ENDOMORFISMI SIMMETRICI

(1) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e $f : V \to V$ un automorfismo simmetrico di V. Provare che f^{-1} è simmetrico.

(2) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e $p : V \to V$ la proiezione ortogonale di V su un suo sottospazio W. Verificare che $W = \mathrm{Im}(p)$, $W^\perp = \mathrm{Ker}(p)$ e che p è simmetrica.

(3) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, 3y)$.
   a) Diagonalizzare f.
   b) f ammette una base spettrale ortonormale?
   c) f è simmetrico?

(4) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice ortogonalmente diagonalizzabile. Provare che A è simmetrica.

(5) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(e_1) = 3e_1 + e_3, \qquad f(e_2) = e_2, \qquad f(e_3) = e_1 + 3e_3,$$

dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   a) Determinare la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica.
   b) Trovare, se esiste, una matrice $P \in O(3)$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

(6) Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2k & k \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile? Per tali valori, se possibile, determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

(7) Studiare il segno della forma quadratica $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz + 2yz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(8) Diagonalizzare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

mediante una matrice di passaggio ortogonale.

(9) Scrivere una forma diagonale per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e determinare tutte le basi ortonormali di autovettori che permettono di ottenerla.

(10) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$ individuato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Scrivere la forma quadratica associata ad f.

b) Trovare una base ortonormale di autovettori di f e la matrice diagonale che rappresenta f in tale base.

(11) Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale que

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ data da $\mathcal{B}' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}$.

a) f è un endomorfismo simmetrico?

b) f è diagonalizzabile?

(12) Determinane una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizzi le seguenti forme quadratiche:

a) $Q(x, y, z) = 2yx - 2yz$,

b) $Q(x, y, z) = -x^2 - 4xy + 2y^2 + 5z^2$,

c) $Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz$.

(13) Diagonalizzare la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mediante una matrice di passaggio ortogonale.