Docente: Benedetto Manca
Tutor: Massimiliano Mutzu Martis

Anno accademico 2021/2022
Secondo semestre

Matematica Discreta

Foglio 1

Esercizio 1. Siano $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3\}$ e $C = \{1,2,4\}$ sottoinsiemi dei numeri naturali. Si determinino tutti gli elementi dei seguenti insiemi:

i) $B \cup C$,

ii) $A \setminus (B \cup C)$,

iii) $B \cap C$ e

iv) $A \setminus (B \cap C)$.

Esercizio 2. Siano A e B sottoinsiemi di un insieme U. Si dimostrino le seguenti inclusioni.

i) $A \cap B \subseteq U$

ii) $A \cup B \subseteq U$

Esercizio 3. Siano P, Q e R proposizioni. Si dimostrino le seguenti uguaglianze.

i) $P \wedge Q = Q \wedge P$

ii) $P \vee Q = Q \vee P$

iii) $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$

iv) $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$

v) $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

vi) $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$

(continua sul retro)

Esercizio 4. Siano A, B e C sottoinsiemi di un insieme U. Si considerino le seguenti proposizioni, per ogni elemento $x \in U$:

$$P(x):\ x \in A, \qquad Q(x):\ x \in B, \qquad R(x):\ x \notin C\,.$$

Attraverso l'uso delle operazioni $\cap$, $\cup$ e $\setminus$, si descrivano i seguenti insiemi.

i) $\{x \in U \mid P(x) \wedge Q(x)\}$

ii) $\{x \in U \mid P(x) \vee Q(x)\}$

iii) $\{x \in U \mid P(x) \vee R(x)\}$

iv) $\{x \in U \mid \neg P(x) \wedge (R(x) \wedge P(x))\}$

v) $\{x \in U \mid \neg\,(R(x) \vee P(x))\}$

Esercizio 5. Si dimostri che le seguenti proposizioni sono tautologie.

i) $(\neg P \Rightarrow P) \Rightarrow P$ (nota come *consequentia mirabilis*)

ii) $(P \wedge Q) \Rightarrow P$

iii) $P \Rightarrow (P \vee Q)$

iv) $(P \Rightarrow 0) \Rightarrow \neg P$

Esercizio 6. Si dimostri che le seguenti proposizioni non sono tautologie.

i) $(P \vee Q) \Rightarrow P$

ii) $P \Rightarrow (P \wedge Q)$

Esercizio 7. Si dimostri che per qualsiasi insieme A si ha

i) $A \cap \varnothing = \varnothing$

ii) $A \cup \varnothing = A$

iii) $\varnothing \subseteq A$

Esercizio 8. Sia $I = \mathbb{N}$ e sia $U = \mathbb{R}$. Per ogni $i \in I$, si consideri il sottoinsieme A_i di U definito da $A_i = [-i, i]$. Si determinino gli insiemi

i) $\bigcap_{i \in I} A_i$ e

ii) $\bigcup_{i \in I} A_i$.