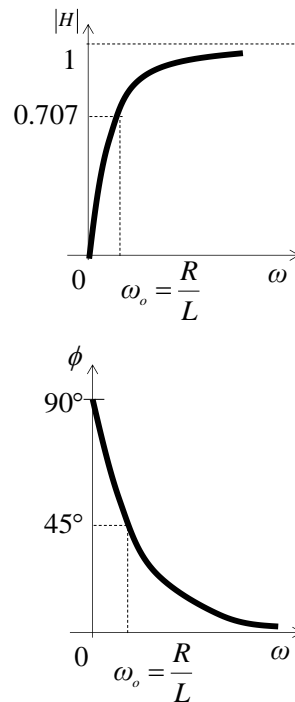
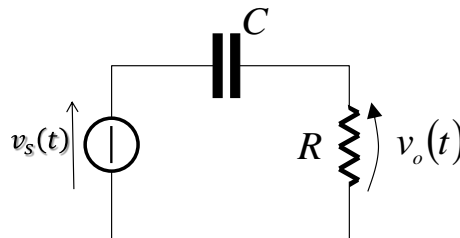


Figura 5. Modulo e fase della FdT: $\dot{H}(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega_0/\omega}$

Esempio 3- Filtro passa alto

L'uso degli induttori per la realizzazione di filtri ha lo svantaggio di portare a pesi ed ingombri elevati. La stessa funzione di filtro passa alto può essere ottenuta con un circuito di questo genere.



Per ricavare la FdT applichiamo la regola del partitore di tensione e ponendo $\omega_0 = 1/RC$:

$$\dot{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_s} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega R C}{1 + j\omega R C}$$

$$|\dot{H}(\omega)| = \frac{\omega R C}{\sqrt{1 + (\omega R C)^2}} = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Anche in questo caso tracciamo i grafici del modulo e della fase della FdT calcolando la funzione di trasferimento per qualche punto critico:

- per $\omega = 0$ il modulo di H vale 0 e la fase sarà 90°

- per $\omega = \infty$ il modulo di H va asintoticamente a 1 e la fase tende asintoticamente a 0°
- per $\omega = \omega_0$ il modulo di H è pari a $1/\sqrt{2} = 0,707$, e la fase è pari a 45° .

Anche in questo caso il valore di $\omega = \omega_0$ in corrispondenza del quale il valore massimo del modulo della FdT si riduce di $1/\sqrt{2}$ è detta pulsazione di taglio. Il valore del modulo in decibel in corrispondenza alla frequenza di taglio è pari a -3dB.

L'andamento qualitativo del modulo della funzione di trasferimento è riportato in Figura 6 (linea nera). La linea blu corrisponde all'andamento di un filtro passa alto ideale.

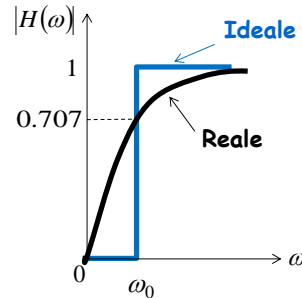


Figura 6. Modulo della FdT: $\dot{H}(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega_0/\omega}$

Il circuito analizzato è detto *filtro passa alto* grazie alla sua proprietà di lasciare praticamente inalterati i segnali a frequenza maggiore di ω_0 attenuando invece fortemente le componenti a frequenza minore di ω_0 . L'intervallo di frequenze nel quale il segnale rimane invariato viene chiamato *banda passante*.

Un filtro passa-alto è progettato per lasciar passare tutte le frequenze superiori alla sua alla frequenza di taglio ω_0 .

Risonanza

Il fenomeno della risonanza si ritrova in molti fenomeni fisici dove sono presenti interazioni fra due forme di accumulo energetico. Nei circuiti elettrici questo avviene quando sono contemporaneamente presenti elementi capacitivi ed induttivi e quindi energie elettriche e magnetiche.

Consideriamo quindi un rete passiva accessibile a due morsetti e supponiamo che essa contenga componenti resistivi induttivi e capacitivi, sia cioè una rete così detta RLC (Figura 7).

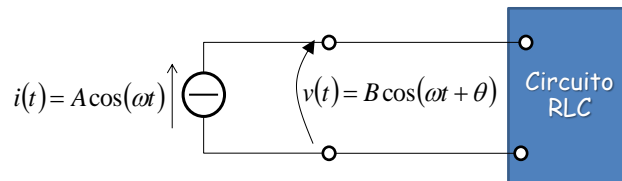


Figura 7. Circuito RLC

Supponiamo di alimentare la rete con un generatore di corrente sinusoidale che abbia ampiezza costante e pulsazione variabile. Sia $i(t) = A \cos(\omega t)$ tale corrente. La tensione $v(t)$ ai morsetti del circuito RLC sarà (a regime) $v(t) = B \cos(\omega t + \vartheta)$.

In generale, la corrente erogata dal generatore e la tensione ai capi dello stesso non sono in fase tra loro.

La funzione di rete $\dot{H}(\omega) = \dot{V}/\dot{I}$ è l'impedenza di trasferimento del circuito e può essere espressa in forma cartesiana come $\dot{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Al variare di ω variano sia la parte reale che la parte immaginaria dell'impedenza. In particolare, al variare di ω , $X(\omega)$ può essere >0 , minore di zero o $=0$:

$$X(\omega) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Il corrispondenza del valore $\omega = \omega_0$ per il quale $X(\omega_0) = 0$ si verifica che la corrente erogata dal generatore e la tensione ai suoi capi risultano in fase.

Questa particolare condizione è detta *risonanza* e la pulsazione ω_0 è detta pulsazione di risonanza. Alla pulsazione di risonanza l'impedenza è puramente resistiva: $\dot{Z} = R, X = 0$

Deduciamo che una rete elettrica passiva, per poter essere in condizione di risonanza, deve essere composta sia da induttori che da condensatori, quindi il sistema deve possedere una coppia di poli complessi coniugati.

La presenza di elementi reattivi induttivi e capacitivi consente che nel circuito l'energia possa essere immagazzinata sia sotto forma di energia elettrica che di energia magnetica. La risonanza è caratterizzata da un continuo scambio di energia tra le due forme citate all'interno della rete senza il coinvolgimento del generatore.

Inoltre, tanto minore risulterà la parte resistiva del circuito, tanto minori risulteranno gli effetti dissipativi, e tanto più accentuati risulteranno i fenomeni legati alla condizione di risonanza.

Per meglio comprendere il fenomeno della risonanza, consideriamo due casi distinti, noti come risonanza serie e risonanza parallelo, così chiamate in base al modo con cui sono collegati tra di loro gli elementi resistivi, capacitivi ed induttivi.

Risonanza serie

Nel circuito di Figura 8 i componenti resistore, induttore e condensatore sono collegati in serie.

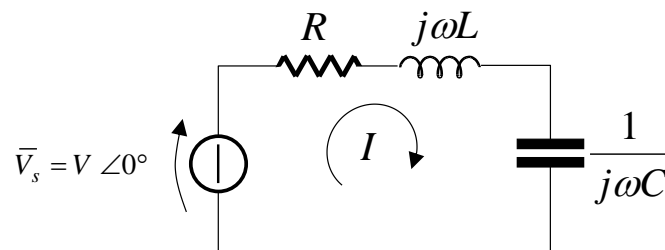


Figura 8. Circuito RLC serie

Il comportamento del circuito può essere descritto dalla funzione di trasferimento impedenza di ingresso pari a:

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

In questo caso, come si può notare, la parte resistiva non dipende dalla pulsazione mentre la parte reattiva lo è.

La reattanza $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ si annulla per un valore di:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s} \quad \bullet$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz}$$

Questo valore di pulsazione prende il nome di pulsazione di risonanza. A questa pulsazione l'impedenza del bipolo coincide con la sua resistenza.

E' possibile tracciare l'andamento del modulo dell'impedenza in funzione della pulsazione.

Per $\omega < \omega_0$ il modulo dell'impedenza parte da valori infinitamente grandi per valori di ω prossimi allo zero in quanto predomina la reattanza capacitiva. Il suo valore scende man mano che aumenta quello della reattanza induttiva, fino ad assumere il valore minimo, in corrispondenza di $\omega = \omega_0$ che è uguale alla resistenza del circuito.

Per $\omega > \omega_0$ il modulo dell'impedenza ritorna a salire perché diventa preponderante il contributo della reattanza induttiva mentre decresce il contributo della reattanza capacitiva.

Possiamo anche tracciare la fase dell'impedenza al variare di ω :

per $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $|Z| = R$ $\varphi = 0$

per $\omega = 0$ $|Z| = \infty$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

per $\omega \rightarrow \infty$ $|Z| \rightarrow \omega L$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$

In Figura 9 sono riportati i contributi dei vari termini al modulo dell'impedenza, nonché la fase al variare di ω .

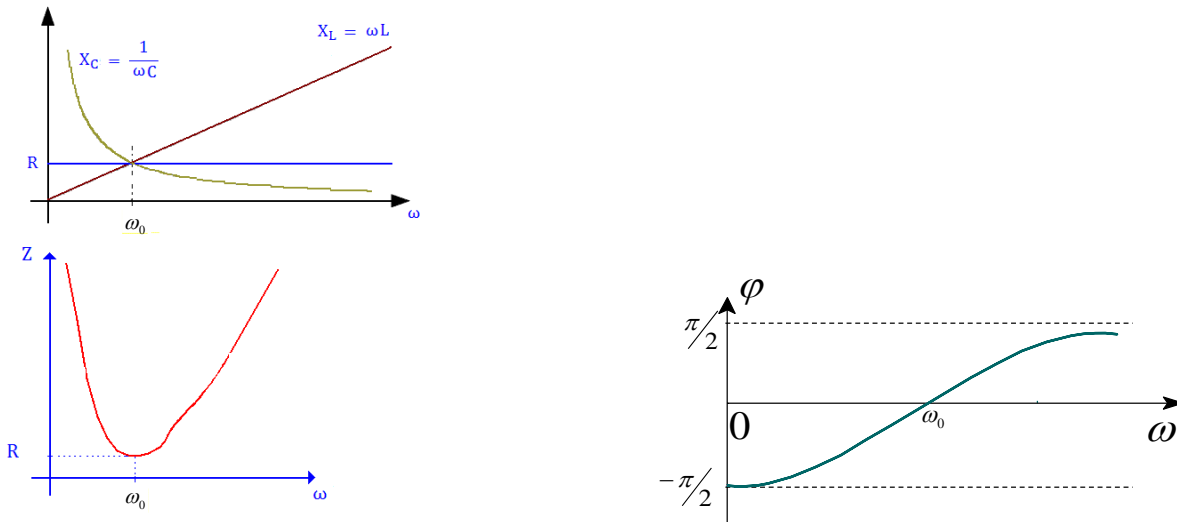


Figura 9. Modulo e fase dell'impedenza di un circuito RLC serie

Quando il circuito risonante serie è alimentato con un generatore con pulsazione pari a quella di risonanza la sua impedenza, come visto, è uguale alla resistenza R, dato che i termini reattivi si bilanciano.

Questo non vuol dire che le tensioni sull'induttore e sul condensatore siano nulle. Infatti esse sono attraversate dalla corrente \bar{I} e le loro tensioni si ricavano dalla legge di Ohm. Possiamo rappresentare le grandezze elettriche del circuito con il diagramma fasoriale per $\omega = \omega_0$ (vedi Figura 10). Le tensioni sui componenti L e C sono uguali in modulo ed in opposizione di fase. Vedremo più avanti che queste due tensioni possono essere anche molto maggiori della tensione applicata dal generatore, generando delle sovratensioni sul circuito.

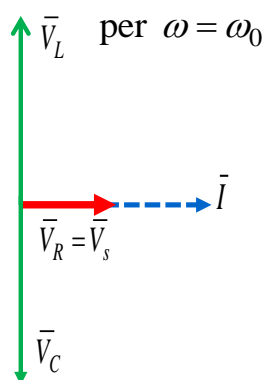


Figura 10. Diagramma fasoriale del circuito RLC serie.

Nel circuito di Figura 8, prendendo come uscita la corrente e come ingresso la tensione del generatore, il modulo della corrente I è:

$$I = |I| = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

Tracciandone l'andamento in funzione della pulsazione si ottiene la curva a campana della Figura 11 (che ha ovviamente un andamento rovesciato rispetto al modulo dell'impedenza appena visto).

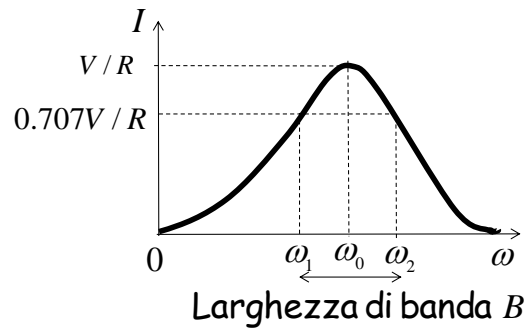


Figura 11. Modulo della corrente nel circuito di Figura 8.

La forma della campana dipende dal rapporto fra i valori della reattanza capacitiva (o induttiva) e il valore della resistenza in condizioni di risonanza.

La potenza attiva assorbita dal circuito è $P(\omega) = RI^2$.

La potenza più alta si ha quando la corrente è più alta, cioè in corrispondenza della pulsazione di risonanza, quando $I = V/R$, con V e I valori efficaci delle grandezze sinusoidali: $P(\omega_0) = \frac{V^2}{R}$

Per due particolari valori di pulsazione la potenza dissipata è pari alla metà del valore massimo. Questo avviene quando la corrente assume un valore pari $I_{max}/\sqrt{2}$, ovvero $0,707$ il valore massimo della corrente. Queste due pulsazioni vengono chiamate pulsazioni di taglio o pulsazioni di metà potenza.

Questi due valori possono essere ricavati imponendo che il modulo dell'impedenza sia pari a $\sqrt{2}$ il suo valore minimo o anche che il modulo dell'ammettenza sia pari a $1/\sqrt{2}$ del suo valore massimo, cioè risolvendo l'equazione rispetto a ω :

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot R$$

Come riportato nella successiva *Dimostrazione 1*, si ottengono 4 soluzioni di cui due positive e due negative. Queste ultime si scartano perché non esistenti.

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Si dimostra analiticamente che la pulsazione di risonanza è la media geometrica delle due pulsazioni di taglio:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

Si noti che ω_1 e ω_2 non sono in generale situate simmetricamente intorno a ω_0 anche se spesso è una approssimazione accettabile.

Mentre il picco della curva è determinato dal valore della resistenza, la forma della curva è determinata anche dagli altri parametri del circuito. In particolare possiamo stimare la larghezza della curva misurando la così detta larghezza di banda: $B = \omega_2 - \omega_1$.

Dimostrazione 1

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2} \cdot R \Rightarrow \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 + \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \\ \omega^2 - \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega = +\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ \omega_2 = +\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \end{cases}$$

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0^2 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

□

Come già accennato in precedenza, alla pulsazione di risonanza l'impedenza Z coincide con la resistenza, il suo modulo è minimo mentre è massima l'ampiezza della corrente. La serie LC ha impedenza nulla, quindi equivale ad un corto circuito:

$$\bar{V}_C + \bar{V}_L = 0$$

Tuttavia non sono nulle le tensioni ai capi dei singoli componenti, ma sono uguali e contrarie:

$$\bar{V}_L = -\bar{V}_C = j\omega_0 L \bar{I} = j \frac{\omega_0 L}{R} \bar{V}_s = jQ \bar{V}_s$$

dove Q è chiamato Fattore di Merito o Fattore di Qualità del circuito:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$|\bar{V}_L| = |\bar{V}_C| = Q |\bar{V}_s|$$

Tanto più alto è il valore di Q tanto maggiori saranno le tensioni ai capi dell'induttore e del condensatore. Quando Q assume valori molto elevati si possono avere problemi di sovratensioni.

Il fattore di qualità del circuito assume anche un significato energetico: esso è infatti proporzionale al rapporto fra l'energia reattiva totale immagazzinata nel circuito e l'energia dissipata in un periodo, sempre alla risonanza. In altre parole esso può essere considerato come la capacità di immagazzinare energia in rapporto alla dissipazione di energia:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia reattiva immagazzinata nel circuito alla risonanza}}{\text{Energia dissipata nel circuito in un periodo alla risonanza}}$$

Dimostrazione 2

L'energia magnetica immagazzinata nell'induttore alla risonanza è:

$$W_L = \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{1}{2} L \left(\sqrt{2} \frac{V}{R} \cos(\omega_0 t) \right)^2 = \frac{L}{R^2} V^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

L'energia elettrica immagazzinata nel capacitore è:

$$W_C = \frac{1}{2} C v^2(t) = \frac{1}{2} C \left(2 \frac{V^2}{\omega_0^2 R^2 C^2} \cos^2(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \right) = \frac{V^2}{\omega_0^2 R^2 C} \sin^2(\omega_0 t) =$$

$$= \frac{L}{R^2} V^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

Le energie istantanee sono quindi uguali in ampiezze e sfasate di $\pi/2$.

L'energia reattiva complessivamente immagazzinata è:

$$W_Q = \frac{L}{R^2} V^2 (\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{L}{R^2} V^2$$

L'energia reattiva è costante nel tempo e viene scambiata tra L e C all'interno della serie.

L'energia dissipata nel resistore alla risonanza in un ciclo di periodo $T = 2\pi/\omega_0$ è:

$$W_R = R \cdot I^2 \cdot T = R \cdot \frac{V^2}{R^2} \cdot T = R \cdot \frac{V^2}{R^2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{V^2}{R} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Il rapporto fra l'energia reattiva e l'energia dissipata è:

$$\frac{W_Q}{W_R} = \frac{\frac{L}{R^2} V^2}{\frac{V^2}{R} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{Q}{2\pi} \Rightarrow Q = 2\pi \cdot \frac{W_Q}{W_R}$$

Quindi il rapporto tra le energie dipende dal fattore di qualità Q , come volevamo dimostrare. \square

Possiamo anche esprimere le varie grandezze viste sino ad ora in funzione del fattore di qualità e della pulsazione di risonanza. In particolare, l'impedenza \dot{Z} e l'ammettenza \dot{Y} , con semplici passaggi, possono essere espresse come:

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R \left[1 + j \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{V}_s} = \frac{G}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Si noti che, assumendo costante l'ampiezza della tensione di alimentazione, l'andamento dell'ammettenza, al variare della pulsazione, ricalca l'andamento della corrente. Al variare del fattore di qualità del circuito varia quindi l'andamento dell'ammettenza e quindi della corrente.

Si possono, inoltre, esprimere le pulsazioni di taglio in funzione del fattore di qualità del circuito. Infatti, come già detto, le pulsazioni di taglio sono definite come quelle pulsazioni in corrispondenza delle quali il modulo della corrente (o dell'ammettenza) si riduce di $\sqrt{2}$ volte il valore massimo. Quindi, le frequenze di taglio si ottengono risolvendo le equazioni:

$$\frac{|\dot{Y}(j\omega_2)|}{G} = \frac{|\dot{Y}(j\omega_1)|}{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$$

essendo G il valore massimo di \dot{Y} alla risonanza.

Con semplici passaggi analoghi a quelli già fatti, si ottengono le espressioni di ω_1 e ω_2 in funzione di Q (prendendo delle 4 soluzioni, le due positive):

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{1}{2Q} \right]$$

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

Anche in questo caso si ritrova che la pulsazione di risonanza è pari alla media geometrica delle due pulsazioni di taglio. Si ricordi che, le due pulsazioni di taglio non sono simmetriche rispetto a ω_0 .

Possiamo determinare inoltre la larghezza di banda in funzione del fattore di qualità partendo dalla definizione della larghezza di banda $B = \omega_2 - \omega_1$ sarà:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q.$$

Da cui possiamo anche dire che il fattore di qualità di un circuito risonante è il rapporto fra la pulsazione di risonanza e la larghezza di banda:

$$Q = \omega_0/B$$

Fissato ω_0 , tanto più elevato è il fattore di qualità tanto più stretta sarà la banda. Fissato ω_0 , tanto più grande è Q tanto più selettivo è il circuito ma tanto più stretta è la larghezza di banda. In Figura 12 è riportato l'andamento dell'ampiezza della corrente al variare del fattore di qualità.

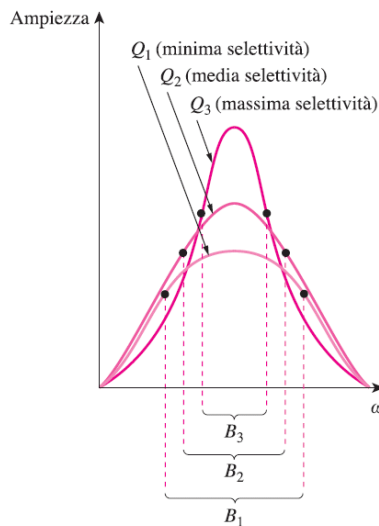


Figura 12. Ampiezza della funzione di trasferimento $\dot{Y}(\omega)$ per un circuito RLC serie, al variare del fattore di qualità Q .

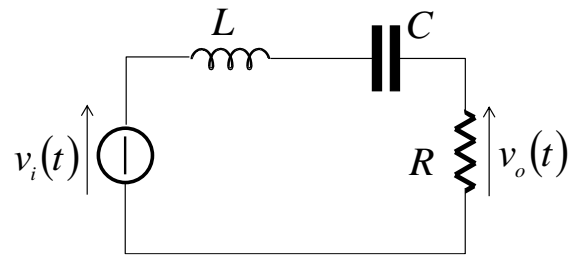
Dalla figura si vede che, tanto più grande è Q , tanto più selettivo è il circuito ma tanto più stretta è la larghezza di banda.

La selettività di un circuito è la proprietà di discriminare una determinata frequenza rispetto alle altre. Se si deve progettare un circuito con banda stretta il fattore di qualità deve essere alto, e viceversa.

Se $Q > 10$ le pulsazioni di taglio possono ritenersi simmetriche rispetto alla pulsazione di risonanza e possono esprimersi come:

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{B}{2}$$

Esempio 4 -Filtro passa banda



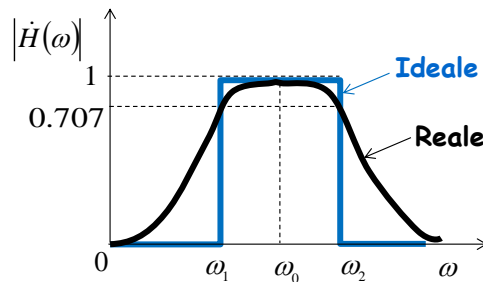
Il circuito RLC serie si comporta come un filtro passa-banda se l'uscita viene prelevata sul resistore. Infatti, la funzione di trasferimento, applicando la regola del partitore di tensione, è:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Per $\omega = 0$ e $\omega \rightarrow \infty$ il modulo di H è zero mentre alla frequenza di risonanza assume il valore massimo pari ad 1. Poiché il circuito è un circuito risonante RLC, la pulsazione di risonanza, le pulsazioni di taglio, la ampiezza di banda, etc. sono quelle già calcolate.

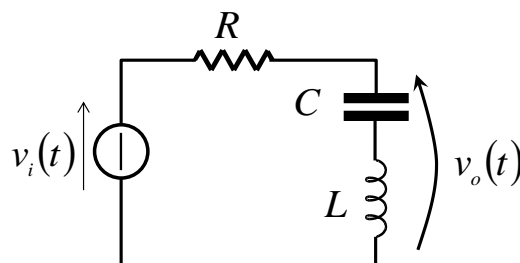
Nella figura seguente sono riportate le risposte in frequenza ideale (in blu) e reale (in nero) di un filtro passa banda.



Un filtro passa banda si può ottenere anche collegando in cascata un filtro passa basso con pulsazione di taglio pari a ω_2 e un filtro passa alto con pulsazione di taglio ω_1 .

Un filtro passa-banda è progettato per lasciar passare tutte le frequenze contenute all'interno di una banda di frequenze $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Esempio 5 -Filtro arresta banda



Il circuito RLC serie si comporta come un filtro arresta-banda se l'uscita viene prelevata sul resistore. Infatti, la funzione di trasferimento, applicando la regola del partitore di tensione, è:

$$\dot{H}(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \frac{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$|\dot{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

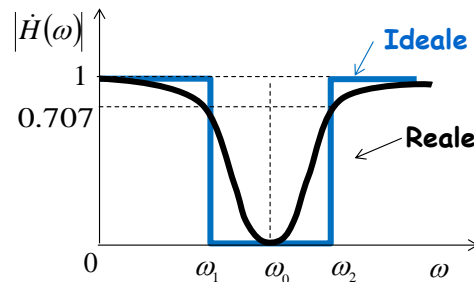
Calcolando il modulo della funzione di trasferimento per particolari valori di pulsazione si ottiene:

$$\omega = 0 \Rightarrow H(0) = 1 \quad \omega \rightarrow \infty \Rightarrow H(\infty) = 1$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow H(\omega_0) = 0$$

ω_0 prende il nome di frequenza di centro banda o di reiezione.

Nella figura seguente sono riportate le risposte in frequenza ideale (in blu) e reale (in nero) di un filtro arresta banda.



Le frequenze di taglio sono le stesse di quelle del circuito risonante serie:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Risonanza parallelo

Il duale del circuito risonante RLC serie è il circuito RLC parallelo, costituito da un resistore un induttore ed un condensatore collegati in parallelo. L'ammettenza di ingresso è

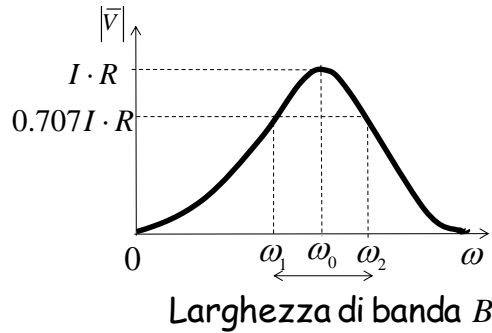
$$\dot{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Anche in questo caso si avrà risonanza quando la tensione \bar{V} ai capi del parallelo e la corrente \bar{I} che entra nel parallelo sono in fase tra loro, quindi quando la parte immaginaria dell'ammettenza è nulla, cioè

$$\omega C - 1/\omega L = 0$$

Il termine reattivo dell'ammettenza si annulla, anche in questo caso in corrispondenza di un valore di $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. In corrispondenza di ω_0 , la corrente scorre tutta nella resistenza ed il parallelo LC si comporta come un tasto aperto (circuito tappo o circuito bouchon). Tuttavia le correnti che attraversano i due componenti alla risonanza possono essere anche molto elevate creando problemi di sovracorrente.

L'andamento del modulo della tensione \bar{V} è riportato nella figura.



Essa mostra un andamento a campana con il valore massimo in corrispondenza della pulsazione di risonanza e pari al valore efficace della corrente moltiplicato R . Anche in questo caso possiamo calcolare le pulsazioni di taglio in corrispondenza ad un valore del modulo della tensione pari a $\sqrt{2}$ volte inferiore al valore massimo. Per segnali di pulsazione compresa nella larghezza di banda il segnale non subisce attenuazione apprezzabile, fuori dalla banda il segnale viene invece attenuato. Alle pulsazioni di taglio l'attenuazione del segnale è pari a 3dB. Sfruttando la dualità con il circuito risonante serie si possono ricavare le grandezze di interesse (pulsazioni di taglio, larghezza di banda, fattore di qualità).

$$\dot{H}(j\omega) = \dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}_s} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$\dot{Y} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \angle \tan^{-1} R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Alla risonanza l'ammettenza è reale e vale $1/R$ e quindi $\bar{V} = R\bar{I}_s$. Il modulo dell'impedenza è minimo e quindi il modulo della tensione è massimo. Il parallelo tra L e C ha ammettenza nulla, quindi equivale ad un circuito aperto:

$$\bar{I}_C + \bar{I}_L = 0 \quad \bar{I}_L = -\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{j\omega_0 L} = \frac{-j\bar{I}_s R}{\omega_0 L} = -j \frac{R}{\omega_0 L} \bar{I}_s = -jQ\bar{I}_s$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$$

$$|\bar{I}_L| = |\bar{I}_C| = Q|\bar{I}_s|$$

Se Q assume valori elevati, $i_L(t)$ e $i_C(t)$ assumono ampiezze maggiori di quella del generatore con conseguenti problemi di sovracorrenti.

Sviluppando i passaggi, analogamente a quanto fatto per la risonanza serie, si ottengono i seguenti valori:

Frequenze di taglio:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad \omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Larghezza di Banda:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$$

Fattore di qualità:

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$$

Per valori di $Q > 0$ le frequenze di taglio possono essere approssimate come:

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{B}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{B}{2}$$

La Tabella 2 mette a confronto per i due circuiti risonanti serie e parallelo i valori dei parametri alla risonanza.

Tabella 2 - Valori caratteristici per la risonanza serie e parallelo

Caratteristica	Circuito Serie	Circuito parallelo
ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Q	$\frac{\omega_0 L}{R}$ o $\frac{1}{\omega_0 RC}$	$\frac{R}{\omega_0 L}$ o $\omega_0 RC$
B	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$
ω_1, ω_2	$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$
ω_1, ω_2 per $Q > 10$	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$

Filtri passivi

I circuiti analizzati precedentemente appartengono alla categoria dei filtri passivi. In generale un filtro è un circuito progettato per trasmettere segnali a desiderate frequenze e eliminare o attenuare segnali ad altre frequenze.

Un filtro passivo è costituito solo da elementi passivi resistori, induttori e capacitori. Si vedrà più avanti un'altra categoria di filtri, i filtri attivi, che contengono, oltre agli elementi passivi citati anche componenti attivi, quali gli amplificatori operazionali. I filtri passivi effettuano una semplice selezione e trasmissione del segnale, mentre i filtri attivi effettuano oltre a una selezione e trasmissione del segnale anche una amplificazione.

I filtri si dividono in quattro categorie: passa-basso, passa-alto, passa-banda ed elimina banda. La risposta in frequenza ideale di questi 4 tipi di filtro è riportata in Figura 13.

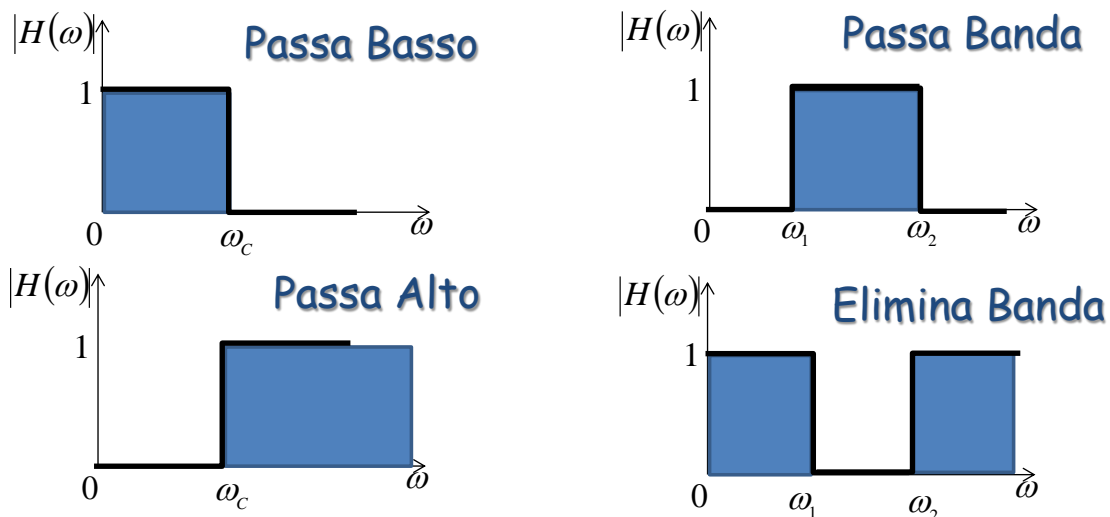


Figura 13. Ampiezza della risposta in frequenza ideale per i filtri passivi.

Un filtro passa-basso lascia passare le frequenze basse e attenua quelle alte, un filtro passa alto lascia passare le frequenze alte ed attenua quelle basse, un filtro passa-banda lascia passare le frequenze all'interno di una certa banda e attenua quelle fuori dalla banda, infine un filtro arresta banda lascia passare le frequenze al di fuori di una prefissata banda e attenua quelle all'interno della banda.

I filtri passivi sono molto utilizzati nei ricevitori audio e TV, negli equalizzatori, nelle reti per l'adattamento di impedenza, nelle reti per il condizionamento del segnale e per la ripartizione della potenza elettrica, negli attuatori e negli accoppiatori direzionali. A fronte di indubbi vantaggi, quali il fatto che non necessitano di alimentazione, e le ottime caratteristiche di stabilità e precisione, i filtri passivi presentano degli svantaggi. Non possono avere guadagno maggiore di 1, quindi attenuano il segnale in molti casi, e richiedono l'uso di grossi e costosi induttori, presentano buone prestazioni in alta frequenza mentre esse degradano per frequenze al di sotto della banda audio (tra i 3000 Hz e i 300kHz).

Filtri attivi

I filtri attivi sono costituiti da elementi passivi R e C e da amplificatori operazionali. I principali vantaggi risiedono nella possibilità di limitare il loro ingombro e il loro costo, perché non contengono induttori, cosa che li rende realizzabili anche nei circuiti integrati. Inoltre, essi possono realizzare un guadagno. Sono tuttavia meno stabili e affidabili dei filtri passivi e possiedono un limite di utilizzo alle alte frequenze (circa 100kHz).

I filtri attivi possono essere classificati sia in funzione del loro ordine che della loro funzione.

In Figura 14 è riportato lo schema circuitale di un generico circuito attivo del primo ordine. Si tratta di un circuito in configurazione da amplificatore invertente.

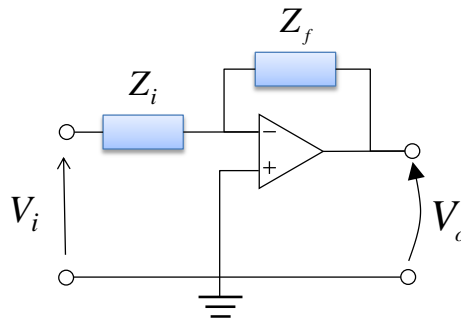


Figura 14. Circuito in configurazione da amplificatore invertente

Assumendo come variabile di uscita la tensione \bar{V}_0 e come variabile di ingresso la tensione \bar{V}_i , la funzione di trasferimento è:

$$\dot{H}(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = -\frac{\dot{Z}_f}{\dot{Z}_i}$$

Come vedremo, a seconda della natura delle impedenze Z_i e Z_f il filtro può esibire un comportamento da filtro passa basso o da filtro passa alto.

Filtro attivo passa-basso del primo ordine

Un possibile filtro passa basso può essere ottenuto ponendo $\dot{Z}_i = R_i$ e \dot{Z}_f pari al parallelo di un condensatore e un resistore e sostituendo nella espressione della funzione di trasferimento si ottiene:

$$\dot{Z}_i = R_i \quad \dot{Z}_f = R_f // \frac{1}{j\omega C_f} = \frac{R_f \cdot \frac{1}{j\omega C_f}}{R_f + \frac{1}{j\omega C_f}} = \frac{R_f}{1 + j\omega R_f C_f}$$

$$\dot{H}(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f}$$

$$\omega_c = \frac{1}{R_f C_f}$$

L'espressione della funzione di trasferimento è simile, fatta eccezione per il fattore moltiplicativo $-R_f/R_i$, a quella ricavata per un filtro passa basso passivo. La frequenza di taglio sarà $\omega_c = 1/R_f \cdot C_f$ e non dipende da R_i , che interviene invece nella definizione del guadagno in continua (cioè per $\omega = 0$) che è pari a R_f/R_i .

Filtro attivo passa-alto del primo ordine

Una possibile realizzazione di un filtro attivo passa alto si ottiene imponendo \dot{Z}_i pari alla serie di un resistore R_i e un condensatore C_i e \dot{Z}_f pari a R_f . Sostituendo nella funzione di trasferimento si ha:

$$\dot{Z}_i = R_i + \frac{1}{j\omega C_i} \quad \dot{Z}_f = R_f$$

$$\dot{H}(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i + \frac{1}{j\omega C_i}} = -\frac{j\omega C_i R_f}{1 + j\omega R_i C_i} \Rightarrow |\dot{H}(j\omega)| = \frac{\omega C_i R_f}{\sqrt{1 + (\omega R_i C_i)^2}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{R_i C_i}$$

Calcolando il modulo della funzione di trasferimento per alcuni valori della pulsazione:

per $\omega = 0, |H| = 0$, per $\omega \rightarrow \infty, |H| \rightarrow R_f/R_i$, per $\omega = \omega_c, |H| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R_f}{R_i}$

Filtro attivo passa-banda

Come già accennato per i filtri passivi, anche nel caso di filtri attivi possiamo realizzare un filtro passa-banda mettendo in cascata un filtro passa-basso con frequenza di taglio ω_2 e un filtro passa-alto con frequenza di taglio ω_1 . Scegliendo R_f ed R_i uguali si realizzerebbe un filtro passa-banda di guadagno unitario. Per realizzare un guadagno desiderato R_f/R_i è necessario collegare in cascata un ulteriore amplificatore in configurazione invertente. Lo schema circuitale è rappresentato in Figura 15.

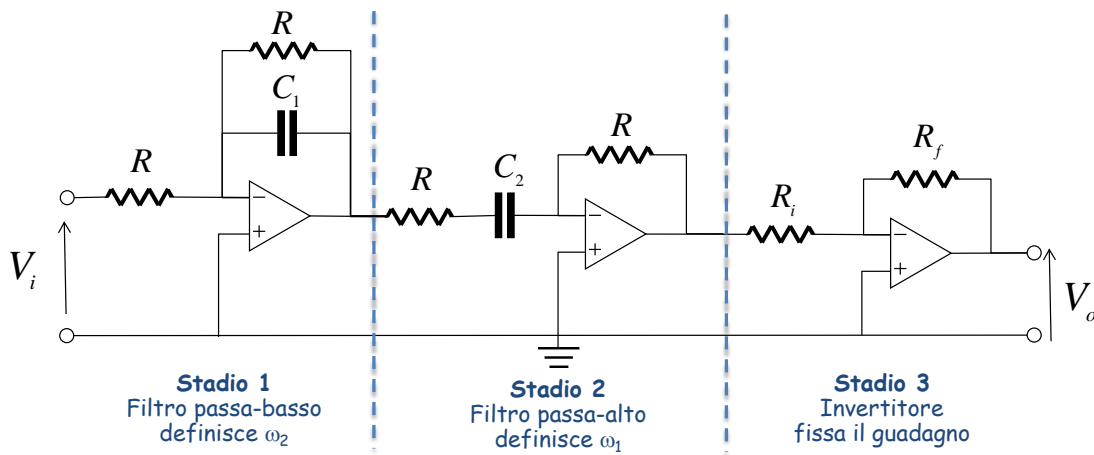


Figura 15. Filtro attivo passa-banda

Le frequenze di taglio sono:

$$\omega_2 = \frac{1}{RC_1} \quad \omega_1 = \frac{1}{RC_2}$$

Come già introdotto nello studio dei doppi bipoli, per ottenere la funzione di trasferimento complessiva del circuito è sufficiente moltiplicare le funzioni di trasferimento dei singoli stadi. La funzione di trasferimento tra uscita \bar{V}_0 e ingresso \bar{V}_i del filtro è:

$$\dot{H}(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \left(-\frac{1}{1+j\omega RC_1} \right) \cdot \left(-\frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega RC_2} \right) \cdot \left(-\frac{R_f}{R_i} \right) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{1+j\omega RC_1} \cdot \frac{j\omega C_2 R}{1+j\omega RC_2}$$

Lo stadio passa basso determina la pulsazione di taglio superiore ω_2 mentre lo stadio passa alto determina la pulsazione di taglio inferiore ω_1 . Le frequenze di taglio sono:

$$\omega_2 = \frac{1}{RC_1} \quad \omega_1 = \frac{1}{RC_2}$$

La pulsazione di centro banda si ottiene, come già visto nei filtri passivi, come media geometrica delle due pulsazioni di taglio: $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ da cui si ottengono i valori della Banda passante e del fattore di qualità del circuito:

$$B = \omega_2 - \omega_1; \quad Q = \frac{\omega_0}{B}$$

Per ottenere il guadagno calcoliamo il valore del modulo della funzione di trasferimento in corrispondenza della pulsazione di centro banda:

$$\dot{H}(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}} \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}} = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{j\omega\omega_2}{(\omega_2+j\omega)(\omega_1+j\omega)}$$

$$\dot{H}(j\omega_0) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{j\omega_0\omega_2}{j\omega_0\omega_1 + j\omega_0\omega_2} \Rightarrow G = |\dot{H}(j\omega_0)| = \frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}$$

L'andamento dell'ampiezza della funzione di trasferimento è riportata in Figura 16.

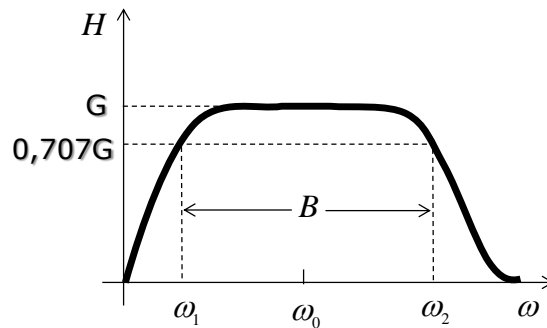


Figura 16. Ampiezza della funzione di trasferimento del circuito di Figura 15.

Esercizio 1

Dato un circuito RLC serie, in cui $R = 100 \Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 40 \mu\text{F}$, si calcolino la frequenza di risonanza e le frequenze di taglio ω_1 e ω_2 .

Soluzione

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 223.6 \text{ rad/s} \approx 224 \text{ rad/s} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 35.6 \text{ Hz}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 1.12$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q} \right] = 345 \text{ rad/s}$$

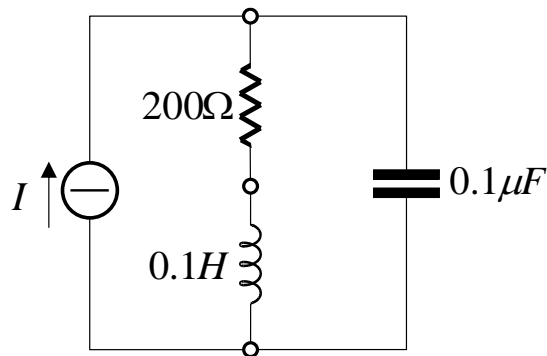
$$\omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q} \right] = 145 \text{ rad/s}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 200 \text{ rad/s} = \frac{\omega_0}{Q} = 200 \text{ rad/s}$$

$$\sqrt{\omega_2 \cdot \omega_1} = 224 = \omega_0$$

Esercizio 2

Determinare la frequenza di risonanza del circuito di figura.



Soluzione

Calcoliamo l'ammettenza di ingresso:

$$\dot{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

In condizioni di risonanza la parte immaginaria di \dot{Y} deve essere nulla:

$$\frac{\omega_0 L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}} \sqrt{1 - \frac{200^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}{0,1}} = 9798 \text{ rad/s}$$

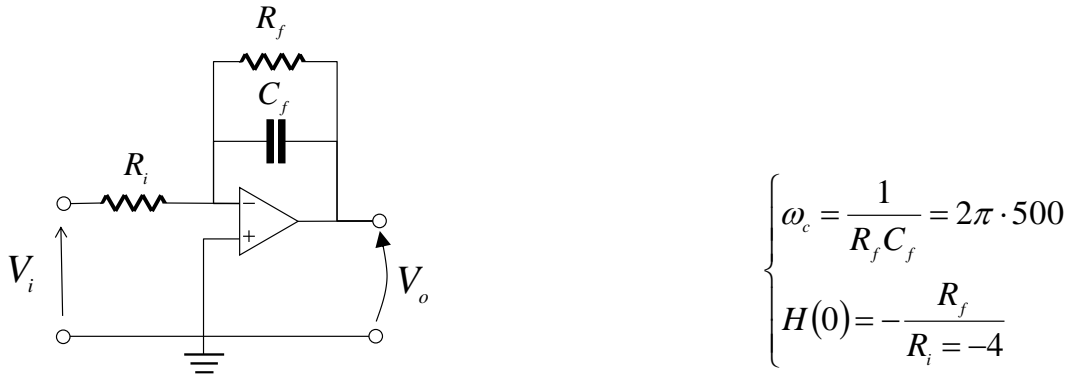
$$f_0 = \omega_0 / 2\pi = 1559 \text{ Hz}$$

Esercizio 3

Progettare un filtro attivo passa-basso che realizzi un guadagno in continua pari a 4 e una pulsazione di taglio $f_c = 500 \text{ Hz}$

Soluzione

Un filtro attivo passa-basso del primo ordine ha la seguente configurazione:



Abbiamo due equazioni in tre incognite, quindi abbiamo un grado di libertà e possiamo scegliere ad esempio il parametro circuitale capacità del condensatore:

$$C_f = 0,2 \mu\text{F}$$

Da cui:

$$R_f = \frac{1}{2\pi \cdot f_c \cdot C_f} = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}} = 1,59 \text{ k}\Omega \qquad R_i = \frac{R_f}{4} = 397,5 \Omega$$

Dobbiamo selezionare valori disponibili in commercio:

$$\Rightarrow \text{scegliamo } R_f = 1,6 \text{ k}\Omega; \quad C_f = 0,2 \mu\text{F}; \quad R_i = 400 \Omega$$

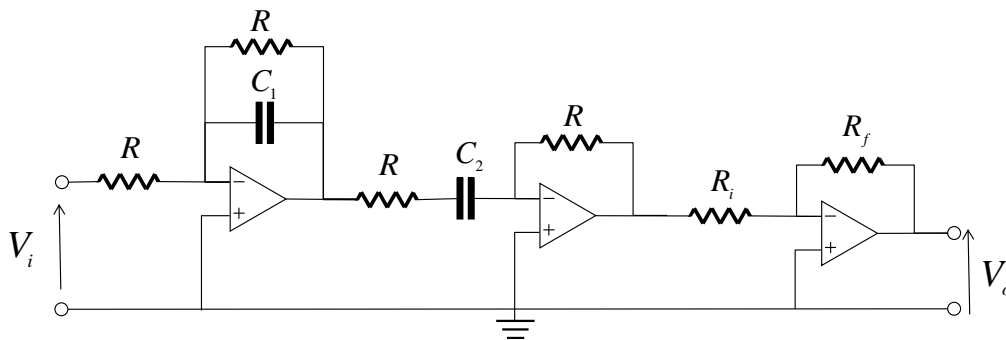
$$f_c = 497 \text{ Hz}; \quad G = 4$$

Esercizio 4

Progettare un filtro attivo passa-banda che lasci passare le frequenze comprese tra 250Hz e 3kHz e con guadagno pari a 10. Utilizzare $R=20 \text{ k}\Omega$.

Soluzione

Scegliamo la configurazione di figura:



$$\omega_1 = \frac{1}{RC_2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2\pi \cdot f_1 \cdot R} = \frac{1}{2\pi \cdot 250 \cdot 20 \cdot 10^3} = 31.83 nF$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi \cdot f_2 \cdot R} = \frac{1}{2\pi \cdot 3000 \cdot 20 \cdot 10^3} = 2.65 nF$$

$$\dot{H}(j\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_2}} \cdot \frac{j\omega/\omega_1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}} = -\frac{R_f}{R_i} \cdot \frac{j\omega\omega_2}{(\omega_1 + j\omega)(\omega_2 + j\omega)}$$

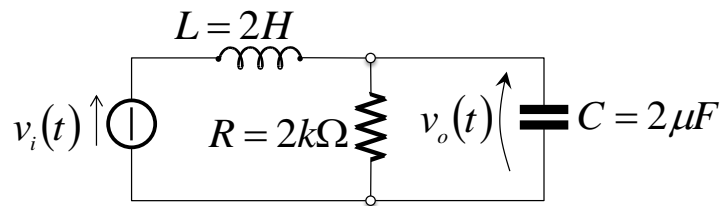
Alla frequenza centrale $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ si ha:

$$G = |H(\omega_0)| = \frac{R_f}{R_i} \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \Rightarrow \frac{R_f}{R_i} = G \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2} = G \frac{f_1 + f_2}{f_2} = 10 \frac{3250}{3000} = 10.83$$

$$\Rightarrow \text{scegliendo } R_i = 10k\Omega \quad \Rightarrow R_f = 10.83 R_i \cong 108k\Omega$$

Esercizio 5

Stabilire che tipo di filtro è il circuito in figura.



Soluzione

Calcoliamo la funzione di trasferimento

$$\dot{H}(j\omega) = \frac{\bar{V}_o}{\bar{V}_i} = \frac{R // \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + R // \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{R}{1 + j\omega RC}}{j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}} = \frac{R}{-\omega^2 RLC + R + j\omega L}$$

$$|\dot{H}(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 & |H(0)| = 1 \\ \omega \rightarrow \infty & |H(\infty)| = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un filtro passivo passa-basso del 2° ordine. Calcoliamo la frequenza di taglio: sarà quella in corrispondenza della quale il modulo di H assume un valore pari a $1/\sqrt{2}$ quello massimo:

$$|\dot{H}(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{R^2}{(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = (1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2$$

Sostituendo i valori di R, L e C e ponendo $x = \omega^2 \cdot 10^{-6}$ si ottiene:

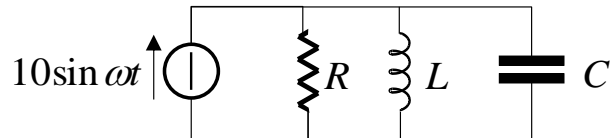
$$2 = (1 - \omega^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-6})^2 + \omega^2 \left(\frac{2}{2 \cdot 10^3}\right)^2 \rightarrow 16x^2 - 7x - 1 = 0$$

$$x_{12} = \frac{7 \mp \sqrt{49 + 64}}{2} = \begin{cases} -0,1134 & \text{si scarta} \\ 0,551 & \end{cases}$$

Ed essendo: $\omega^2 = x/10^{-6}$ si ottiene $\omega_c = \sqrt{\frac{0,551}{10^{-6}}} = 742 \text{ ras/s}$

Esercizio 6

Per il circuito di figura determinare la frequenza di risonanza, il fattore di qualità, la larghezza di banda, le pulsazioni di taglio e la potenza dissipata in corrispondenza della frequenza centrale e delle due frequenze di taglio. Siano $R=8k\Omega$; $L=0,2\text{mH}$; $C=8\mu\text{F}$.



Soluzione

Si tratta di un circuito RLC parallelo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}} = 25 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{8 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = 1600$$

$$B = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{25 \cdot 10^3}{1600} = 15,625 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Poiché il fattore di qualità del circuito è molto alto possiamo considerare le due pulsazioni di taglio simmetriche rispetto alla pulsazione di risonanza.

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{B}{2} = 25 \cdot 10^3 - \frac{15,625}{2} = 24992 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{B}{2} = 25 \cdot 10^3 + \frac{15,625}{2} = 25008 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

per $\omega = \omega_0$ $\dot{Y} = \frac{1}{R}$; $\dot{Z} = R = 8k\Omega$

La corrente che attraversa il resistore sarà:

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{10 \angle -90^\circ}{8 \cdot 10^3} = 1,25 \cdot 10^{-3} \angle -90^\circ \text{ A}$$

La potenza dissipata nel circuito alla risonanza è:

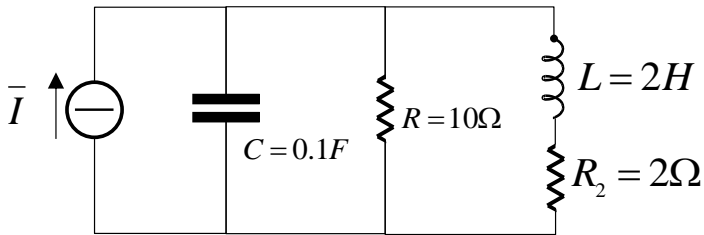
$$P = \frac{V_M^2}{2R} = \frac{100}{2 \cdot 8 \cdot 10^3} = 6,25 \text{ mW}$$

Alle pulsazioni di taglio verrà dissipata metà potenza:

$$P_{\omega_1, \omega_2} = 3,125 \text{ mW}$$

Esercizio 7

Determinare le pulsazioni di risonanza del circuito di figura.



Soluzione

Si tratta di un circuito RLC . Calcoliamone l'ammettenza in ingresso:

$$\dot{Y} = j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2 + j\omega L} = j\omega 0.1 + 0.1 + \frac{1}{2 + j\omega 2} = \left(0.1 + \frac{2}{4 + 4\omega^2}\right) + j\left(0.1\omega - \frac{2\omega}{4 + 4\omega^2}\right)$$

La parte immaginaria dell'ammettenza si annulla se:

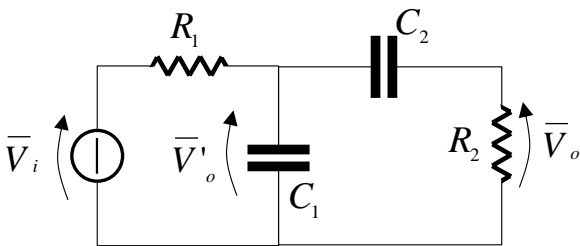
$$0.1\omega_0 - \frac{2\omega_0}{4 + 4\omega_0^2} = 0$$

$$0.4\omega_0 + 0.4\omega_0^3 - 2\omega_0 = 0 \Rightarrow 0.4\omega_0^3 - 1.6\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1.6}{0.4} = 4$$

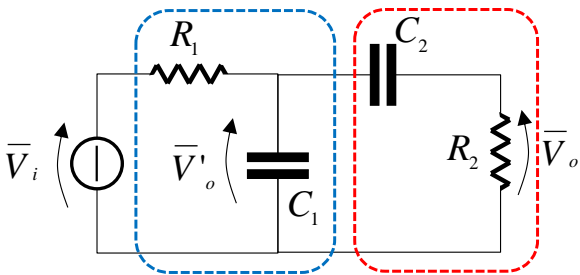
$$\omega_0 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Esercizio 8

Calcolare la funzione di trasferimento del filtro in figura. Determinare la natura del filtro.



Soluzione



Si tratta di un filtro passa-basso in cascata con un filtro passa-alto.

Il filtro passa-basso ha pulsazione di taglio:

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_1 C_1}$$

mentre il filtro passa alto ha una pulsazione di taglio:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_2 C_2}$$

Se $R_2 \gg R_1$ (cioè l'impedenza di ingresso del secondo circuito è molto maggiore dell'impedenza di uscita del primo) si ha che la funzione di trasferimento complessiva si riduce al prodotto delle due singole. Solo in questo caso la funzione di trasferimento si può ottenere moltiplicando la funzione di trasferimento dei due filtri in cascata.

$$\dot{H}'(j\omega) = \frac{\bar{V}'_0}{\bar{V}_i} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}; \dot{H}''(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}'_0} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \rightarrow$$

$$\dot{H}(j\omega) = \frac{\bar{V}_0}{\bar{V}_i} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{(1 + j\omega R_1 C_1)} \cdot \frac{j\omega R_2 C_2}{(1 + j\omega R_2 C_2)}$$

il cui modulo è:

$$|\dot{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C_1)^2}} \cdot \frac{\omega R_2 C_2}{\sqrt{1 + (\omega R_2 C_2)^2}}$$

per $\omega = 0$ $|\dot{H}(0)| = 0$

per $\omega \rightarrow \infty$ $|\dot{H}(\infty)| = 0$

Si ottiene, quindi, un filtro passa-banda passivo con:

pulsazioni di taglio ω_{c1} e ω_{c2} ,

larghezza di banda $B = \omega_{c2} - \omega_{c1}$

pulsazione di centro banda $\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$

guadagno $|\dot{H}(j\omega_0)| = \frac{\omega_{c2}}{\omega_{c1} + \omega_{c2}}$ (il guadagno è inferiore ad 1).

Possiamo determinare la funzione di trasferimento facendo ricorso alla teoria sui doppi bipoli in cascata e moltiplicando le matrici di trasmissione dei due filtri in cascata.

La matrice di trasferimento di un doppio bipolo è:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = [T] \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ -\bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{V}_2 \\ -\bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

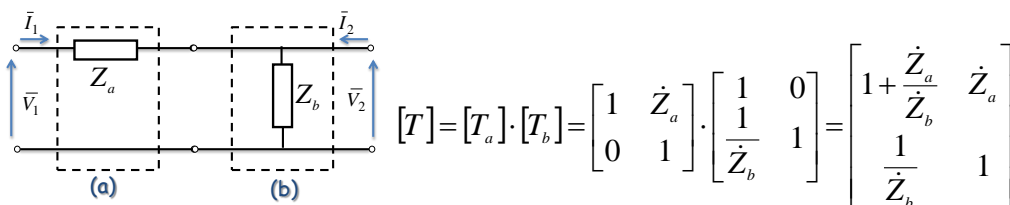
$$A = \left. \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} \right|_{\bar{I}_2=0} \quad B = - \left. \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{V}_2=0}$$

$$C = \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2} \right|_{\bar{I}_2=0} \quad D = - \left. \frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2} \right|_{\bar{V}_2=0}$$

La funzione di trasferimento cercata sarà quindi:

$$H(j\omega) = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{1}{A}$$

Ricordando che:



$$T' = \begin{bmatrix} 1 + R_1 j\omega C_1 & R_1 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \quad T'' = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{R_2 j\omega C_2} & \frac{1}{j\omega C_2} \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j\omega R_1 C_1 & R_1 \\ j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{j\omega R_2 C_2} & \frac{1}{j\omega C_2} \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{A} = \frac{1}{(1 + j\omega R_1 C_1) \frac{(1 + j\omega R_2 C_2)}{j\omega R_2 C_2} + \frac{R_1}{R_2}}$$

Se $R_2 \gg R_1$ (cioè l'impedenza di ingresso del secondo circuito è molto maggiore dell'impedenza di uscita del primo) si ha che la funzione di trasferimento complessiva si riduce al prodotto delle due singole. Solo in questo caso la funzione di trasferimento si può ottenere moltiplicando la funzione di trasferimento dei due filtri in cascata, come visto precedentemente.

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega R_1 C_1)} \cdot \frac{j\omega R_2 C_2}{(1 + j\omega R_2 C_2)}$$