Esercitazione sulle Basi di Definizione

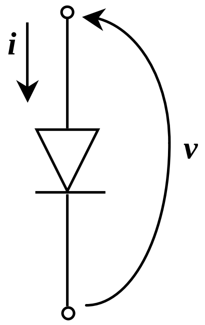
ESERCIZIO 1

Un bipolo resistivo (diodo) ha la seguente equazione:

$$i = k \cdot [v^3 - 30v^2 + 200v] \quad \text{con} \quad k \neq 0$$

nella quale ***v*** ed ***i*** sono descritti dalla convenzione degli utilizzatori come in figura.

Stabilire se il bipolo è definito su base tensione e/o su base corrente.



Risoluzione

Ricordiamo che un componente si dice definito su base tensione se, imponendo le tensioni (in questo caso il valore di v) le correnti sono sempre note univocamente attraverso le caratteristiche o le equazioni del componente.

Si può osservare facilmente che il bipolo dato è definito su base tensione. Infatti osservando l'equazione del componente, che è una $i = f(v)$, si può vedere che essa rappresenta una funzione univalente cioè ad un solo valore della v, corrisponde uno ed un solo valore della i. Non altrettanto si può dire della $v = f(i)$.

Comunque verifichiamo ciò tracciando la caratteristica $i = f(v)$. Supponiamo per comodità $k > 0$.

Troviamo le radici dell'equazione ponendo i=0:

$$v^3 - 30v^2 + 200v = 0$$

Posso scrivere:

$$v \cdot (v^2 - 30v + 200) = 0$$

e ho, intanto, v_1=0.

Per le altre 2 radici avrò da $v^2 - 30v + 200 = 0$

$$v_{2/3} = 15 \mp \sqrt{(15)^2 - 200} = 15 \mp \sqrt{225 - 200} = 15 \mp 25 = 15 \mp 5$$

da cui v_2=10 e v_3=20.

Quindi la funzione si annulla in v_1=0, v_2=10 e v_3=20.

Determiniamo ora gli eventuali massimi e minimi della funzione.

Intanto calcoliamo la derivata prima e uguagliamola a zero:

$$\frac{di}{dv} = k \cdot \left[3v^2 - 60v + 200\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 3v^2 - 60v + 200 = 0$$

$$v_{1/2} = \frac{30 \mp \sqrt{(30)^2 - 600}}{3} = \frac{30 \mp \sqrt{900 - 600}}{3} = \frac{30 \mp \sqrt{300}}{3} = \frac{30 \mp 10\sqrt{3}}{3} =$$

$$= 10 \cdot \left(1 \mp \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Quindi la derivata prima si annulla in:

$$v_1 = 10 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 4.23$$

$$v_2 = 10 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 15.77$$

Calcoliamo la derivata seconda per sapere se sono punti di massimo o minimo:

$$\frac{d^2 i}{dv^2} = k \cdot [6v - 60] = 0$$

$$\left.\frac{d^2 i}{dv^2}\right|_{v_1} = k \cdot [6 \cdot 4.23 - 60] < 0 \text{ concavità verso il basso e quindi punto di max.}$$

$$\left.\frac{d^2 i}{dv^2}\right|_{v_2} = k \cdot [6 \cdot 15.77 - 60] > 0 \text{ concavità verso l'alto e quindi punto di min.}$$

Ricerchiamo gli asintoti:

$$\lim_{v \to \pm\infty} i(v) = \pm\infty$$

Ci potrebbero essere asintoti obliqui con:

$$\text{m} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{finito}$$

e

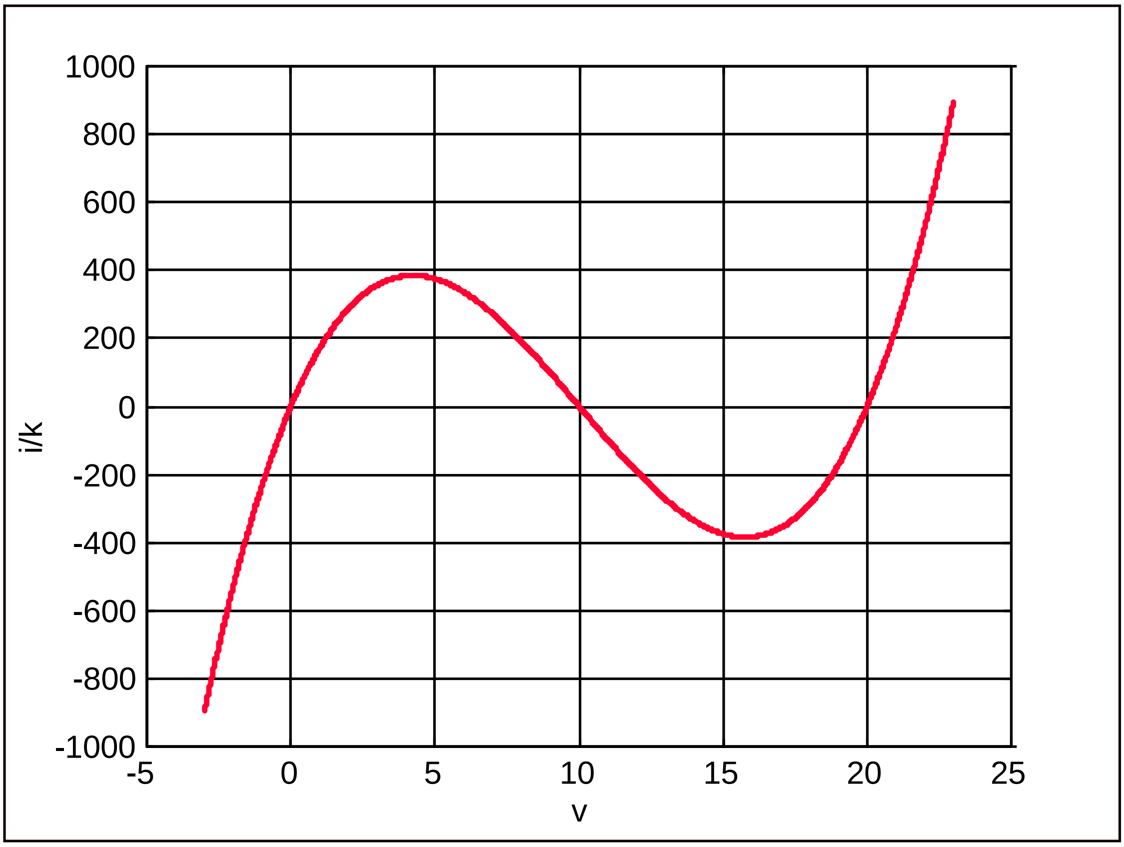
$$\text{q} = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx\right] \qquad \text{finito}$$

ma

$$\lim_{v \to \infty} \frac{i(v)}{v} = \infty$$

e perciò non esistono neanche asintoti obliqui.

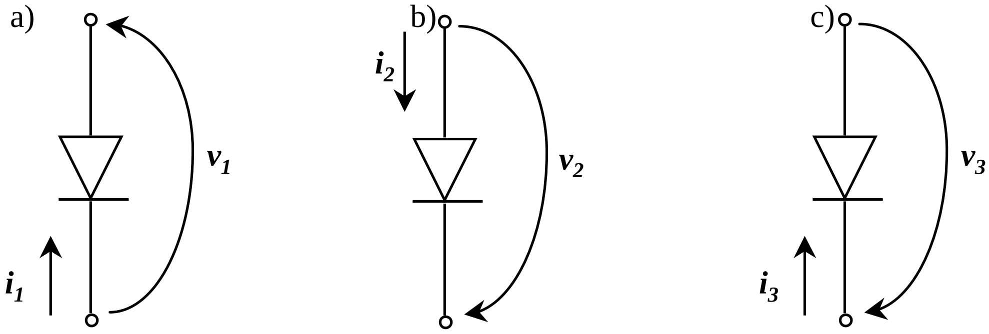
Tracciamo il grafico della funzione:



Come si può notare dalla caratteristica il bipolo è definito solo su base tensione.

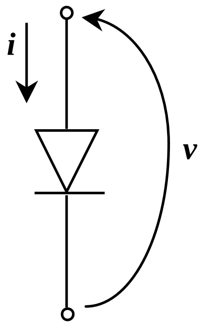
ESERCIZIO 2

Dato il diodo del precedente esercizio, modificare come occorre l'equazione, se invece delle *v* ed *i* assegnate, si scelgono le variabili come segue:



Risoluzione

Nel caso dell'esercizio 1 si aveva:



$$i = k \cdot [v^3 - 30v^2 + 200v]$$

a) Si ha:

$v_1 = v$

$i_1 = -i$

l'equazione diventa:

$$-i_1 = k \cdot [v_1^3 - 30v_1^2 + 200v_1]$$

b) Si ha:

$v_2 = -v$

$i_2 = i$

l'equazione diventa:

$$i_2 = k \cdot [-v_2^3 - 30v_2^2 - 200v_2]$$

c) Si ha:

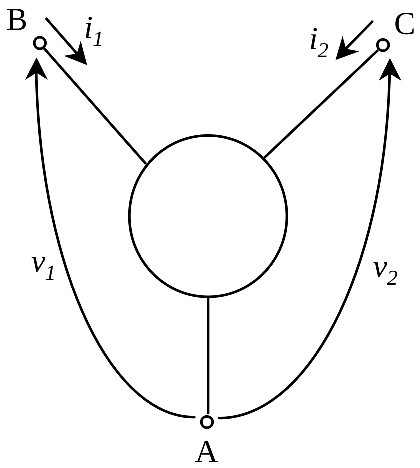
$v_3 = -v$

$i_3 = -i$

l'equazione diventa:

$$-i_3 = k \cdot [-v_3^3 - 30v_3^2 - 200v_3]$$

ESERCIZIO 3

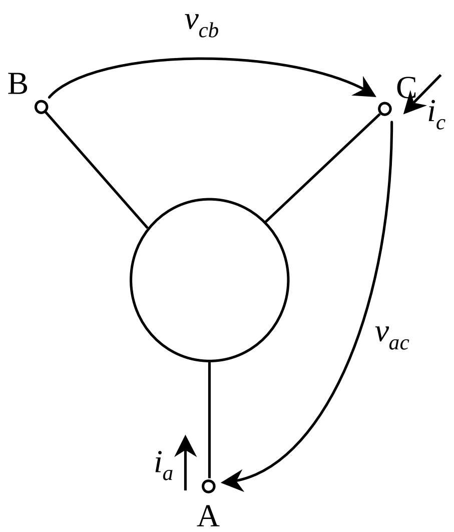


Per il tripolo di figura, con la convenzione normale indicata, le equazioni del componente sono:

$$\begin{cases} v_1 = \alpha \cdot i_1 \\ v_2 = \beta \cdot i_1 + \gamma \cdot i_2 \end{cases} \tag{1}$$

dove α, β e γ sono coefficienti noti.

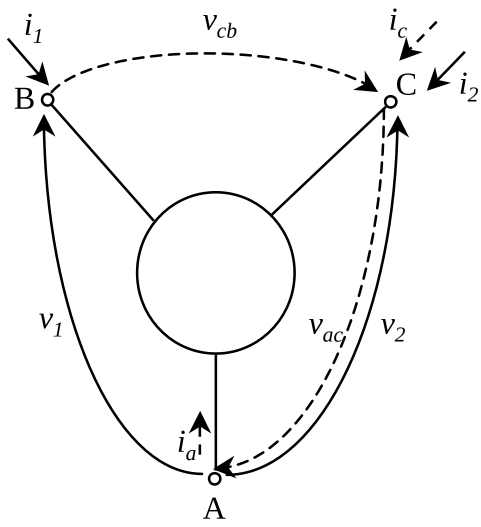
Determinare le equazioni descrittive se le variabili descrittive sono assunte come in figura a lato.



Risoluzione

Facciamo una premessa. Se abbiamo un componente generico con n terminali e fissato un morsetto come riferimento (e quindi un **terminale comune**), si assumono come **correnti descrittive** le correnti in tutti gli altri n-1 terminali con orientamento entrante nella superficie limite del componente e come **tensioni descrittive** le tensioni fra ciascuno dei morsetti diversi dal comune e il comune stesso, orientate secondo le frecce che procedono dal comune al singolo morsetto. Questa è la **convenzione normale o degli utilizzatori**. Quindi per un componente a n terminali avrò n-1 correnti descrittive, n-1 tensioni descrittive e n-1 equazioni descrittive che legano le n-1 tensioni con le n-1 correnti.
Nel nostro caso abbiamo un tripolo, quindi n=3, perciò 2 correnti descrittive, 2 tensioni descrittive e 2 equazioni descrittive.
Il secondo insieme di variabili descrittive non rispetta la convenzione degli utilizzatori.

Dal confronto fra i due insiemi di variabili descrittive si ha:



$$\begin{cases} v_1 + v_{cb} + v_{ac} = 0 \\ v_2 + v_{ac} = 0 \\ i_1 + i_c + i_a = 0 \\ i_2 = i_c \end{cases} \qquad (*)$$

Risolvendo (*) rispetto a v_1 ,v_2 ,i_1 ,i_2 si ha:

$$\begin{cases} v_1 = -v_{cb} - v_{ac} \\ v_2 = -v_{ac} \\ i_1 = -i_c - i_a \\ i_2 = i_c \end{cases}$$

Sostituendo nelle equazioni del componente, le (1), si ottiene:

$$\begin{cases} -v_{cb} - v_{ac} = \alpha \cdot (-i_a - i_c) \\ -v_{ac} = \beta \cdot (-i_a - i_c) + \gamma \cdot i_c \end{cases}$$

le quali si possono riportare ad una forma più elegante nel modo che segue:

$$\begin{cases} -v_{cb} + \beta \cdot (-i_a - i_c) + \gamma \cdot i_c = -\alpha \cdot i_a - \alpha \cdot i_c) \\ v_{ac} = -\beta \cdot i_a + (\gamma - \beta) \cdot i_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{cb} = -\beta \cdot i_a - \beta \cdot i_c + \gamma \cdot i_c + \alpha \cdot i_a + \alpha \cdot i_c \\ v_{ac} = -\beta \cdot i_a + (\gamma - \beta) \cdot i_c \end{cases}$$

e infine:

$$\begin{cases} v_{cb} = (\alpha - \beta) \cdot i_a + (\alpha - \beta + \gamma) \cdot i_c \\ v_{ac} = -\beta \cdot i_a + (\gamma - \beta) \cdot i_c \end{cases}$$

Si noti che il procedimento per ottenere le (*) è quello più adatto e più breve per la trasformazione delle equazioni del componente:
ogni percorso chiuso per le tensioni impiega una tensione del primo insieme di variabili descrittive e due del secondo, in modo tale che le equazioni siano risolvibili rispetto a v_1 e v_2 senza effettuare procedimenti di sostituzione. Lo stesso è stato fatto per le correnti.
Procedimenti diversi sono più lunghi.
Si noti inoltre la maggiore semplicità strutturale delle equazioni del componente per il primo insieme di variabili descrittive (v_1 dipende solo da i_1 mentre v_{cb} e v_{ac} dipendono entrambe sia da i_a che da i_c.
Le scelte di differenti insiemi di variabili descrittive per uno stesso componente, anche se perfettamente equivalenti dal punto di vista della complessità delle equazioni risultanti.

ESERCIZIO 4

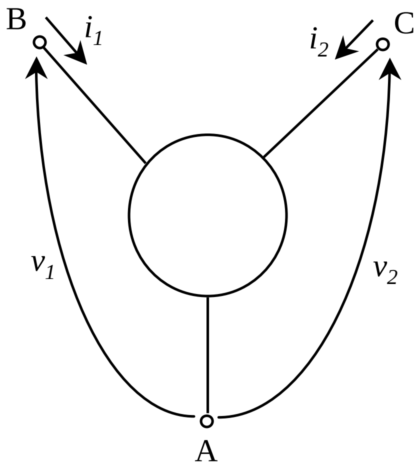
Si consideri ancora il tripolo precedente e si assumano per equazioni del componente quelle dell'insieme (1).
Si determinino le possibili basi di definizione del componente nei seguenti tre casi:

1) $\alpha = 0, \quad (\beta \neq 0, \gamma \neq 0)$

2) $\beta = 0, \quad (\alpha \neq 0, \gamma \neq 0)$

3) $\gamma = 0, \quad (\beta \neq 0, \gamma \neq 0)$

Risoluzione



$$\begin{cases} v_1 = \alpha \cdot i_1 \\ v_2 = \beta \cdot i_1 + \gamma \cdot i_2 \end{cases} \qquad (1)$$

1) per $\alpha = 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ le equazioni del componente diventano:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \beta \cdot i_1 + \gamma \cdot i_2 \end{cases}$$

una variabile che va comunque assegnata è i_1 e si può considerare il seguente albero di possibilità:

$$i_1 \left\langle \begin{matrix} i_2 & \Rightarrow & (i_1, i_2) & \text{base corrente, è possibile} \\ v_2 & \Rightarrow & (i_1, v_2) & \text{base mista, è possibile} \end{matrix} \right.$$

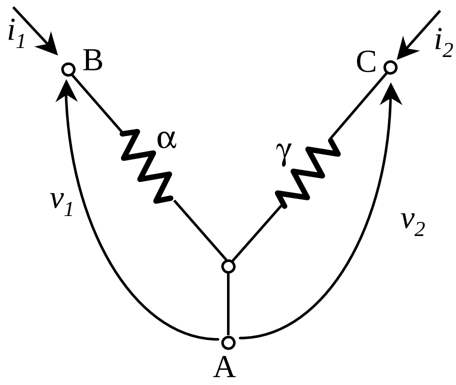
2) per $\beta = 0, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ le equazioni del componente diventano:

$$\begin{cases} v_1 = \alpha \cdot i_1 \\ v_2 = \gamma \cdot i_2 \end{cases}$$

in questo caso sono evidentemente ammesse tutte le basi (tensione, corrente e le due miste). Quindi:

$(v_1, v_2), (i_1, i_2), (v_1, i_2), (v_2, i_1)$

Si osservi che in tal caso le equazioni sono quelle che possono essere attribuite al seguente modello:



ove α e γ rappresentano le resistenze dei due resistori

3) per $\gamma = 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$ le equazioni del componente diventano:

$$\begin{cases} v_1 = \alpha \cdot i_1 \\ v_2 = \beta \cdot i_2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si può vedere che sia v_1 che i_1 possono far parte della base.
Se si sceglie v_1 si ha il seguente albero di possibilità:

v_1

- v_2 non lecita, imporrebbe $i_1 = \dfrac{v_1}{\alpha}$ ma anche $i_1 = \dfrac{v_2}{\beta}$ che in generale è contraddittoria $\left(\dfrac{v_1}{\alpha} \neq \dfrac{v_2}{\beta}\right)$. Inoltre i_2 resterebbe indeterminata
- i_2 ammissibile, sono univocamente determinate tutte le variabili in gioco

Scegliendo i_1 si ha:

i_1

- v_2 non lecita, non è possibile fissare arbitrariamente i_1 e v_2 perchè esse devono essere legate dalla $v_2 = \beta \cdot i_1$
- i_2 ammissibile, infatti fissata i_1 sono subito note v_1 e v_2 dalle equazioni. Inoltre la corrente i_2 è fissata da noi.

Riassumendo, il componente è definito sulle seguenti basi:

(i_1, i_2) base corrente
(v_1, i_2) base mista