



Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2021/22

Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> **Lezione 5**

Trave su suolo elastico alla Winkler

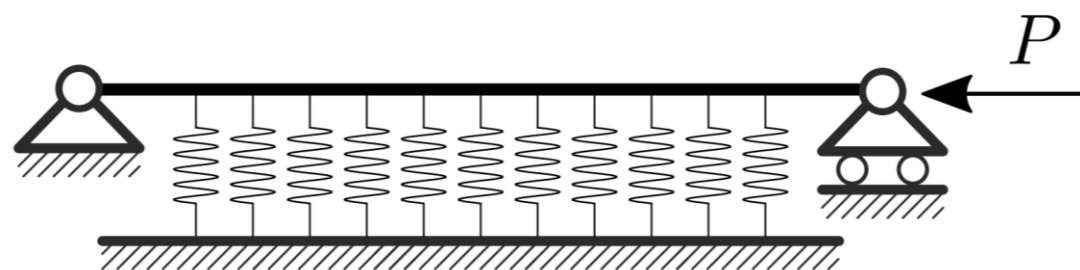
Victor Eremeev

Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso

emanuele.reccia@unica.it

victor.eremeev@unica.it

Trave su suolo elastico alla Winkler



Quando una trave compressa è appoggiata su un mezzo elastico, questo contribuisce alla rigidità del sistema, e dunque aumenta il carico critico. La modellazione del mezzo è, come noto, problema assai complesso. Il più semplice modello consiste nel cosiddetto *suolo elastico alla Winkler*, che è una schematizzazione estrema, in cui la reazione di sottofondo r_f all'ascissa x è assunta proporzionale, attraverso una costante k_f (detta di Winkler), allo spostamento $v(x)$ nello stesso punto (ignorando così la natura non-locale dell'interazione tra trave e suolo). Si assume cioè che $r_f(x) = -k_f v(x)$. Si ammette inoltre che il contatto sia *bilaterale*, cioè che il suolo sia in grado di opporsi anche ad azioni di distacco, oltre che di compenetrazione. Ciò presuppone implicitamente la presenza di forze trasversali, che assicurano il contatto trave-suolo. Poiché, queste forze non incidono sul carico critico, ma possono ritenersi quali imperfezioni, si ignorano nell'analisi.

Trave su suolo elastico alla Winkler

Il problema di biforcazione della trave compressa su suolo alla Winkler è governato dall'equazione differenziale

$$EI v'''' + P v'' + k_f v = 0$$

si riscrive nella forma:

$$v'''' + 2\mu\gamma^2 v'' + \gamma^4 v = 0$$

dove:

$$\gamma^4 = \frac{k_f}{EI}$$

è un parametro di rigidezza, e:

$$\mu := \frac{1}{2} \frac{P}{\sqrt{EI k_f}}$$

è il *carico adimensionale*.



Posta la soluzione nella forma $v(x) = e^{\lambda x}$, l'equazione differenziale fornisce l'equazione caratteristica:

$$\lambda^4 + 2\mu\gamma^2 \lambda^2 + \gamma^4 = 0$$

le cui quattro radici sono:

$$\lambda = \pm i \gamma \sqrt{\mu \mp \sqrt{\mu^2 - 1}}$$

Si possono verificare tre casi:

- **Caso I:** $\mu > 1$.
- **Caso II:** $\mu = 1$.
- **Caso III:** $\mu < 1$.

$$\lambda = \pm i \gamma \sqrt{\mu \mp \sqrt{\mu^2 - 1}}$$

- **Caso I:** $\mu > 1$. In questo caso, valgono le seguenti disuguaglianze:

$$0 < \mu^2 - 1,$$

$$0 < \sqrt{\mu^2 - 1} < \mu,$$

$$0 < \mu \mp \sqrt{\mu^2 - 1}$$

che implicano che le quattro radici sono puramente immaginarie.

Posto:

$$\omega_1 := \gamma \sqrt{\mu - \sqrt{\mu^2 - 1}}, \quad \omega_2 := \gamma \sqrt{\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}}$$

esse si scrivono:

$$\lambda_1 = i \omega_1, \quad \lambda_2 = -i \omega_1, \quad \lambda_3 = i \omega_2, \quad \lambda_4 = -i \omega_2$$

La soluzione generale del problema omogeneo è dunque:

$$v(x) = c_1 \cos(\omega_1 x) + c_2 \sin(\omega_1 x) + c_3 \cos(\omega_2 x) + c_4 \sin(\omega_2 x)$$

con c_i costanti arbitrarie.

$$\lambda = \pm i \gamma \sqrt{\mu \mp \sqrt{\mu^2 - 1}}$$

- **Caso II:** $\mu = 1$. In questo caso le radici sono doppie e si scrivono:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = i \gamma \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -i \gamma$$

cosicché la soluzione generale del problema omogeneo diventa:

$$v(x) = c_1 \cos(\gamma x) + c_2 \sin(\gamma x) + c_3 x \cos(\gamma x) + c_4 x \sin(\gamma x)$$

con c_i costanti arbitrarie.

$$\lambda = \pm i \gamma \sqrt{\mu \mp \sqrt{\mu^2 - 1}}$$

- **Caso III:** $\mu < 1$. In questo caso le radici sono numeri complessi, con parte reale diversa da zero:

$$\lambda = \pm i \gamma \sqrt{\mu \mp i \sqrt{1 - \mu^2}}$$

Attraverso manipolazioni algebriche, la quattro radici si possono riscrivere come:

$$\lambda_1 = \alpha + i \omega, \quad \lambda_2 = \alpha - i \omega, \quad \lambda_3 = -\alpha + i \omega, \quad \lambda_4 = -\alpha - i \omega$$

dove si è posto:

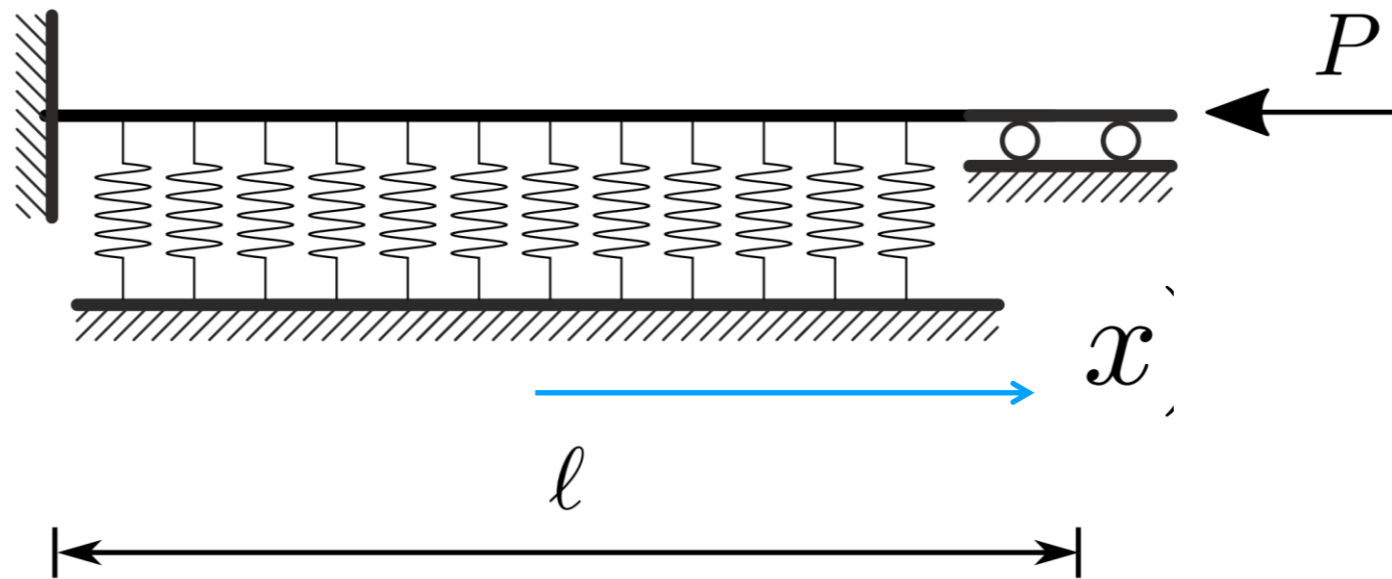
$$\alpha := \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \mu}, \quad \omega := \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \mu}$$

La soluzione generale del problema omogeneo diventa:

$$v(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x) \right) + e^{-\alpha x} \left(c_3 \cos(\omega x) + c_4 \sin(\omega x) \right)$$

con c_i costanti arbitrarie.

Trave incastro-glifo su suolo elastico



Quale esempio di applicazione della teoria generale qui sviluppata, si considera una trave doppiamente incastrata agli estremi, in cui uno dei due vincoli sia scorrevole longitudinalmente. Stante la simmetria, è conveniente posizionare l'origine delle coordinate in mezzeria. Le condizioni al contorno si scrivono

$$\begin{aligned}v(-\ell/2) &= 0, & v'(-\ell/2) &= 0, \\v(\ell/2) &= 0, & v'(\ell/2) &= 0\end{aligned}$$

Per valutare il carico critico bisogna investigare i tre. Ipotizzando che il carico critico adimensionale μ sia maggiore di 1, si ricade nel **caso I**. Sostituendo il relativo integrale generale nelle condizioni al contorno, si traggono quattro equazioni algebriche nelle quattro costanti incognite c_i ; $i = 1 - 4$. Sommando e sottraendo mutuamente le equazioni, è possibile ottenere il seguente sistema algebrico diagonalizzato a blocchi

$$\begin{pmatrix} \omega_1 S_1 & \omega_2 S_2 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & S_2 \\ 0 & 0 & \omega_1 C_1 & \omega_2 C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $C_i := \cos\left(\frac{\omega_i \ell}{2}\right)$, $S_i := \sin\left(\frac{\omega_i \ell}{2}\right)$, $i = 1, 2$.

Stante la struttura della matrice, il suo determinante è pari al prodotto dei determinanti dei singoli blocchi, per cui il problema si spezza in due sottoproblemi, governati dalle seguenti equazioni caratteristiche:

$$\omega_1 \sin\left(\frac{\omega_1 \ell}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_2 \ell}{2}\right) - \omega_2 \cos\left(\frac{\omega_1 \ell}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_2 \ell}{2}\right) = 0$$

$$\omega_2 \sin\left(\frac{\omega_1 \ell}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_2 \ell}{2}\right) - \omega_1 \cos\left(\frac{\omega_1 \ell}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_2 \ell}{2}\right) = 0$$

La prima equazione corrisponde ai modi di buckling simmetrici

$$c_1 \neq 0, c_3 \neq 0 \text{ e } c_2 = c_4 = 0$$

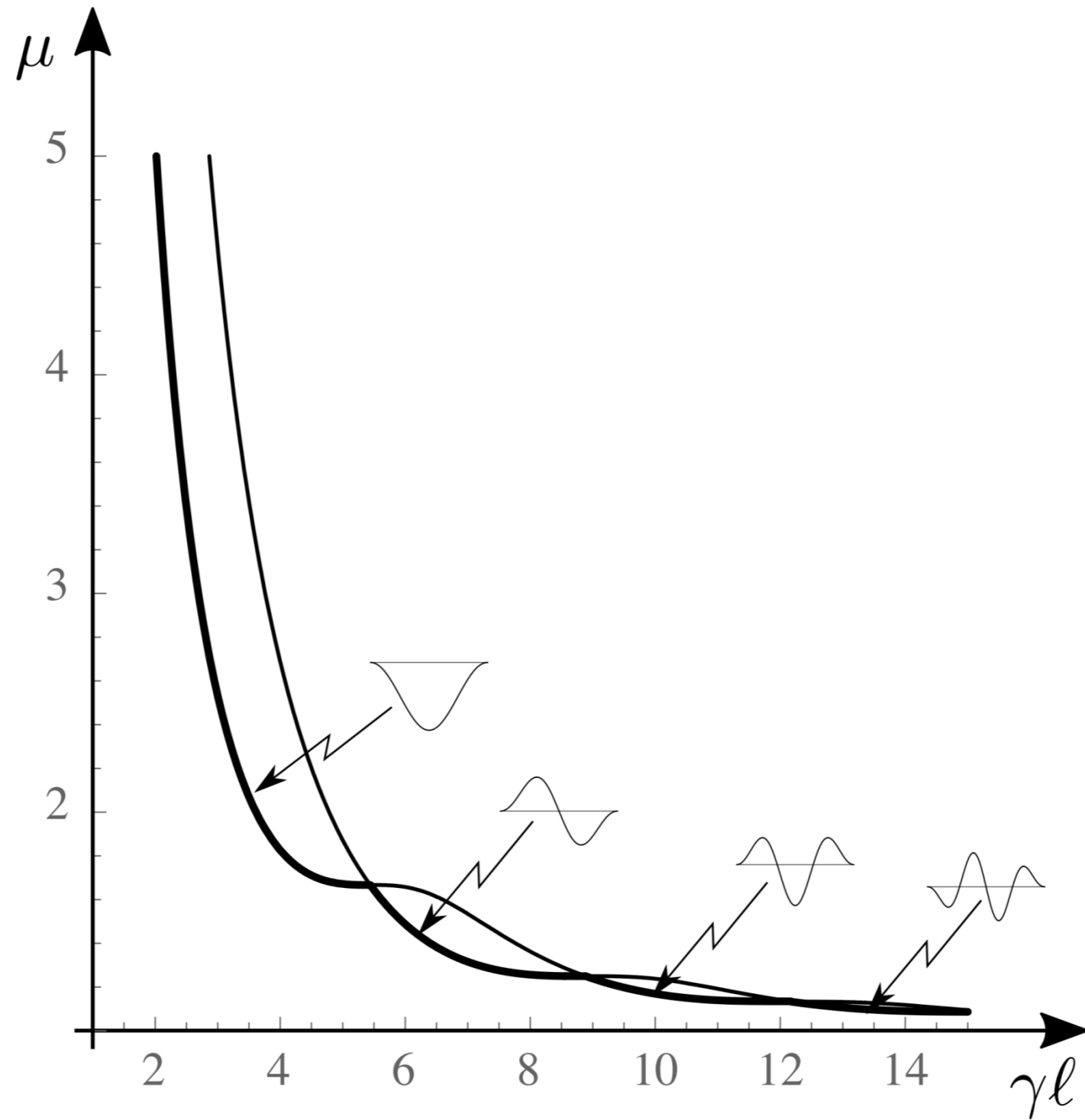
mentre la seconda corrisponde a modi antisimmetrici

$$c_1 = c_3 = 0 \text{ e } c_2 \neq 0, c_4 \neq 0$$

si perviene ad equazioni trascendenti nei due parametri adimensionali, μ e γ' .

Il grafico delle due funzioni implicite, relative a modi simmetrici ed antisimmetrici, è riportato in Figura, unitamente alla forma modale corrispondente. L'involuppo delle curve più basse è indicato con una curva più spessa. Si vede che, come nel caso della trave appoggiata, il modo critico è alternativamente simmetrico e antisimmetrico; dove le due curve si intersecano, si verificano modi simultanei

Se si ripete l'analisi per i casi II e III, si trovano sistemi algebrici nelle incognite c_i ; le cui equazioni caratteristiche non ammettono soluzione, al di fuori di quella banale. **L'unica soluzione, pertanto, è quella già trovata, relativa al caso I**



I_1/I_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
m	0.250	1.350	1.593	1.763	1.904	2.023	2.128	2.223	2.311	2.392	$\pi^2/4$

$$P_{cr} = \frac{mEI_2}{l^2}$$