



## GEOMETRIA EUCLIDEA

- (1) a) Verificare che la retta  $r$  di equazione  $4x + 3y - 5 = 0$  appartiene al fascio  $\mathcal{F}$  (proprio o improprio?) di equazione:

$$(h - 3k)x + (2h - k)y - 2h + 3k = 0.$$

- b) Determinare l'insieme dei punti del piano euclideo  $\mathcal{E}^2$  aventi distanza 3 dalla retta  $r$ .
- (2) Determinare la retta comune ai due fasci di equazioni

$$\mathcal{F}_1 : x + ky - 1 - 2k = 0, \quad \mathcal{F}_2 : 3x - y + h = 0.$$

- (3) Scrivere le equazioni delle rette passanti per  $P = (1, -5)$  e che formano un angolo di  $\pi/4$  con la retta  $r : 3x - y - 8 = 0$ .
- (4) Dati due punti  $A_1, A_2$  di  $\mathcal{E}^2$  (o di  $\mathcal{E}^3$ ), dimostrare che un punto  $P$  appartiene al segmento di estremi  $A_1$  e  $A_2$  se e solo se

$$P = tA_1 + (1 - t)A_2, \quad t \in [0, 1].$$

- (5) Determinare i valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  per i quali risultino complanari i punti:

$$P_1 = (2k, -2, 1 - k), \quad P_2 = (-1, k + 1, -1), \quad P_3 = (k, k - 1, 3k), \quad P_4 = (1, k, 0).$$

- (6) Scrivere le equazioni della retta passante per il punto  $P = (2, 1, 2)$  e ortogonale alle rette

$$r_1 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

- (7) Provare che le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - y - 4z = 6, \end{cases}$$

sono complanari e determinare il piano che le contiene.

- (8) a) Determinare la posizione reciproca e la distanza delle rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x - y + 3z = 2. \end{cases}$$

- b) Determinare l'unica coppia di piani paralleli  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , tali che  $\pi_i$  contenga  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ .



c) Dopo aver orientato la retta  $r_1$  nel verso delle  $t$  decrescenti e la retta  $r_2$  nel verso delle  $x$  crescenti, stabilire se è acuto oppure ottuso l'angolo da esse formato.

(9) Sia  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ , la proiezione ortogonale del punto  $P = (1, 2, -1)$  sul piano  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2$ , dove

$$\pi_1 : 3x - y - 2z + 11 = 0, \quad \pi_2 : 2x - 3y + z - 9 = 0.$$

Calcolare le coordinate del punto medio  $M$  dei punti  $P_1$  e  $P_2$ .

(10) Determinare gli eventuali valori di  $h$  e  $k$  in corrispondenza dei quali la retta

$$r : \begin{cases} x + ky + z = h, \\ x - y - z - 2 = 0, \end{cases}$$

è contenuta nel piano  $\pi$  di equazione  $2x + y = 3$ .

(11) Assegnati tre punti non allineati  $P_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathcal{E}^3$ ,  $i = 1, 2, 3$ , provare che l'equazione del piano affine che li contiene può essere scritta nella forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(12) Calcolare la distanza di  $P_0 = (0, 0, 2)$  dalla retta  $r : \begin{cases} x - y = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$

(13) Calcolare la distanza delle rette

$$r_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = \frac{2}{3} - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 2u, \\ y = 4u, \\ z = -2u, \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(14) Scrivere l'equazione del fascio di piani passanti per  $A = (1, 1, 0)$  e  $B = (0, 2, 1)$ .

(15) Usando il concetto di fascio di piani, determinare l'equazione del piano  $\pi'$  passante per  $P_0 = (1, 1, -1)$ , ortogonale al piano al piano  $\pi : 2x - 3y + z - 1 = 0$  e parallelo alla retta  $r : P(t) = (1 + 3t, 1 - t, 1 + t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

(16) Nel fascio di piani di asse la retta  $r : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3 + t \\ z = 2t, \end{cases}$  determinare il piano  $\pi$  che risulta ortogonale

al piano  $\pi' : 3x - y + 8z - 1 = 0$ . Determinare, inoltre, le equazioni cartesiane della retta  $r'$ , proiezione ortogonale della retta  $r$  sul piano  $\pi'$ .

(17) Determinare i piani contenenti la retta  $r : \begin{cases} 2x - 3z + 2 = 0 \\ y = 0, \end{cases}$  e che formano un angolo di  $\pi/6$  col piano  $\pi : x - z = 0$ .



- (18) In  $\mathcal{E}^4$ , si considerino i punti  $A_1 = (1, 0, 1, -1)$ ,  $A_2 = (0, 2, 2, 1)$  e l'iperpiano di equazione  $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 1 = 0$ .
- Determinare la distanza di  $A_2$  dall'iperpiano dato.
  - Determinare l'equazione dell'iperpiano passante per  $A_1$  e parallelo all'iperpiano dato.
- (19) Provare che una retta affine in  $\mathcal{E}^n$  di equazioni parametriche  $x_i = q_i + k_i t$ ,  $i = 1, \dots, n$ , è perpendicolare all'iperpiano di equazione  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$  se e solo se i vettori (non nulli)  $(k_1, \dots, k_n)$  e  $(a_1, \dots, a_n)$  sono proporzionali.
- (20) Data una simmetria centrale  $s_C : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$  di centro  $C \in \mathcal{E}^n$  dimostrare che:
- $s_C$  è una trasformazione involutoria, ovvero componendola con se stessa si ottiene la trasformazione identica;
  - $s_C$  è una isometria con isomorfismo associato  $-\text{Id}_V$ , dove  $V$  è la giacitura di  $\mathcal{E}^n$ ;
  - Se  $S$  è un sottospazio affine di  $\mathcal{E}$ , allora<sup>1</sup> il suo simmetrico  $S' := s_C(S)$  è parallelo a  $S$ .  
Inoltre,  $S = S'$  se e solo se  $C \in S$ .
- (21) In  $\mathcal{E}^3$  determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano  $\pi'$  simmetrico del piano  $\pi : x - 2z + 7 = 0$  rispetto alla simmetria centrale di centro  $C = (1, 0, 2)$ .
- (22) In  $\mathcal{E}^4$  si consideri l'iperpiano  $S_1 : x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 8$  e il piano

$$\pi : \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Provare che  $\pi$  è propriamente parallelo a  $S_1$ . Determinare, inoltre, il piano  $\pi' := s_C(\pi)$ , dove  $s_C$  è la simmetria centrale di centro  $C = (0, 1, 0, 0)$ .

<sup>1</sup>Suggerimento: Provare che se  $S = Q + W$ , allora  $S' = s_C(Q) + W$ .