Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria e Architettura
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura
***Magistrale Ingegneria Civile 2 anno* a.a. 2021/22**

Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> Lezione 4

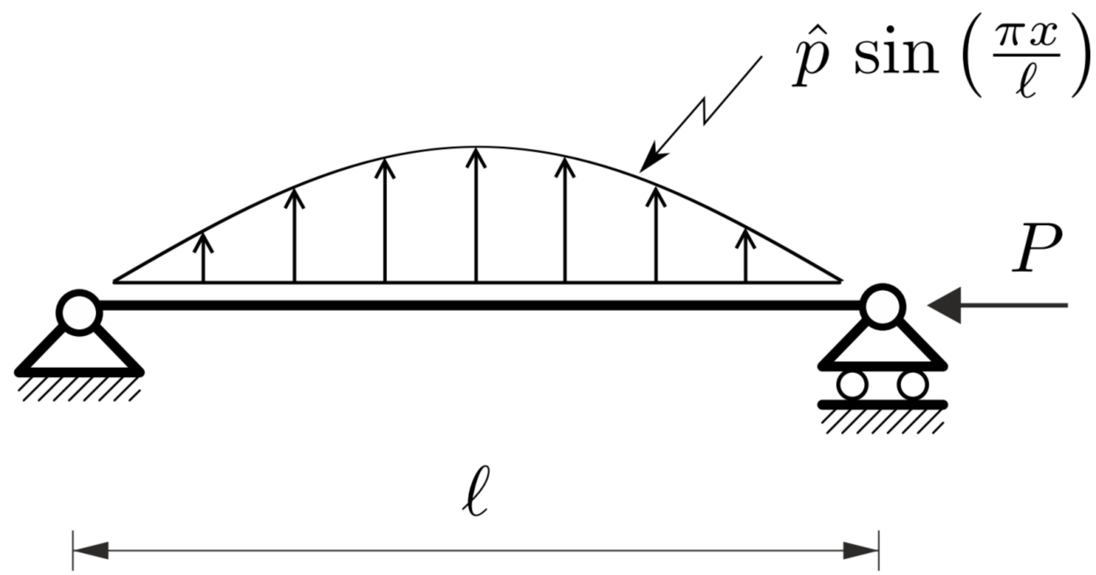
Buckling elastico dei sistemi piani di travi

Victor Eremeev

victor.eremeev@unica.it

Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso
emanuele.reccia@unica.it

Trave appoggiata soggetta a carico trasversale sinusoidale



$$EI\,v'''' + P\,v'' = \hat{p}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \qquad x \in (0, \ell)$$

Se le condizioni al contorno sono di semplice appoggio, deve essere:

$$\begin{aligned} v\,(0) = 0, \quad EIv''\,(0) = 0, \\ v\,(\ell) = 0, \quad EIv''\,(\ell) = 0 \end{aligned}$$

In questo caso, la soluzione può essere trovata 'per ispezione' come:

$$v = \hat{v}\,\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

Le condizioni al contorno, infatti, sono da questa soddisfatte, e l'equazione di campo si riduce ad algebrica nell'ampiezza incognita $\hat{v}$:

$$\left(\frac{EI\,\pi^4}{\ell^4} - \frac{P\,\pi^2}{\ell^2}\right)\hat{v} = \hat{p}$$

La soluzione è dunque:

$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\frac{EI\,\pi^4}{\ell^4} - \frac{P\,\pi^2}{\ell^2}} = \frac{1}{1-\frac{P}{P_c}}\,\frac{\hat{p}}{\frac{\pi^4\,EI}{\ell^4}} =: \alpha\,\hat{v}_I$$

dove $P_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$ è il carico critico,

$$\hat{v}_I := \frac{\hat{p}}{\frac{\pi^4\,EI}{\ell^4}}$$

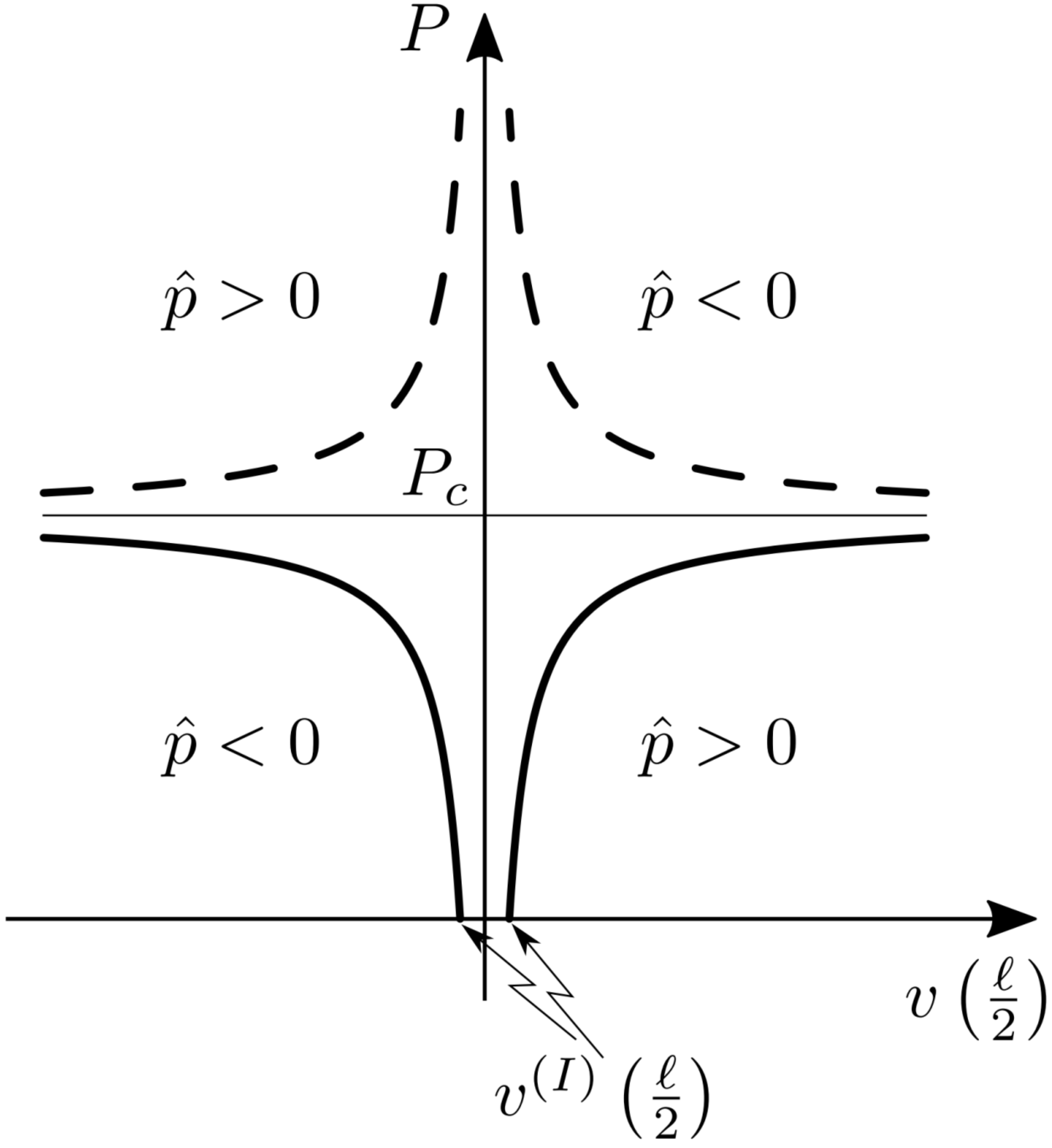
$$\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\frac{EI\,\pi^4}{\ell^4} - \frac{P\,\pi^2}{\ell^2}} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}} \frac{\hat{p}}{\frac{\pi^4\,EI}{\ell^4}} =: \alpha\,\hat{v}_I$$

è l'ampiezza della risposta secondo la teoria lineare (o del primo ordine, in cui si trascurano gli effetti geometrici), ed inoltre:

$$\alpha := \frac{1}{1 - \frac{P}{P_c}}$$

è un *fattore di amplificazione*, maggiore di 1 se $P \leq P_c$. In definitiva, la soluzione si scrive:

$$v\,(x) = \alpha\,\hat{v}_I\,\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) =: \alpha\,v_I\,(x)$$


P
$\hat{p} > 0$
$\hat{p} < 0$
P_c
$\hat{p} < 0$
$\hat{p} > 0$
$v\left(\frac{\ell}{2}\right)$
$v^{(I)}\left(\frac{\ell}{2}\right)$

Trave appoggiata soggetta a carico trasversale generico

Si considera ancora una trave appoggiata, ma soggetta a carico trasversale generico $p(x)$. L'equazione di equilibrio si scrive:

$$EI\,v'''' + P\,v'' = p(x)\,, \qquad x \in (0, \ell)$$

$$v(0) = 0, \quad EIv''(0) = 0,$$
$$v(\ell) = 0, \quad EIv''(\ell) = 0$$

Si assume che il carico sia sviluppabile in serie di Fourier:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \hat{p}_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

dove $\hat{p}_k$ sono i coefficienti della serie, espressi da:

$$\hat{p}_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell p(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \mathrm{d}x$$

In analogia a quanto fatto per il caso di una sola armonica, si cerca una soluzione del tipo:

$$v = \sum_{k=1}^{n} \hat{v}_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

da cui, sostituendo nell'equazione di equilibrio e uguagliando a zero i coefficienti delle stesse armoniche, si ottiene:

$$v\left(x\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \hat{v}_{Ik} \, \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

dove:

$$\alpha_k := \frac{1}{1 - \frac{P}{P_k}}$$

$$\hat{v}_{Ik} := \frac{\hat{p}_k}{\frac{k^4 \pi^4 \, EI}{\ell^4}}$$

e $P_k = \frac{k^2\pi^2 EI}{\ell^2}$ è il k-esimo carico critico. È importante osservare che siccome $P_{k+1} > P_k,\ k = 1, \cdots, n$, *i fattori di amplificazioni decrescono con* k. Da questa osservazione segue che:

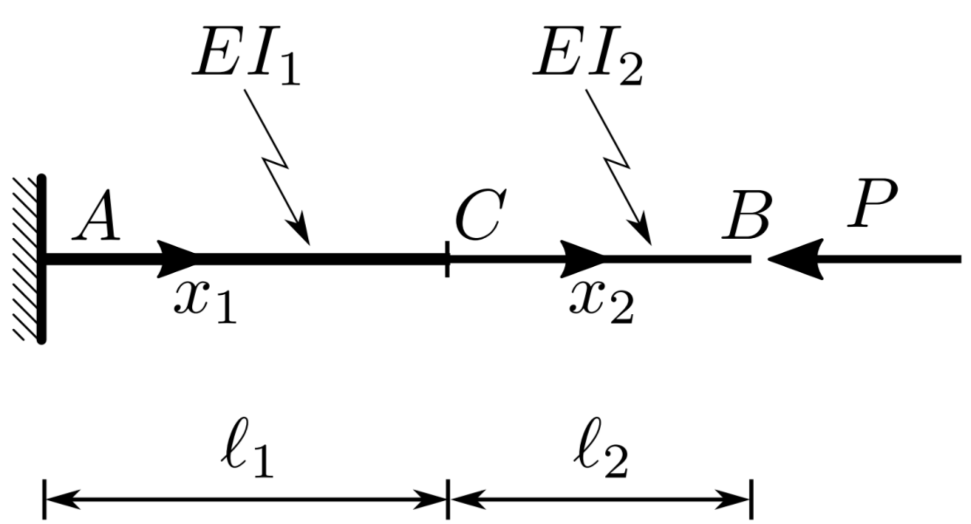
$$v\left(x\right) < \alpha_1 \sum_{k=1}^{n} \hat{v}_{Ik} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = \alpha_1 \, v_I\left(x\right)$$

e quindi, in un'ottica cautelativa, si può effettuare la seguente *maggiorazione*:

$$v\left(x\right) \simeq \alpha_1 \, v_I\left(x\right)$$

Travi di rigidezza variabile a tratti

Molto spesso la rigidezza delle travi non è costante sulla lunghezza, ma è variabile a tratti; è cioè $EI\,(x) = EI_i = \text{cost}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, in sotto-intervalli $\mathcal{I}_i$ del dominio $(0, \ell)$.



Le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$
\begin{aligned}
EI_1\, v_1'''' + P\, v_1'' &= 0, \quad x_1 \in (0, \ell_1) \\
EI_2\, v_2'''' + P\, v_2'' &= 0, \quad x_2 \in (0, \ell_2)
\end{aligned}
$$

Le condizioni al contorno agli estremi A, B della trave sono quelle classiche di incastro e di estremo libero, rispettivamente; le condizioni nel punto singolare C esprimono la continuità degli spostamenti e l'equilibrio dell'elemento infinitesimo di trave a cavallo dei due intervalli. Esse si scrivono:

$$
\begin{aligned}
v_1(0) &= 0, & v_1'(0) &= 0, \\
M_2(\ell_2) &= 0, & V_2(\ell_2) &= 0, \\
v_1(\ell_1) &= v_2(0), & v_1'(\ell_1) &= v_2'(0), \\
M_1(\ell_1) &= M_2(0), & V_1(\ell_1) &= V_2(0)
\end{aligned}
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
M_i(x_i) &= EI_i\, v_i''(x_i), \\
T_i(x_i) &= -EI_i\, v_i'''(x_i), \qquad\qquad i = 1, 2 \\
V_i(x_i) &= T_i(x_i) - P\, v_i'(x_i),
\end{aligned}
$$

L'integrale generale

$$v_1\left(x_1\right) = c_1\ \cos\left(\beta_1 x_1\right) + c_2\ \sin\left(\beta_1 x_1\right) + c_3\, x_1 + c_4,$$
$$v_2\left(x_2\right) = c_5\ \cos\left(\beta_2 x_2\right) + c_6\ \sin\left(\beta_2 x_2\right) + c_7\, x_2 + c_8$$

dove c_j, $j = 1, \cdots, 8$, sono costanti arbitrarie e

$$\beta_i^2 = \frac{P}{EI_i}, \qquad i = 1, 2$$

Imponendo le condizioni al contorno si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2^2 C_2 & -\beta_2^2 S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2^2 & 0 \\ C_1 & S_1 & \ell_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -\beta_1 S_1 & \beta_1 C_1 & 1 & 0 & 0 & -\beta_2 & -1 & 0 \\ -\beta_2^2 C_1 & -\beta_2^2 S_1 & 0 & 0 & \beta_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2^2 & 0 & 0 & 0 & \beta_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $C_i := \cos(\beta_i \ell_i)$, $S_i := \sin(\beta_i \ell_i)$, $i = 1, 2$, **da cui si trae l'equazione caratteristica:**

$$\tan(\beta_1 \ell_1) \tan(\beta_2 \ell_2) = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

$$\beta_i^2 = \frac{P}{EI_i},$$

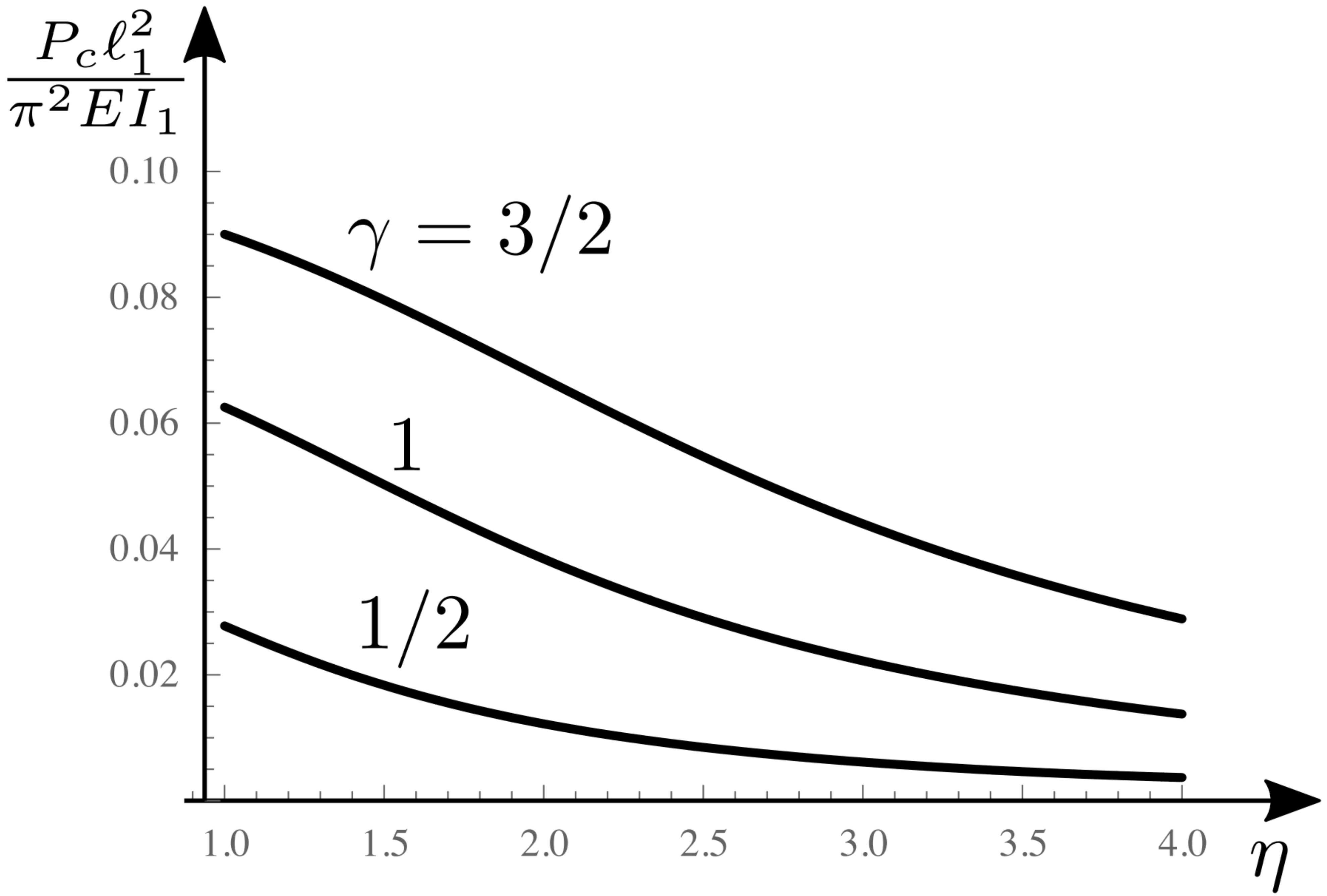
Questa può anche scriversi:

$$\tan(\beta_1\ell_1)\tan\left(\frac{\eta}{\gamma}\beta_1\ell_1\right)=\eta$$

dove si sono introdotti i parametri adimensionali:

$$\eta:=\sqrt{\frac{EI_1}{EI_2}},\quad \gamma:=\frac{\ell_1}{\ell_2}$$

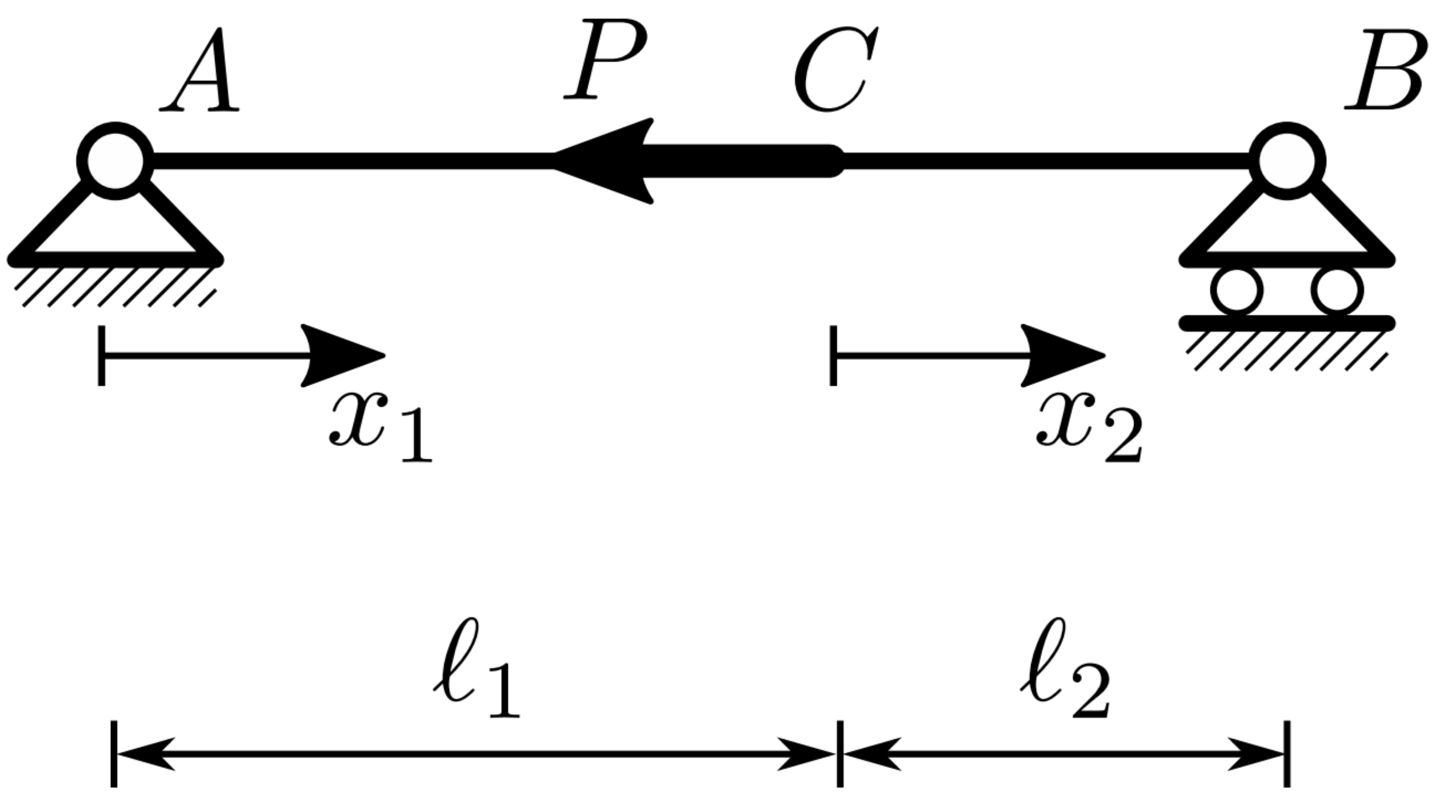
che definiscono il rapporto di rigidezza η e geometrico γ dei due segmenti di trave. Per una fissata coppia di questi parametri si determina la più piccola radice β_{1c}, e da questa il carico critico $P_c = \beta_{1c}^2 EI_1$.



$\frac{P_c \ell_1^2}{\pi^2 E I_1}$
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
$\gamma = 3/2$
1
1/2
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
η

Trave parzialmente compressa

Si considera una trave appoggiata AB soggetta a forza assiale P applicata in un punto generico C, che divide la trave in due segmenti di lunghezza ℓ_1, ℓ_2, diretta verso l'appoggio fisso



$$N_0(x) = \begin{cases} -P, & \text{in} \quad x_1 \in (0, \ell_1) \\ 0, & \text{in} \quad x_2 \in (0, \ell_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &EI\, v_1'''' + P\, v_1'' = 0, \quad && x_1 \in (0, \ell_1) \\ &EI\, v_2'''' = 0, && x_2 \in (0, \ell_2) \end{aligned}$$

in cui $v_i(x_i)$ è il campo di spostamento nell'i-esimo sotto-intervallo. Le condizioni al contorno nei punti A, C, B, nell'ordine, si scrivono:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0, & M_1(0) &= 0, \\ v_1(\ell_1) &= v_2(0), & v_1'(\ell_1) &= v_2'(0), \\ M_1(\ell_1) &= M_2(0), & V_1(\ell_1) &= V_2(0), \\ v_2(\ell_2) &= 0, & M_2(\ell_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i(x_i) &= EI\, v_i''(x_i), \\ T_i(x_i) &= -EI\, v_i'''(x_i), \qquad\qquad i = 1, 2 \\ V_i(x_i) &= T_i(x_i) + N_{0i}\, v_i'(x_i), \end{aligned}$$

La soluzione generale del problema omogeneo, posto $\beta^2 := \frac{P}{EI}$, si scrive:

$$v_1\left(x_1\right) = c_1\ \cos\left(\beta x_1\right) + c_2\ \sin\left(\beta x_1\right) + c_3\, x_1 + c_4,$$
$$v_2\left(x_2\right) = c_5 + c_6\, x_2 + c_7\, x_2^2 + c_8\, x_2^3$$

è cioè armonica-polinomiale nel tratto compresso, e semplicemente polinomiale nel tratto non presollecitato. Imponendo le condizioni al contorno, si perviene al seguente sistema algebrico nelle otto costanti incognite c_i:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & S & \ell_1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta\, S & \beta\, C & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 C & -\beta^2 S & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ell_2 & \ell_2^2 & \ell_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\ell_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $C := \cos\left(\beta\ell_1\right)$ ed $S := \sin\left(\beta\ell_1\right)$.

Il sistema ammette soluzione non banale

se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a zero

$$\left[(\beta\ell_2)^2\,\ell_2 - 3\,(\ell_1 + 2\ell_2)\right]\sin(\beta\ell_1) = 3\beta\ell_2^2\cos(\beta\ell_1)$$

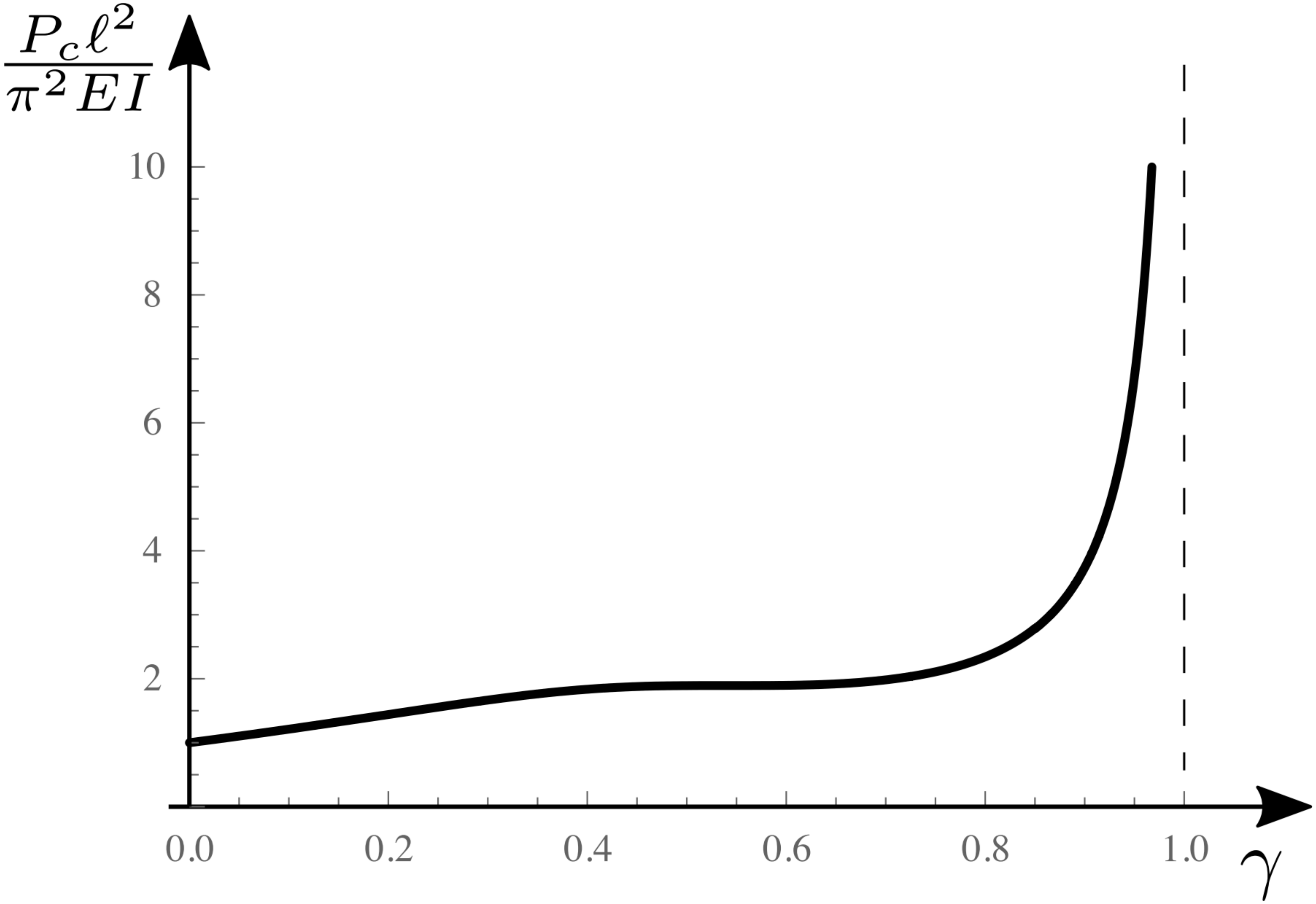
Posto:

$$\ell = \ell_1 + \ell_2, \quad \gamma = \ell_2/\ell,$$

la precedente si scrive:

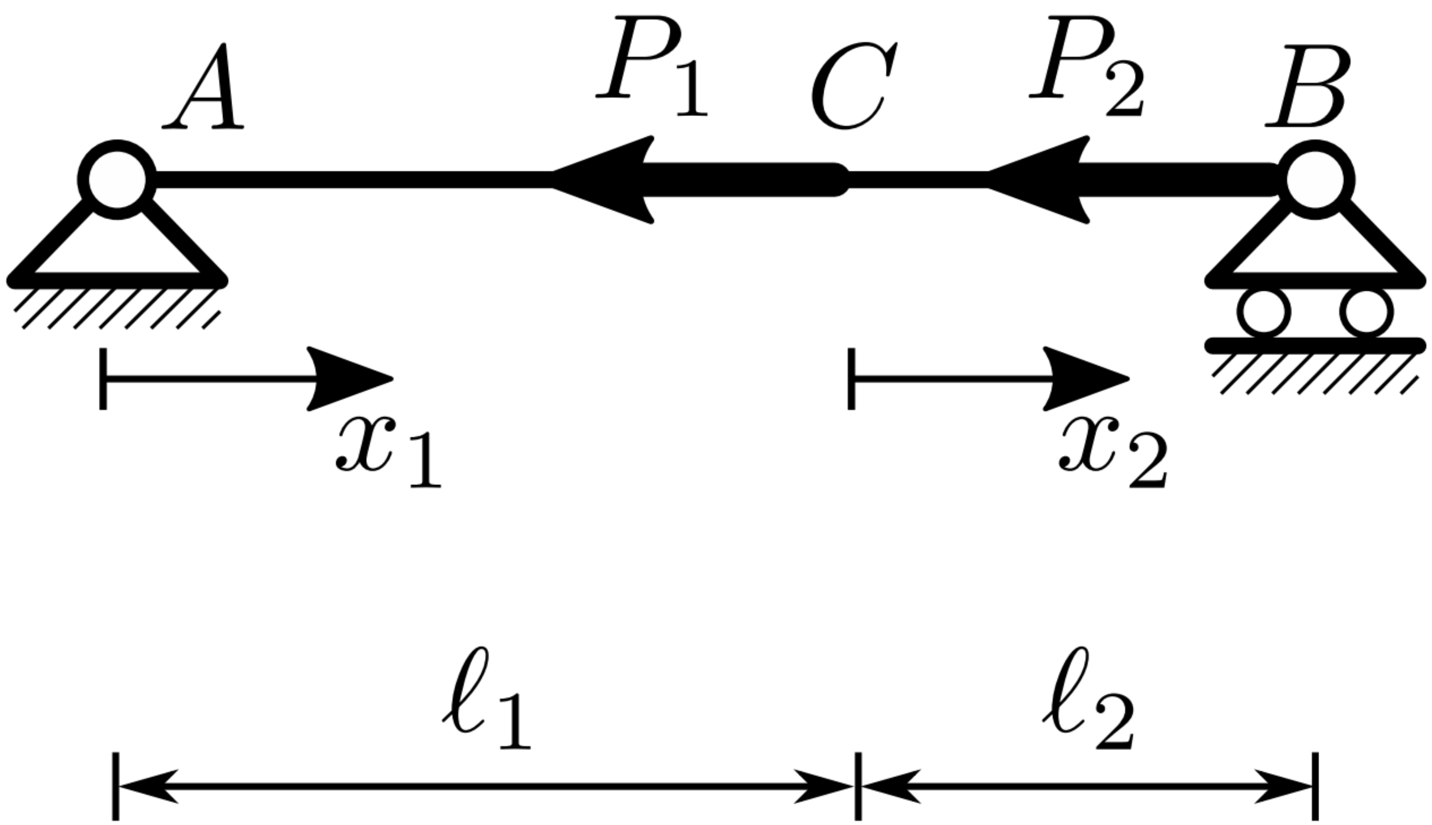
$$\left[(\beta\ell)^2\,\gamma^3 - 3\,(1+\gamma)\right]\sin((1-\gamma)\,\beta\ell) = 3\,(\beta\ell)\,\gamma^2\cos((1-\gamma)\,\beta\ell)$$

che costituisce l'equazione caratteristica del problema.



$\frac{P_c \ell^2}{\pi^2 EI}$
10
8
6
4
2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
γ

Trave soggetta a forze di compressione indipendenti: il dominio di interazione



$$N_0(x) = \begin{cases} -\left(P_1 + P_2\right), & \text{in} \quad x_1 \in (0, \ell_1) \\ -P_2, & \text{in} \quad x_2 \in (0, \ell_2) \end{cases}$$

le equazioni di equilibrio

$$
\begin{aligned}
&EI\, v_1'''' + (P_1 + P_2)\, v_1'' = 0, \quad && x_1 \in (0, \ell_1) \\
&EI\, v_2'''' + P_2\, v_2'' = 0, && x_2 \in (0, \ell_2)
\end{aligned}
$$

Le condizioni al contorno sono:

$$
\begin{aligned}
v_1(0) &= 0, & M_1(0) &= 0, \\
v_1(\ell_1) &= v_2(0), & v_1'(\ell_1) &= v_2'(0), \\
M_1(\ell_1) &= M_2(0), & V_1(\ell_1) &= V_2(0), \\
v_2(\ell_2) &= 0, & M_2(\ell_2) &= 0
\end{aligned}
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
M_i(x_i) &= EI\, v_i''(x_i), \\
T_i(x_i) &= -EI\, v_i'''(x_i), \qquad\qquad i = 1, 2 \\
V_i(x_i) &= T_i(x_i) + N_{0i}\, v_i'(x_i),
\end{aligned}
$$

Posto:

$$\beta_1^2 := \frac{P_1}{EI}, \qquad \beta_2^2 := \frac{P_2}{EI}$$

la soluzione generale del problema omogeneo si scrive:

$$v_1\left(x_1\right) = c_1\,\cos\left(\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\,x_1\right) + c_2\,\sin\left(\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}\,x_1\right) + c_3\,x_1 + c_4,$$

$$v_2\left(x_2\right) = c_5\,\cos\left(\beta_2 x_2\right) + c_6\,\sin\left(\beta_2 x_2\right) + c_7\,x_2 + c_8$$

$$\ell = \ell_1 + \ell_2,$$

$$\alpha_i := \beta_i\,\ell, \qquad i = 1, 2$$

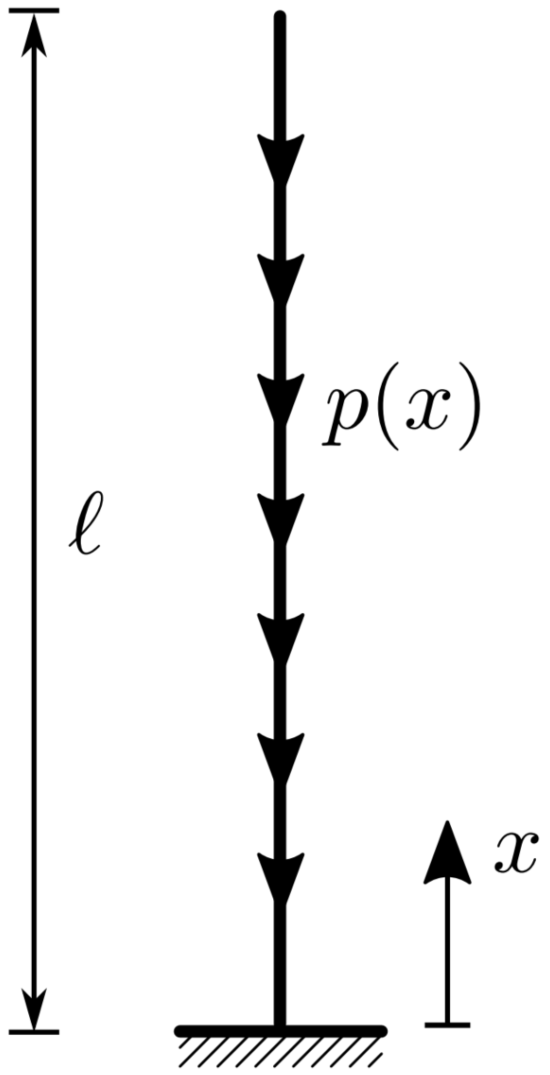
$$\gamma := \frac{\ell_2}{\ell}$$

La equazione caratteristica

si scrive:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_2^2\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\left(\alpha_1^2\gamma+\alpha_2^2\right)\sin\left(\alpha_2\gamma\right)\cos\left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}(1-\gamma)\right)\\
&+\sin\left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}(1-\gamma)\right)\alpha_2\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\left(\alpha_1^2\gamma+\alpha_2^2\right)\cos\left(\alpha_2\gamma\right)\\
&-\sin\left(\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}(1-\gamma)\right)\alpha_1^4\sin\left(\alpha_2\gamma\right)=0
\end{aligned}
$$

Travi soggette a forze assiali distribuite



uno sforzo normale

$$N_0\left(x\right) = -\int_x^\ell p\left(x\right)\mathrm{d}x$$

L'energia potenziale totale, si scrive dunque:

$$\mathit{\Pi} = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} EI \, v''^2 + \frac{1}{2} N_0 \left(x \right) v'^2 \right) \, \mathrm{d}x$$

Imponendo la stazionarietà dell'EPT si ricava l'equazione di equilibrio:

$$EI \, v'''' - \left(N_0 \left(x \right) v' \right)' = 0 \qquad x \in \left(0, \ell \right)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} v\left(0\right) &= 0, & v'\left(0\right) &= 0, \\ EI \, v''\left(\ell\right) &= 0, & -EI \, v'''\left(\ell\right) &= 0 \end{aligned}$$

in cui si è tenuto conto che $N\left(\ell\right) = 0$.

Nel caso particolare in cui $p(x) = p = \text{cost}$, è $N_0(x) = p(x - \ell)$, cosicché l'equazione di equilibrio si scrive:

$$EI\, v'''' + p\,\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) v'' - p\, v' = 0$$

Soluzione in serie di potenze

Si cerca una soluzione nella forma di serie di potenze, del tipo:

$$v(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k$$

con m intero positivo ed a_k costanti, tutti incogniti. Sostituendo la precedente espressione nell'equazione di campo, raccogliendo i termini con la stessa potenza di x, ed annullandoli separatamente, si ottiene il seguente set di equazioni:

$$\begin{aligned}
x^{-4}: &\quad m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m = 0, \\
x^{-3}: &\quad a_1 = 0, \\
x^{-2}: &\quad a_0\beta^2 + a_2\left(m^2 + 3m + 2\right) = 0, \\
\ldots &
\end{aligned}$$

in cui si è posto $\beta := p\ell/EI$. La prima di queste equazioni ammette quattro radici distinte:

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 2, \quad m_4 = 3$$

Le successive, risolte in sequenza, forniscono le costanti a_k (in funzione di m):

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0, \\
a_2 &= -\frac{a_0}{m^2 + 3m + 2}\beta^2, \\
a_k &= \frac{\frac{m+k-3}{\ell} a_{k-3} - (m+k-2)\, a_{k-2}}{(m+k)\,(m+k-1)\,(m+k-2)}\beta^2, \qquad k \geq 3
\end{aligned}$$

in cui a_0, essendo arbitraria, si può porre uguale ad 1.

si costruiscono quattro soluzioni indipendenti, la cui combinazione lineare è:

$$v(x) = c_1\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 x^2 + \cdots\right) + c_2 x\left(1 - \frac{1}{6}\beta^2 x^2 + \cdots\right)$$
$$+ c_3 x^2\left(1 - \frac{1}{12}\beta^2 x^2 + \cdots\right) + c_4 x^3\left(1 - \frac{1}{20}\beta^2 x^2 + \cdots\right)$$

Imponendo le condizioni geometriche al contorno, si ricava $c_1 = c_2 = 0$; imponendo le condizioni meccaniche, si ottiene un sistema algebrico omogeneo di due equazioni nelle due incognite c_3, c_4. Tale sistema ammette soluzione diversa da quella banale quando il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a zero. Imponendo questa condizione, si ottiene una equazione caratteristica nell'incognita β, che risolta numericamente fornisce $\beta\ell^2 \simeq 7.83$; quindi, il carico critico è:

$$(p\,\ell)_c = \frac{7.83\,EI}{\ell^2}$$

Travi vincolate elasticamente

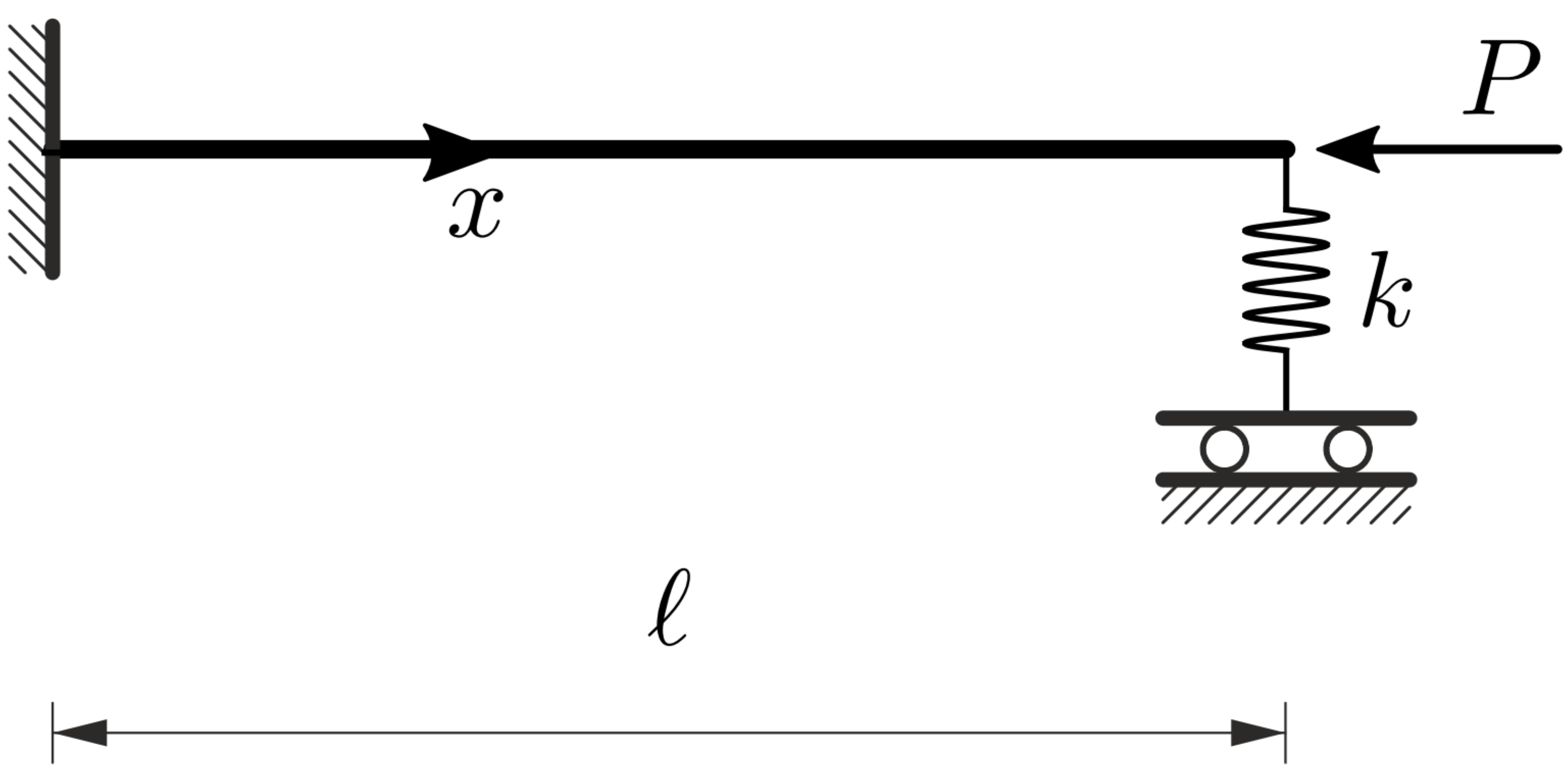
Le condizioni al contorno, peraltro, possono facilmente desumersi dall'equilibrio, senza dover ricorrere alla formulazione variazionale. In particolare:

- se $H = A, B$ è un punto di estremo, la condizione al contorno esprime l'*uguaglianza* della forza trasversale interna *affiorante*, V_H, alla forza (esterna per la trave) $-kv_H$; è cioè $-V_A = -kv_A$, oppure $V_B = -kv_B$;

- se $H = C$ è un punto interno alla trave, la condizione esprime l'*equilibrio* tra le forze trasversali interne $V_C^{\pm}$, agenti a destra e sinistra del punto, e la forza elastica esterna esercitata dalla molla, è cioè $V_C^{+} - V_C^{-} - kv_C = 0$. Gli esempi che seguono illustrano la procedura.

Trave con appoggio elastico di estremità

Si consideri una mensola compressa da una forza P applicata all'estremo libero, controventata da un appoggio elastico di rigidezza k applicato nel medesimo punto



$$EI\, v'''' + P\, v'' = 0, \qquad x \in (0, \ell)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} &v\,(0) = 0, && v'\,(0) = 0, \\ &EIv''\,(\ell) = 0, && -EIv'''\,(\ell) - Pv'\,(\ell) + k\,v\,(\ell) = 0 \end{aligned}$$

La soluzione generale del problema omogeneo è:

$$v\,(x) = c_1\, \cos(\beta x) + c_2\, \sin(\beta x) + c_3\, x + c_4$$

dove $\beta := \sqrt{\frac{P}{EI}}$ è il numero d'onda, e c_i, $i = 1, \ldots, 4$, sono costanti arbitrarie. Imponendo le condizioni al contorno, si ottiene il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ -\beta^2\cos(\beta\ell) & -\beta^2\sin(\beta\ell) & \ell & 1 \\ \frac{k}{EI}\cos(\beta\ell) & \frac{k}{EI}\sin(\beta\ell) & \frac{k\ell}{EI}-\beta^2 & \frac{k}{EI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

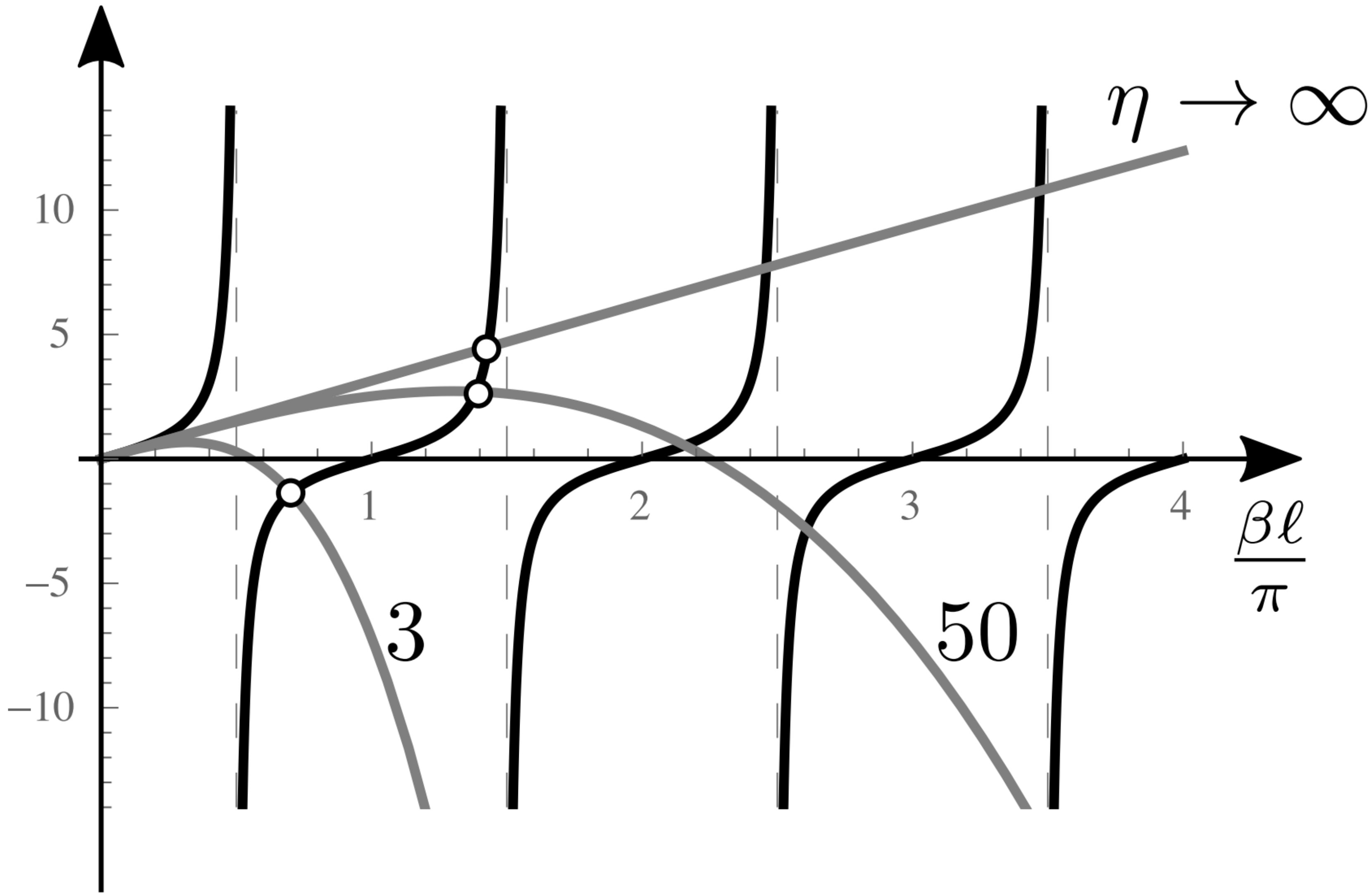
Sviluppando il determinante della matrice dei coefficienti e ponendolo uguale a zero, si ottiene un'equazione (caratteristica) trascendente in β:

$$\tan(\beta\ell) = \beta\ell\left[1 - \frac{(\beta\ell)^2}{\eta}\right]$$

In questa si è introdotto il parametro adimensionale:

$$\eta := \frac{k\ell^3}{EI}$$

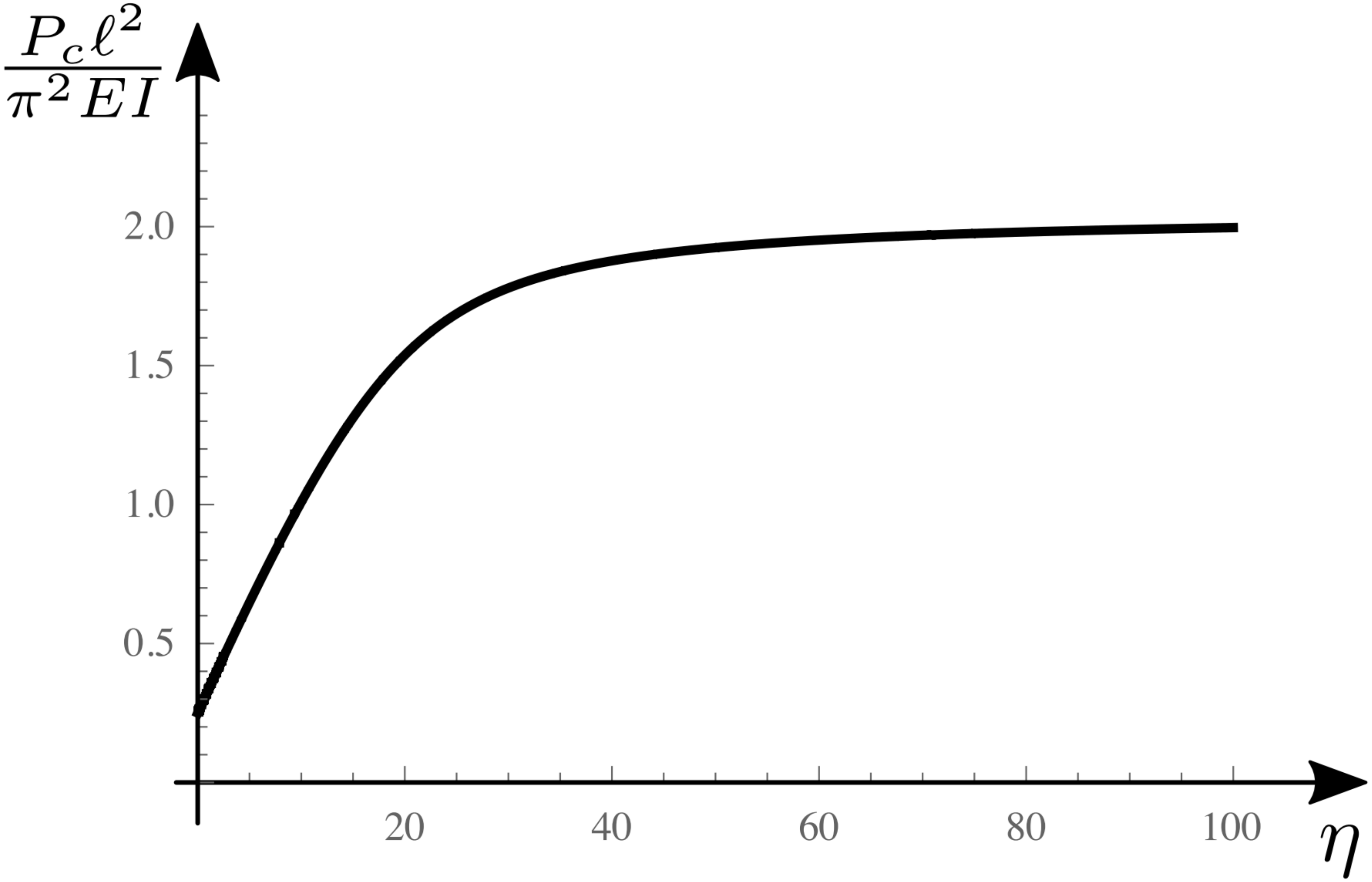
avente il significato di rapporto tra la rigidezza della molla e quella della trave. Risolta l'equazione trascendente nell'incognita $\beta\ell$, e presa, tra le infinite, la radice più piccola $\beta_c\ell$, si determina il carico critico della trave come $P_c = (\beta_c\ell)^2\,\frac{EI}{\ell^2}$.



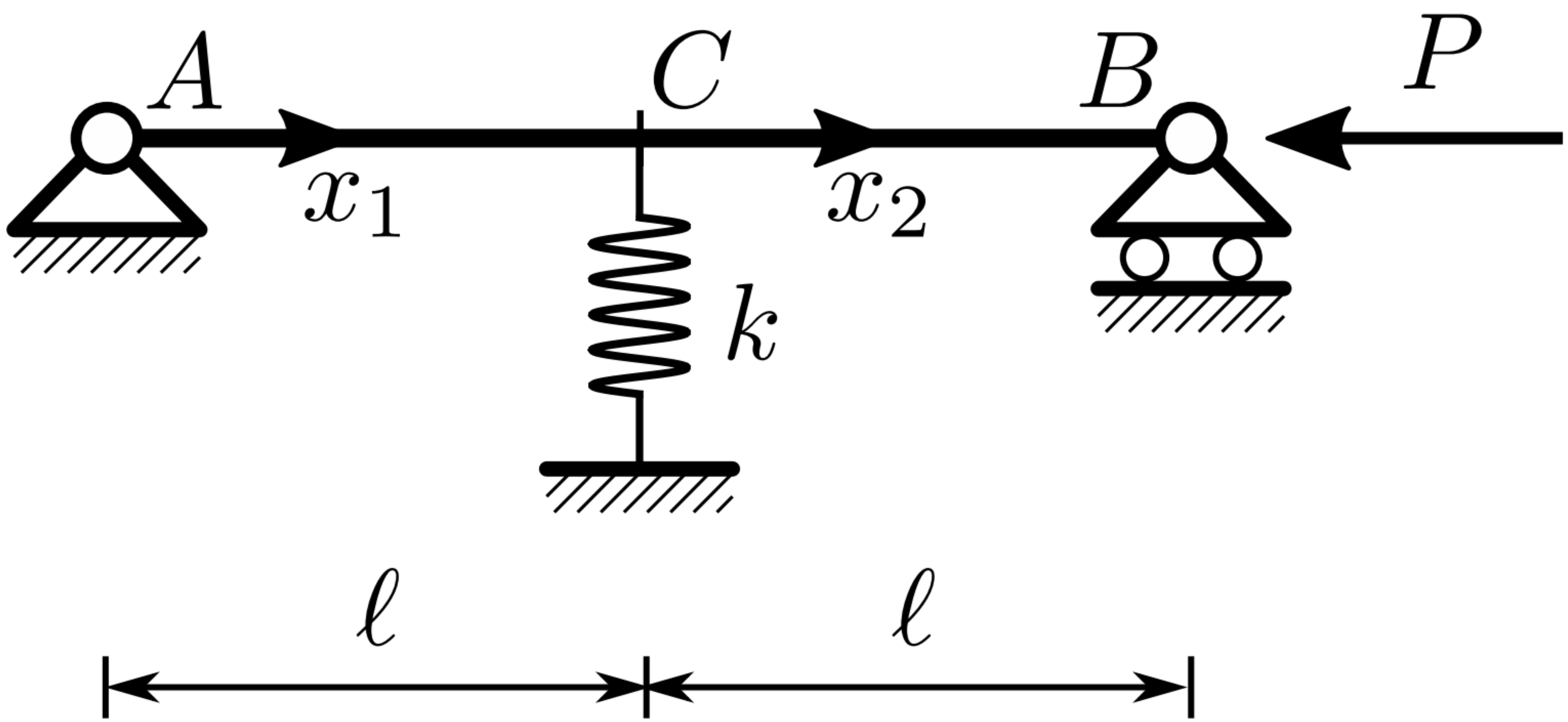
- Se $\eta \to 0$ (cioè se la molla è molto soffice), allora $\tan(\beta\ell) \to -\infty$, per la quale la più piccola radice è $\beta_c = \frac{\pi}{2\ell}$; si riottiene così il caso della mensola.

- Se $\eta \to \infty$ (cioè se la molla è molto rigida), allora $\tan(\beta\ell) = \beta\ell$, e si riottiene il caso della trave incastro-appoggio, per la quale la più piccola radice è $\beta_c = 1.43\frac{\pi}{\ell}$.

La Figura illustra la dipendenza del carico critico dal parametro di rigidezza.



Trave con appoggio elastico in campata



Le equazioni di equilibrio, relative ai due sotto intervalli, si scrivono:

$$
\begin{aligned}
EI\, v_1'''' + P\, v_1'' &= 0, \quad x_1 \in (0, \ell) \\
EI\, v_2'''' + P\, v_2'' &= 0, \quad x_2 \in (0, \ell)
\end{aligned}
$$

in cui $v_i\,(x_i) \;\; i = 1, 2$ è lo spostamento, rispettivamente a sinistra ed a destra della singolarità. Le condizioni al contorno nei punti di estremità della trave, A, B, sono le usuali di appoggio; quelle nel punto di mezzeria C esprimono: (a) la continuità di spostamento e rotazione e, (b) l'equilibrio alla traslazione e alla rotazione dell'elemento infinitesimo di trave vincolato elasticamente. Si ha:

$$
\begin{aligned}
v_1\,(0) &= 0, & M_1\,(0) &= 0, \\
v_2\,(\ell) &= 0, & M_2\,(\ell) &= 0, \\
v_1\,(\ell) &= v_2\,(0)\,, & v_1'\,(\ell) &= v_2'\,(0)\,, \\
M_1\,(\ell) &= M_2\,(0)\,, & V_1\,(\ell) + k\,v_1\,(\ell) &= V_2\,(0)\,,
\end{aligned}
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
M_i\left(x_i\right) &= EI\, v_i''\left(x_i\right), \\
T_i\left(x_i\right) &= -EI\, v_i'''\left(x_i\right), \qquad\qquad i = 1, 2 \\
V_i\left(x_i\right) &= T_i\left(x_i\right) - P\, v_i'\left(x_i\right)
\end{aligned}
$$

L'integrale generale delle si scrive:

$$
\begin{aligned}
v_1\left(x_1\right) &= c_1 \cos\left(\beta x_1\right) + c_2 \sin\left(\beta x_1\right) + c_3\, x_1 + c_4, \\
v_2\left(x_2\right) &= c_5 \cos\left(\beta x_2\right) + c_6 \sin\left(\beta x_2\right) + c_7\, x_2 + c_8
\end{aligned}
$$

dove c_j, $j = 1, \ldots, 8$, sono costanti arbitrarie e dove $\beta := \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Imponendo le condizioni al contorno, si ottiene il seguente sistema algebrico lineare di dimensione 8×8:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\beta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C & S & \ell & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\beta^2 C & -\beta^2 S & 0 & 0 \\
C & S & \ell & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
-\beta\, S & \beta\, C & 1 & 0 & 0 & -\beta & -1 & 0 \\
-\beta^2 C & -\beta^2 S & 0 & 0 & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{k}{EI} C & \frac{k}{EI} S & \frac{k\ell}{EI} - \beta^2 & \frac{k}{EI} & 0 & 0 & \beta^2 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

dove $C := \cos(\beta\ell)$ ed $S := \sin(\beta\ell)$. Sviluppando il determinante della matrice dei coefficienti, e ponendolo uguale a zero, si ottiene un'equazione trascendente in β:

$$
\sin(\beta\ell)\left\{\sin(\beta\ell) - (\beta\ell)\left[1 - \frac{(\beta\ell)^2}{\eta}\right]\cos(\beta\ell)\right\} = 0
$$

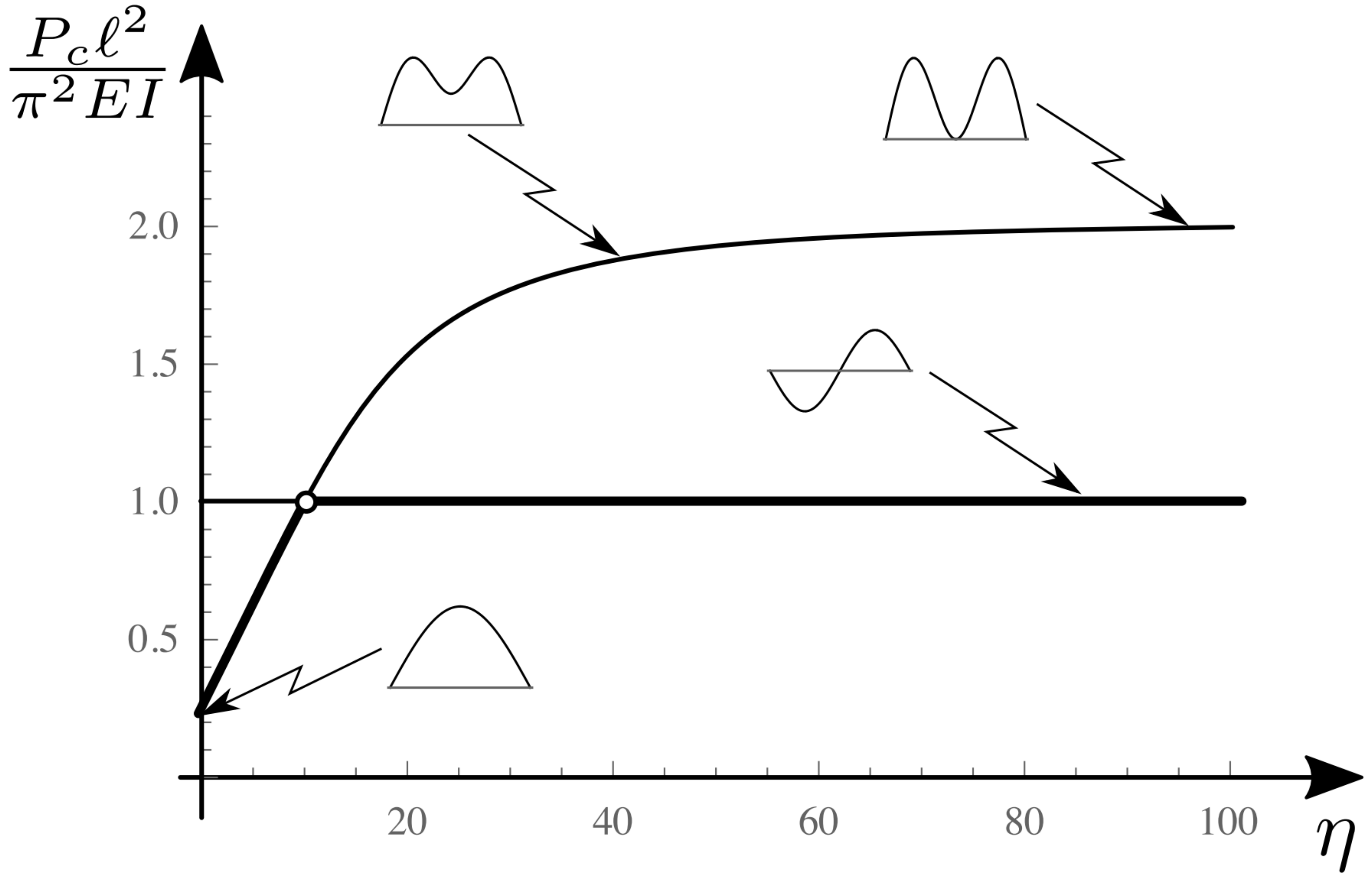
in cui si è definito il parametro adimensionale di rigidezza:

$$
\eta := \frac{k\ell^3}{2EI}
$$

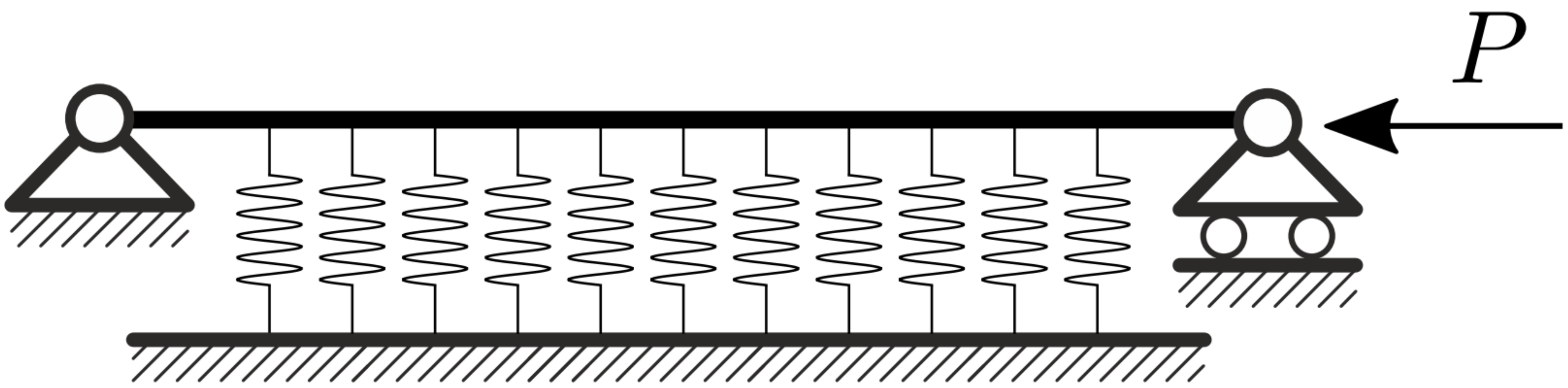
di differenti radici:

$$\sin(\beta\ell) = 0,$$

$$\tan(\beta\ell) = (\beta\ell)\left[1 - \frac{(\beta\ell)^2}{\eta}\right]$$



Trave su suolo elastico alla Winkler



$$\Pi = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2}EA\,u'^2 - \frac{1}{2}P\,v'^2 + \frac{1}{2}EI\,v''^2 + \frac{1}{2}k_f\,v^2\right]\mathrm{d}x - \int_0^\ell p\,v\,\mathrm{d}x$$

Imponendo la stazionarietà del funzionale, si ottengono le seguenti equazioni di equilibrio in termini di spostamento:

$$\begin{aligned} &EA\,u'' = 0, && x \in (0,\ell) \\ &EI\,v'''' + P\,v'' + k_f\,v = p, && x \in (0,\ell) \end{aligned}$$

con le condizioni al contorno:

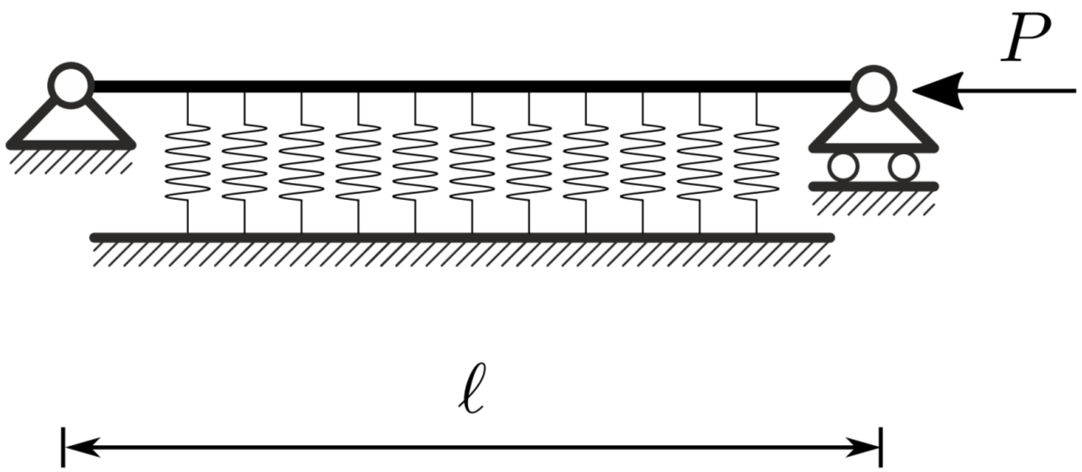
$$\left[EA\,u'\,\delta u\right]_0^\ell = 0$$

$$\left[\left(-EI\,v''' - P\,v'\right)\,\delta v\right]_0^\ell = 0$$

$$\left[EI\,v''\,\delta v'\right]_0^\ell = 0$$

Trave su suolo elastico semplicemente appoggiata

$$EI\, v'''' + P\, v'' + k_f\, v = 0$$



$$v\,(0) = 0, \qquad v\,(\ell) = 0,$$
$$EI\, v''\,(0) = 0, \quad EI\, v''\,(\ell) = 0$$

Si ricerca la soluzione nella forma 'di tentativo':

$$v(x) = \hat{v} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

$$EI\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 - P\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 + k_f = 0$$

$$P_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI + \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2 k_f$$

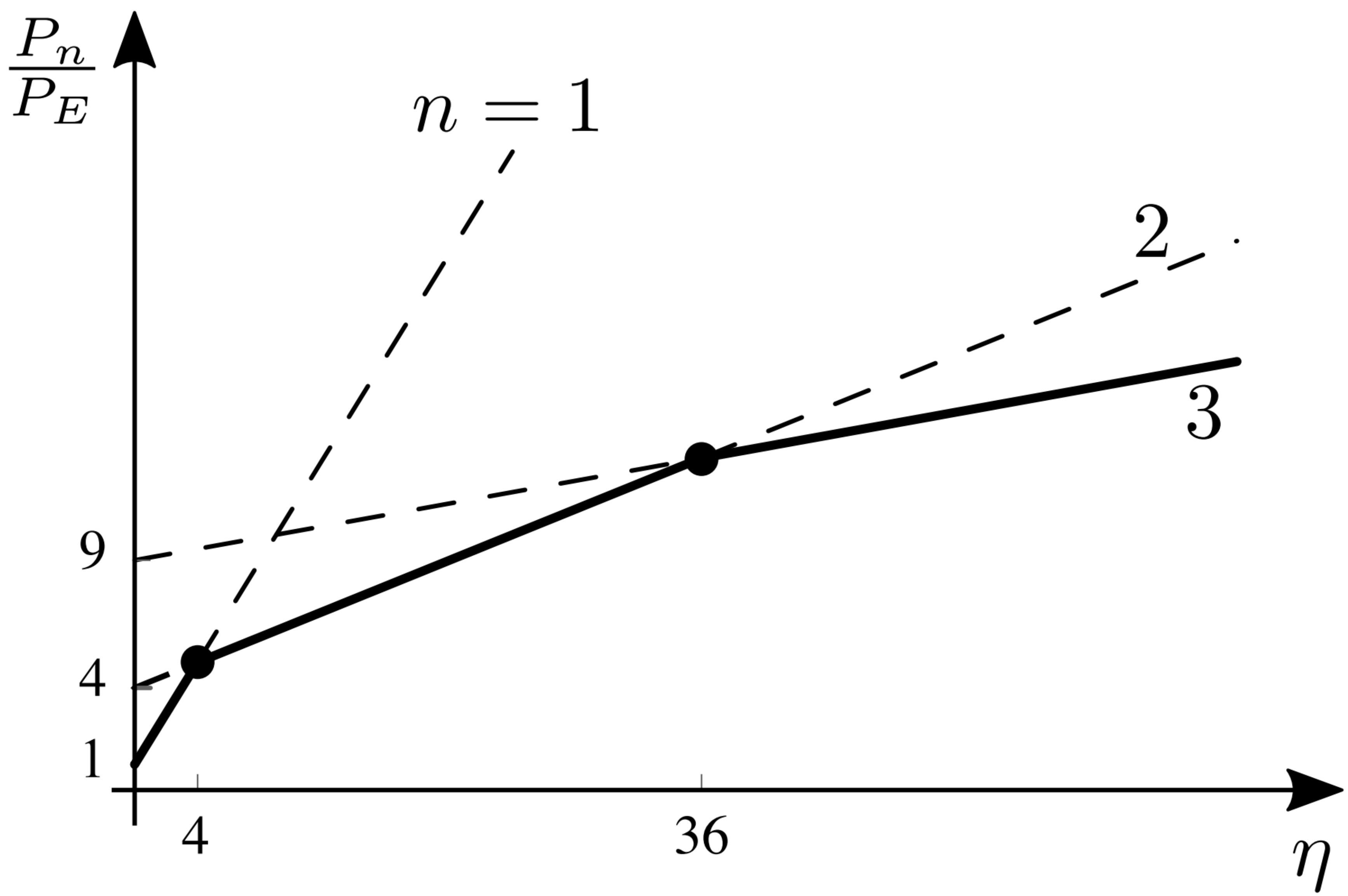
Tra tutti i P_n ha interesse determinare il più piccolo, $P_c := \min\{P_n\}$.

$$\frac{P_n}{P_E} = n^2 + \frac{\eta}{n^2} \qquad P_E := \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = P_1.$$

dove:

$$\eta := \frac{k_f}{EI}\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^4$$

è un parametro elasto-geometrico adimensionale che misura il *rapporto tra la rigidezza del suolo e quella della trave*. Valori di η piccoli denotano un *suolo soffice*, valori grandi un *suolo rigido*. È possibile allora tracciare il grafico di $\frac{P_n}{P_E}$ in funzione di η, per assegnati valori di $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si ottiene così il grafico



- per $0 \leq \eta \leq 4$, il modo critico consta di $n = 1$ semi-onde, a cui è associato il carico critico $\frac{P_1}{P_E} = 1 + \eta$;
- per $4 \leq \eta \leq 36$, il modo critico consta di $n = 2$ semi-onde, a cui è associato il carico critico $\frac{P_2}{P_E} = 4 + \frac{\eta}{4}$, ecc....

I valori η_n in corrispondenza dei quali si verificano autovalori doppi (cioè *modi critici simultanei*, ad n ed $n + 1$ semi-onde), sono:

$$\eta_n = \left[n\left(n + 1\right)\right]^2$$