



Università degli Studi di Cagliari

UNICA
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura

Magistrale Ingegneria Civile 2 anno a.a. 2021/22

Instabilità delle strutture e calcolo a rottura

> **Lezione 1**

Il concetto di stabilità:
sistemi stabili, instabili e indifferenti

Victor Eremeev

Dr. **Emanuele Reccia** / supporto al Corso
emanuele.reccia@unica.it

victor.eremeev@unica.it



La stabilità

La stabilità è nozione primitiva, di largo uso nel linguaggio dell'uomo comune. Sta ad indicare che lo stato stazionario di un sistema, di equilibrio o periodico, è 'robusto' alle perturbazioni, nel senso che, se disturbato, persiste nel tempo, eventualmente con piccole deviazioni.

La nozione che l'uomo comune ha della stabilità, tuttavia, non include il concetto di 'piccolezza' del disturbo, che va invece opportunamente definito in ambito scientifico. Una posizione di equilibrio (o un moto periodico) è stabile se è possibile confinare quanto si vuole le deviazioni dallo stato, agendo opportunamente sulla piccolezza dei disturbi iniziali. Detto in altre parole, l'equilibrio è stabile se la deviazione tende a zero con la perturbazione. L'ovvia conseguenza è che, per perturbazioni sufficientemente grandi, il moto può divergere anche da una posizione di equilibrio stabile. La stabilità è dunque una proprietà locale dell'equilibrio. Per esemplificare, si pensi al grafico di una funzione di una variabile, che, in un punto di stazionarietà, rivolga la concavità verso l'alto. Localmente la funzione è crescente, ma ciò non implica che, osservandola in un intervallo più ampio, essa possa invece decrescere.

Stabilità e Biforcazione (che sono concetti diversi, ma spesso confusi nel linguaggio corrente) sono pilastri della Meccanica dei Solidi. Studi pionieristici in questo campo furono condotti da **Leonardo da Vinci** (1452-1519), ma le prime soluzioni rigorose furono ottenute da **Eulero** (1707-1783), insieme a **Bernoulli** (1700-1782).

I criteri di stabilità

È frequente imbattersi in letteratura nella seguente classificazione dei 'criteri di stabilità' dell'equilibrio:

- (a) criterio dinamico,*
- (b) criterio energetico,*
- (c) criterio statico.*

Si vuole qui brevemente illustrare il significato di queste locuzioni, e spiegare le interrelazioni esistenti.

I criteri di stabilità

Per **criterio dinamico** si intende l'applicazione della definizione di stabilità dell'equilibrio (dovuta a Lyapunov), basata sulla osservazione dell'evoluzione della traiettoria a seguito di un disturbo iniziale. Può essere applicata a sistemi di ogni tipo, conservativi o non conservativi.

Per **criterio energetico** si intende l'applicazione del teorema di Lagrange-Dirichlet, basata sull'esame della definitezza in segno **dell'energia potenziale totale**. Il criterio può essere applicato ai soli sistemi conservativi (dal momento che i sistemi non conservativi non ammettono un potenziale). Per questi sistemi, il criterio energetico fornisce gli stessi risultati del criterio dinamico, dal momento che è facile verificare che l'energia cinetica, che è sempre definita positiva, non gioca alcun ruolo sulla stabilità.

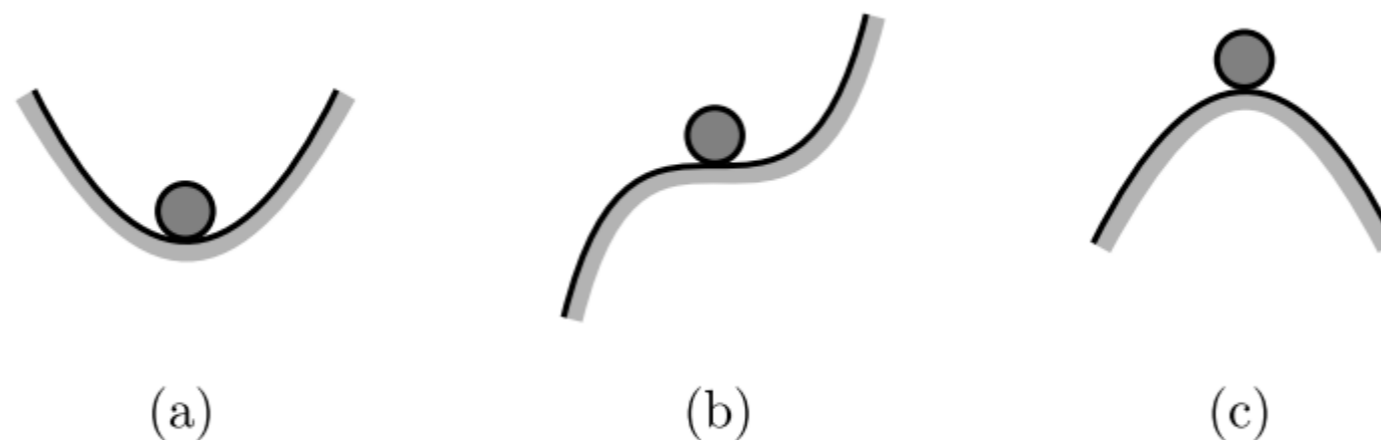
Per **criterio statico** si intende un'interpretazione meccanica del fenomeno, basata sull'equilibrio, secondo la quale la posizione è stabile se le forze interne, prodotte dalla perturbazione, tendono a riportare il sistema nella posizione originaria, sono cioè 'opposte' al disturbo che le genera. Ciò si traduce nella richiesta che la matrice Jacobiana delle equazioni di equilibrio espresse in termini di spostamento, cioè la matrice di rigidezza tangente \mathbf{K} , sia definita positiva. Quando il sistema è conservativo, e solo in quel caso, la matrice di rigidezza tangente è anche l'Hessiana dell'energia potenziale totale, cosicché il criterio statico coincide con quello energetico. Il criterio statico è, però, più ampio di quello energetico, in quanto è applicabile a qualunque sistema, conservativo o non, ed è per questo largamente impiegato nell'analisi dei sistemi anelastici.

Il criterio energetico

Il Teorema di Lagrange-Dirichlet

Se il sistema meccanico è conservativo, vale il seguente Teorema di Lagrange-Dirichlet, (formulato per i sistemi discreti, e poi generalizzato da Koiter ai sistemi continui):

Se il sistema è conservativo, un punto di equilibrio è stabile se l'Energia Potenziale Totale (EPT) è minima in quel punto.



Esempio di equilibrio: (a) stabile, (b) neutro, (c) instabile

ESEMPIO

Massa puntiforme su una famiglia di superfici

Un esempio simile è offerto dalla massa pesante vincolata alla famiglia di superfici $f = \frac{1}{2} (x^2 + \mu y^2)$ (Fig. 1.4). Poiché $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_O = 0$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_O = 0$, $\forall \mu$, l'origine $O := (0, 0)$ è punto di equilibrio per ogni μ . La stabilità è governata dalla matrice Hessiana valutata nell'origine $\mathbf{H}_O = \text{diag}[1, \mu]$. Se $\mu > 0$ l'Hessiana è definita positiva (la superficie è un paraboloide ellittico, Fig. 1.4-a), e l'origine è stabile; se $\mu < 0$ l'Hessiana è indefinita (paraboloide iperbolico, o a sella, Fig. 1.4-c) e l'origine è instabile. Dunque $\mu_c = 0$, per il quale l'Hessiana è semidefinita positiva (cilindro parabolico, Fig. 1.4-b), è il valore critico del parametro di biforcazione.



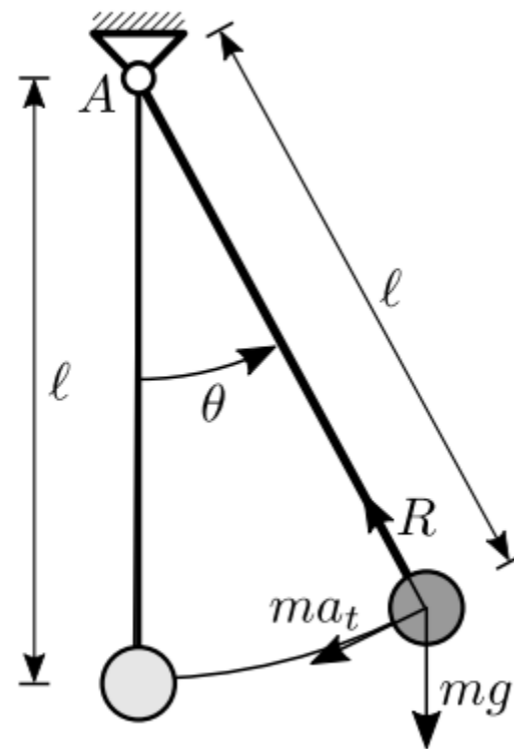
Figura Matrice Hessiana: (a) definita positiva; (b) semidefinita positiva; (c) indefinita.



Sistemi ad un grado di libertà

Il criterio energetico

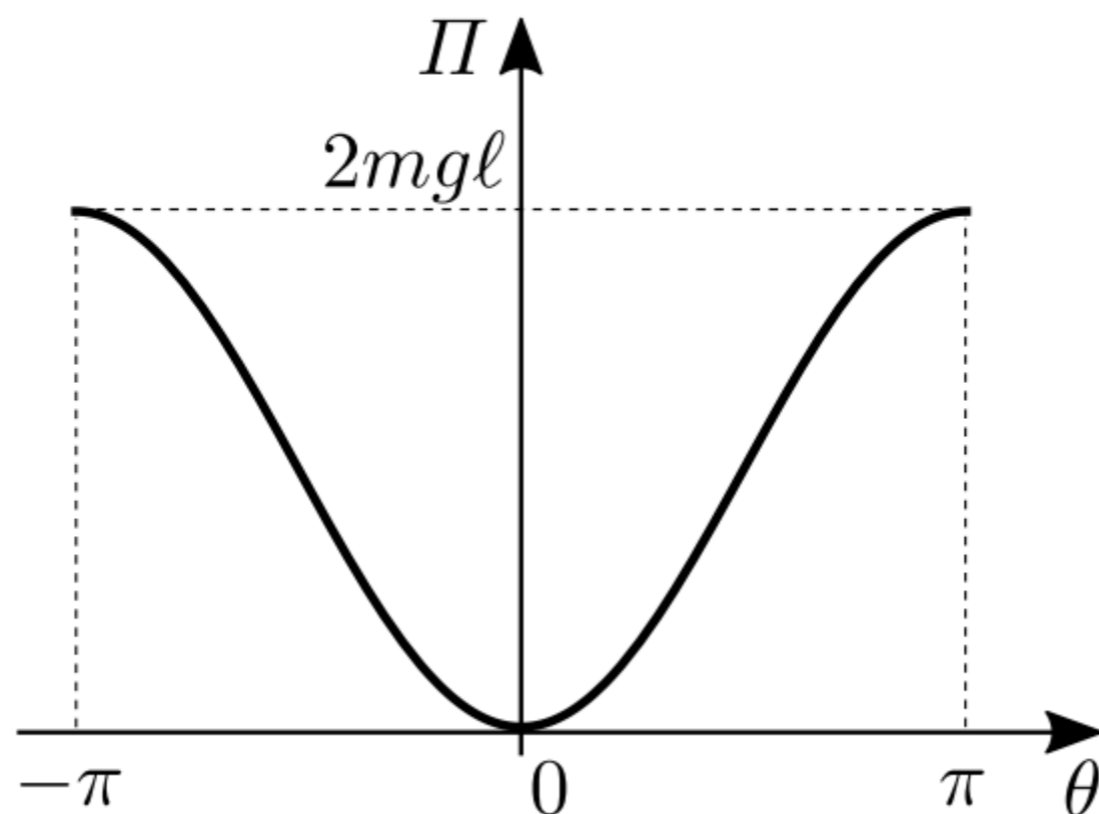
L'analisi dinamica appena sviluppata (secondo il *Criterio Dinamico di Stabilità*), rappresenta lo strumento d'indagine più generale. Tuttavia, quando il sistema è conservativo, essa appare 'esuberante', in accordo al teorema di Lagrange-Dirichlet, e può essere sostituita da una più semplice analisi energetica (*Criterio Energetico di Stabilità*). Questa richiede: (a) la scrittura dell'energia potenziale totale del sistema Π , (b) la determinazione dei punti di equilibrio, quali punti di stazionarietà di Π ; (c) la verifica che il punto sia di minimo, per la stabilità.



Pendolo matematico piano.

Con riferimento al pendolo, poiché le forze attive sono esclusivamente gravitazionali, è $\Pi = \Pi_0 + mgh$. Qui Π_0 è una inessenziale costante che rappresenta l'energia in $\theta = 0$ (che pertanto può prendersi uguale a zero), ed $h = \ell(1 - \cos \theta)$ è l'altezza attuale della massa rispetto al punto più basso. Perciò:

$$\Pi = mgl(1 - \cos \theta)$$



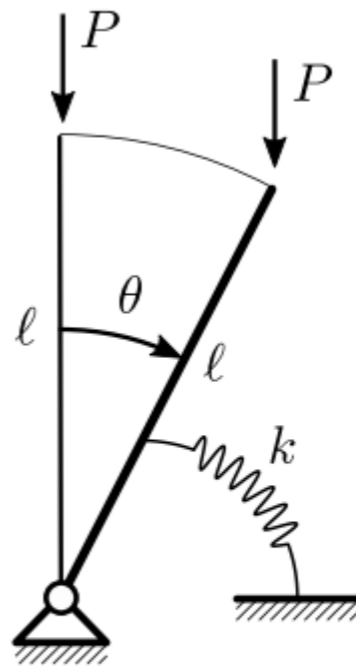
Le posizioni di equilibrio si determinano dalla condizione

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = mgl \sin \theta = 0$$

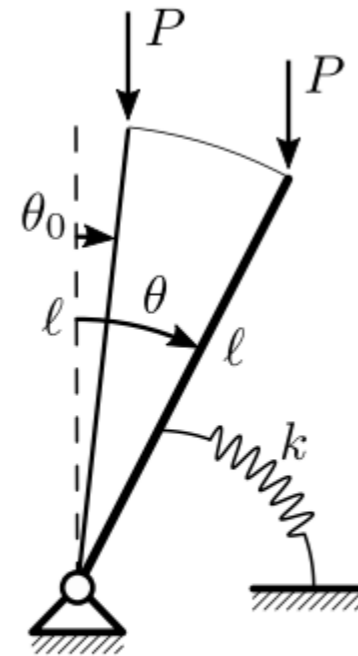
che è soddisfatta in $\theta = 0, \pm\pi$. La stabilità è determinata dal segno della derivata seconda dell'energia, $\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = mgl \cos \theta$, valutata in corrispondenza dei punti di equilibrio. Si ha:

- in $\theta = 0$ è $\left. \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \right|_0 = mgl > 0$; il punto è di minimo locale, per cui l'equilibrio è stabile;
- in $\theta = \pm\pi$ è $\left. \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} \right|_{\pi} = -mgl < 0$; il punto è di massimo locale, per cui l'equilibrio è instabile.

Esempio: Il pendolo elastico rovescio



(a)

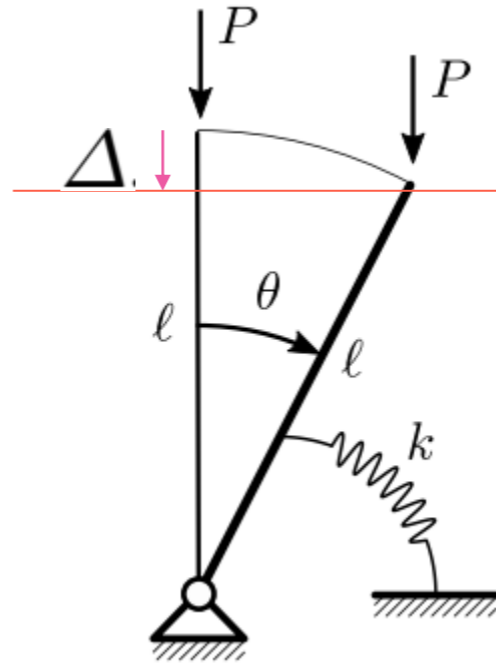


(b)

Figura Asta rigida vincolata elasticamente da molla torsionale, soggetta a forza peso:
(a) sistema perfetto, (b) sistema imperfetto.

Si consideri il pendolo rovescio in Figure a, costituito da un'asta rigida di lunghezza l , incernierata alla base e vincolata elasticamente con una molla torsionale di rigidezza k , soggetta all'estremità da una forza peso di intensità P . Si assume la rotazione θ del pendolo quale unico parametro lagrangiano.

Analisi esatta del sistema perfetto



L'energia potenziale elastica del sistema è accumulata dalla molla torsionale, ed uguale a $U = \frac{1}{2}k\theta^2$. L'energia potenziale della forza esterna $V = -P\Delta$, è pari al lavoro cambiato di segno, speso dalla forza P nell'abbassamento $\Delta := \ell(1 - \cos\theta)$ dell'estremo libero dell'asta. L'Energia Potenziale Totale (EPT) del sistema si scrive dunque:

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2}k\theta^2 - P\ell(1 - \cos\theta)$$

La condizione di equilibrio si ottiene imponendo la stazionarietà dell'energia, $\frac{d\Pi}{d\theta} = 0$, che implica:

$$k\theta - P\ell \sin\theta = 0$$

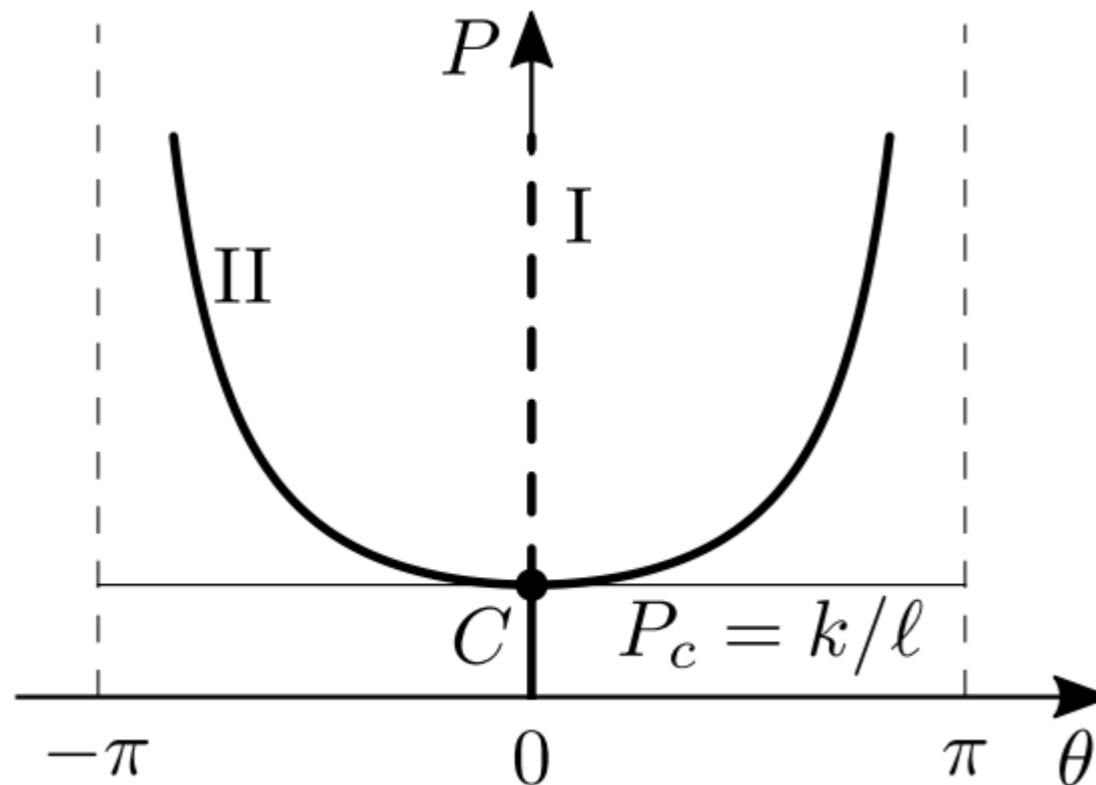
$$k\theta - P\ell \sin \theta = 0$$

Tutte le posizioni di equilibrio del pendolo sono espresse da:

$$(I) \quad \theta = 0, \quad \forall P$$

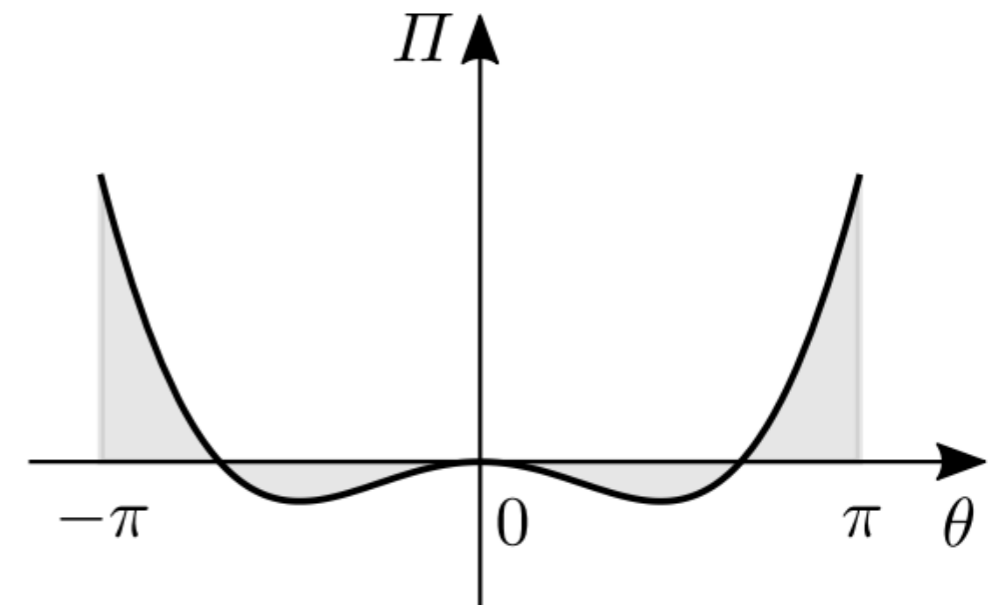
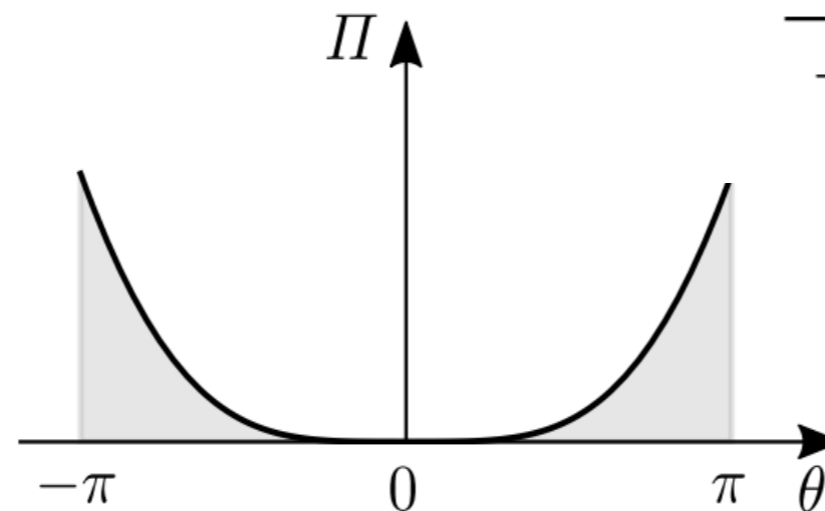
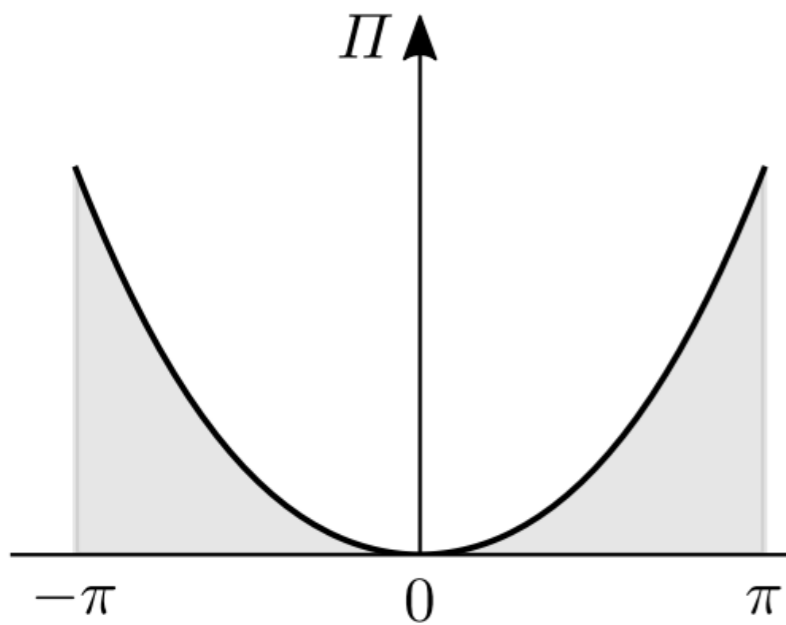
$$(II) \quad P = \frac{k}{\ell} \frac{\theta}{\sin \theta}$$

in cui (I) è il percorso fondamentale, banale, e (II) quello diramato
I due percorsi si intersecano in corrispondenza del valore critico del carico:



$$P_c := \frac{k}{\ell}$$

- nel caso sottocritico, esiste un unico punto di stazionarietà in $\theta = 0$; essendo il punto anche di minimo, l'equilibrio è stabile;
- la situazione precedente persiste anche nel caso critico, in cui l'equilibrio banale rimane stabile;
- nel caso sopracritico si hanno tre punti di stazionarietà dell'EPT, corrispondenti ad un massimo (instabile) nell'origine, e due minimi (stabili) in posizioni non banali.



Alternativamente, si può rinunciare alla costruzione del grafico dell'EPT, e valutare il segno della sua derivata seconda sui due percorsi di equilibrio. Poiché è:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = k - P\ell \cos \theta$$

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = \begin{cases} k - P\ell \leq 0 & \text{se } P \geq P_c & \text{(I)} & \theta = 0, \\ k \left(1 - \frac{\theta}{\tan \theta}\right) > 0 & \forall \theta & \text{(II)} & P = \frac{k}{\ell} \frac{\theta}{\sin \theta} \end{cases}$$

Il percorso di equilibrio banale è perciò stabile quando $P < P_c$; il percorso diramato è stabile per ogni P . Poiché $\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = 0$ nello stato critico, la stabilità di questo è determinata dalle derivate successive. Poiché la derivata terza si annulla e la quarta è positiva, il punto di biforcazione è stabile. Questo tipo di biforcazione è detta a *forca supercritica*, o stabile.

Analisi esatta del sistema imperfetto

Si assume che l'asta, nella sua configurazione naturale, sia inclinata sulla verticale di un piccolo angolo θ_0 (imperfezione geometrica).

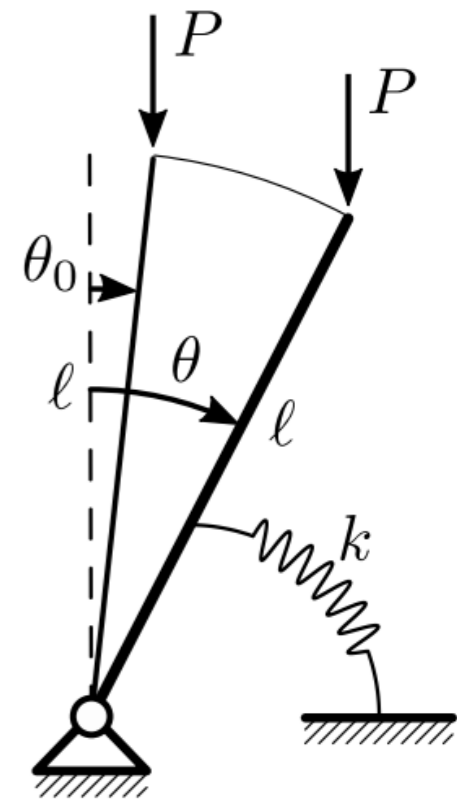
Poiché la quota dell'estremo libero dell'asta imperfetta, nella sua configurazione iniziale, è più bassa di $\Delta_0 := 1 - \cos \theta_0$ rispetto a quella del sistema perfetto, la forza peso compie lavoro nell'escursione $\Delta - \Delta_0$; l'energia potenziale totale si modifica dunque come segue:

$$\Pi = \frac{1}{2}k (\theta - \theta_0)^2 - P\ell (1 - \cos \theta) + P\ell (1 - \cos \theta_0)$$

L'equilibrio è espresso da $\frac{d\Pi}{d\theta} = 0$, ovvero:

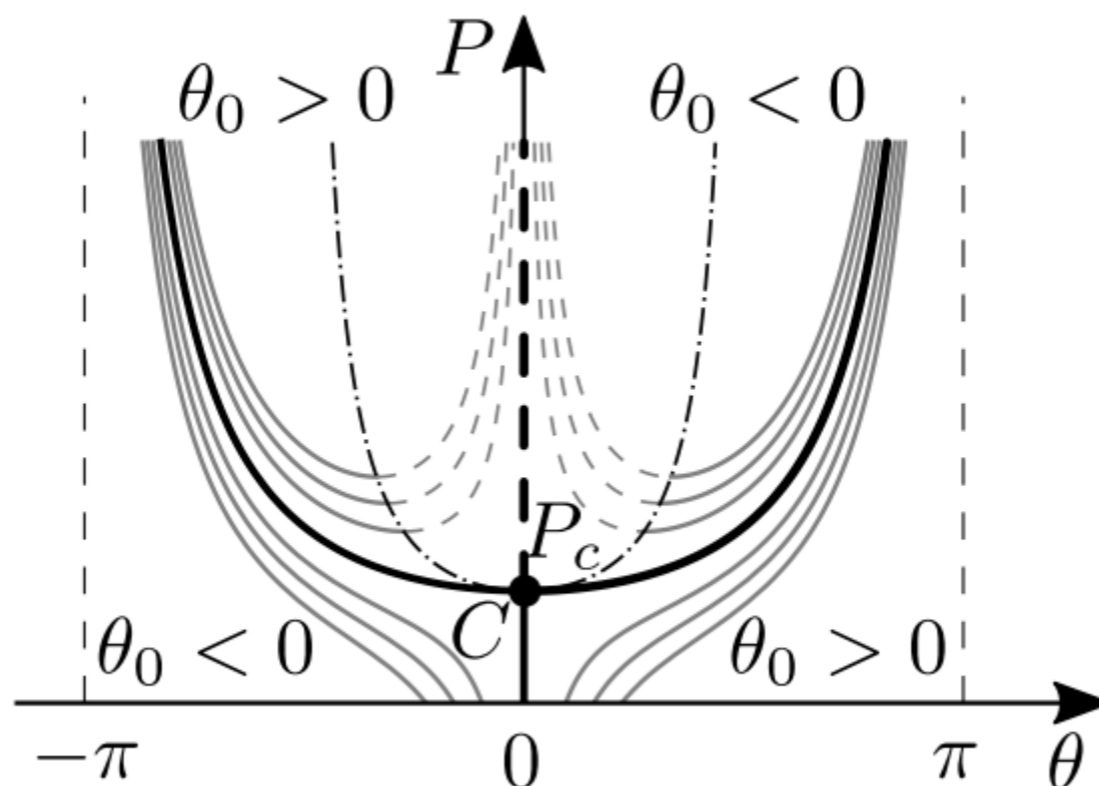
$$k (\theta - \theta_0) - P\ell \sin \theta = 0$$

che rappresenta il bilancio dei momenti rispetto alla cerniera.



Questa equazione ammette, per un assegnato θ_0 , l'unico percorso *non banale*:

$$P = \frac{k}{\ell} \frac{\theta - \theta_0}{\sin \theta}$$



Ogni curva consta di un *ramo naturale* (che passa per il punto $(\theta, P) = (\theta_0, 0)$) e in un *ramo non naturale*, esterno a detto punto. Il solo ramo non naturale ammette un *punto limite inferiore* (θ_l, P_l) . Imposto $\frac{dP}{d\theta} = 0$, si trova $\theta_l - \theta_0 = \tan \theta_l$, da cui:

$$P_l = \frac{k}{\ell} \frac{1}{\cos \theta_l}$$

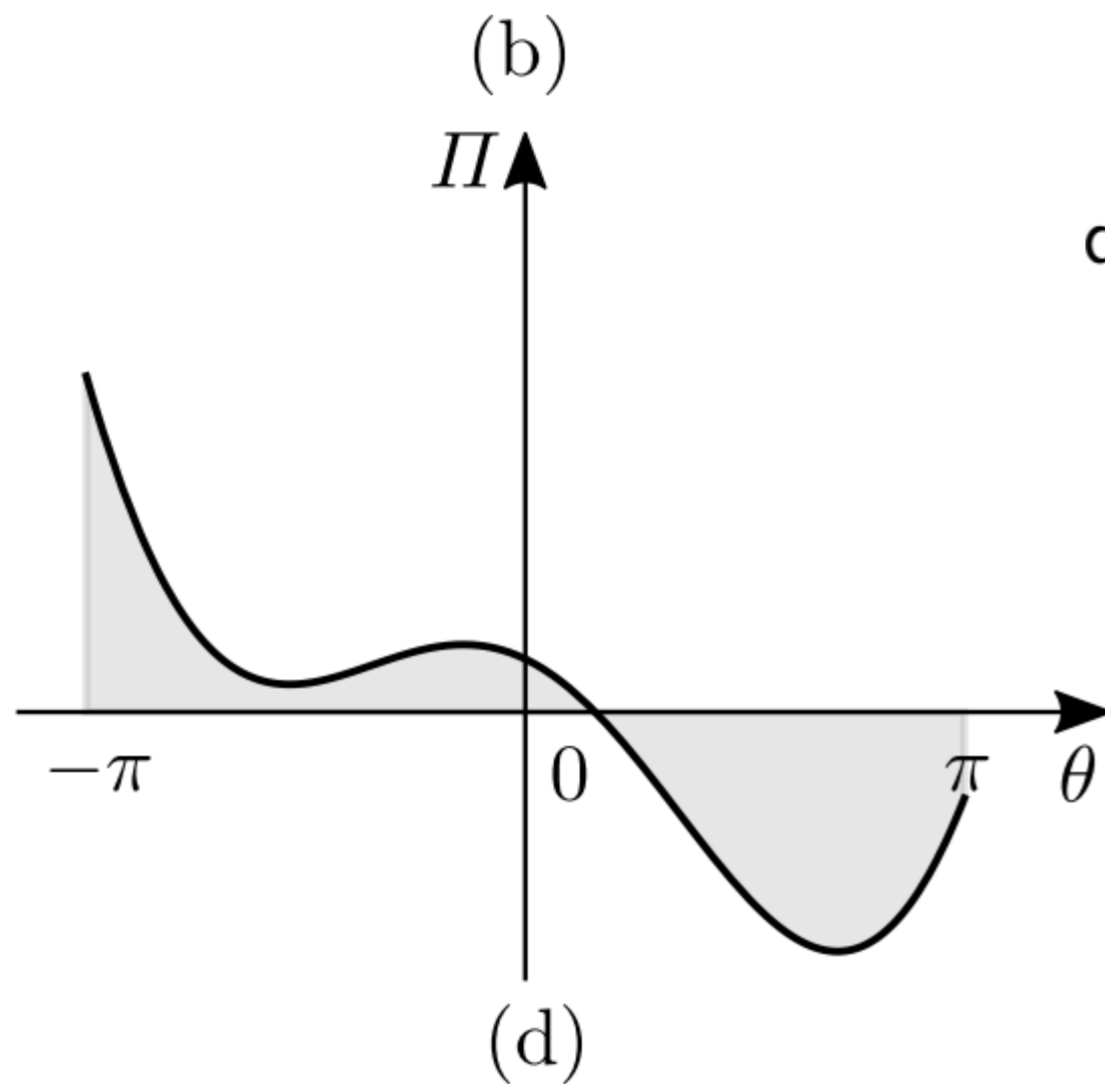
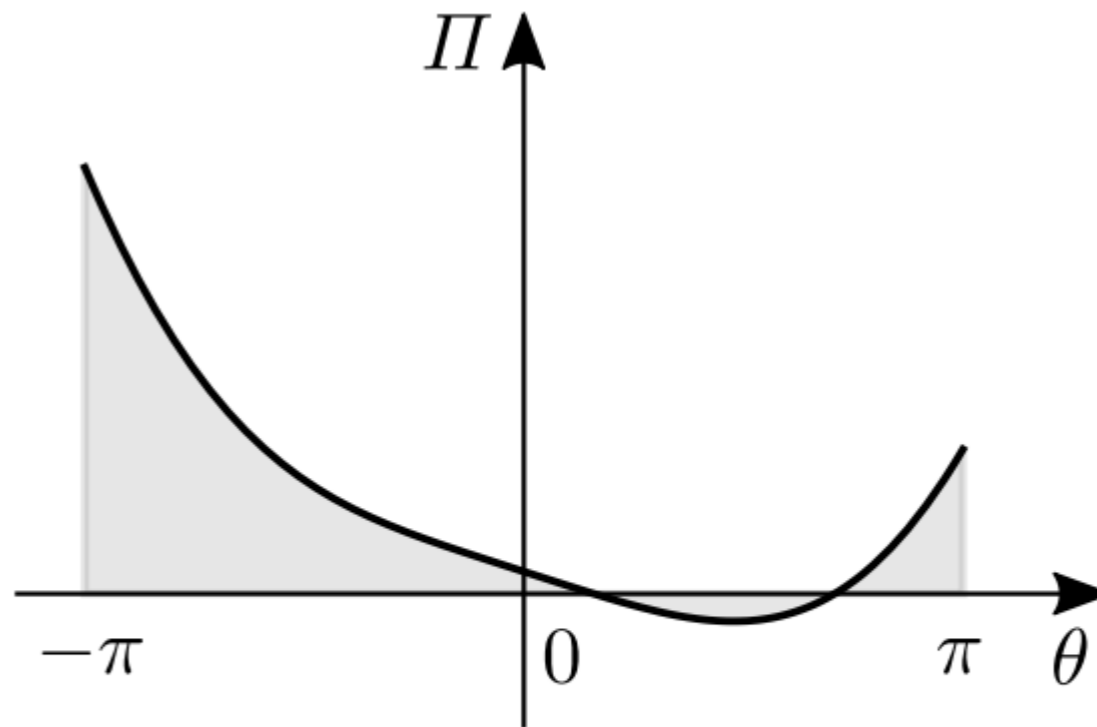
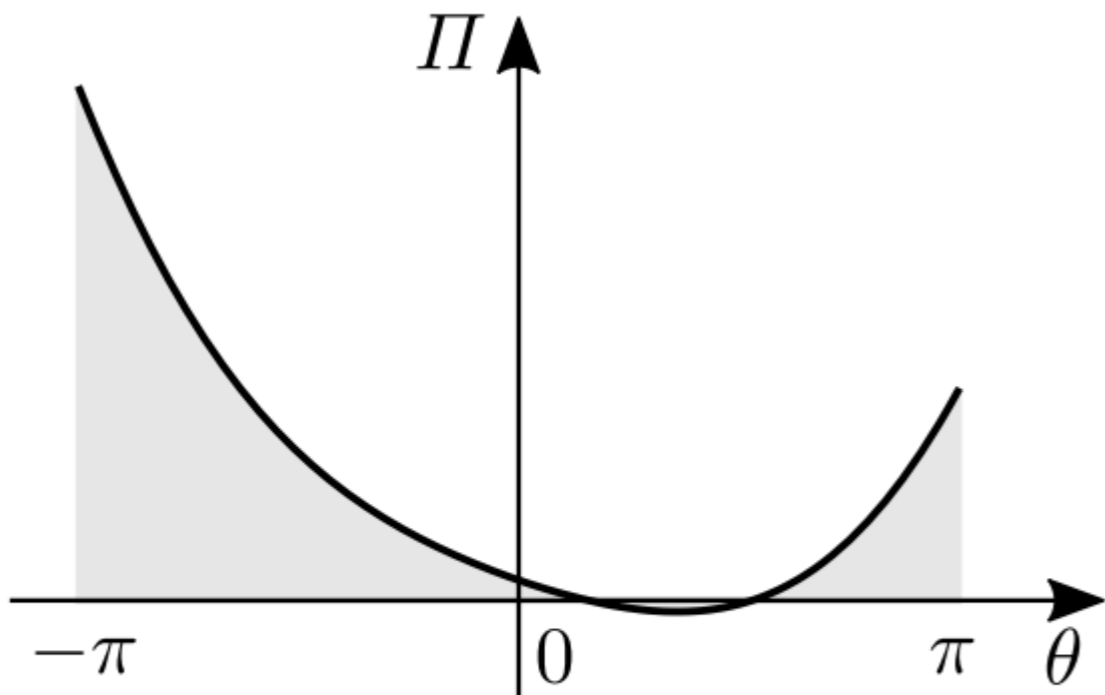


diagramma dell'EPT, per $\theta_0 > 0$, quando:

(b) $P < P_c$, (c) $P = P_c$, (d) $P > P_c$

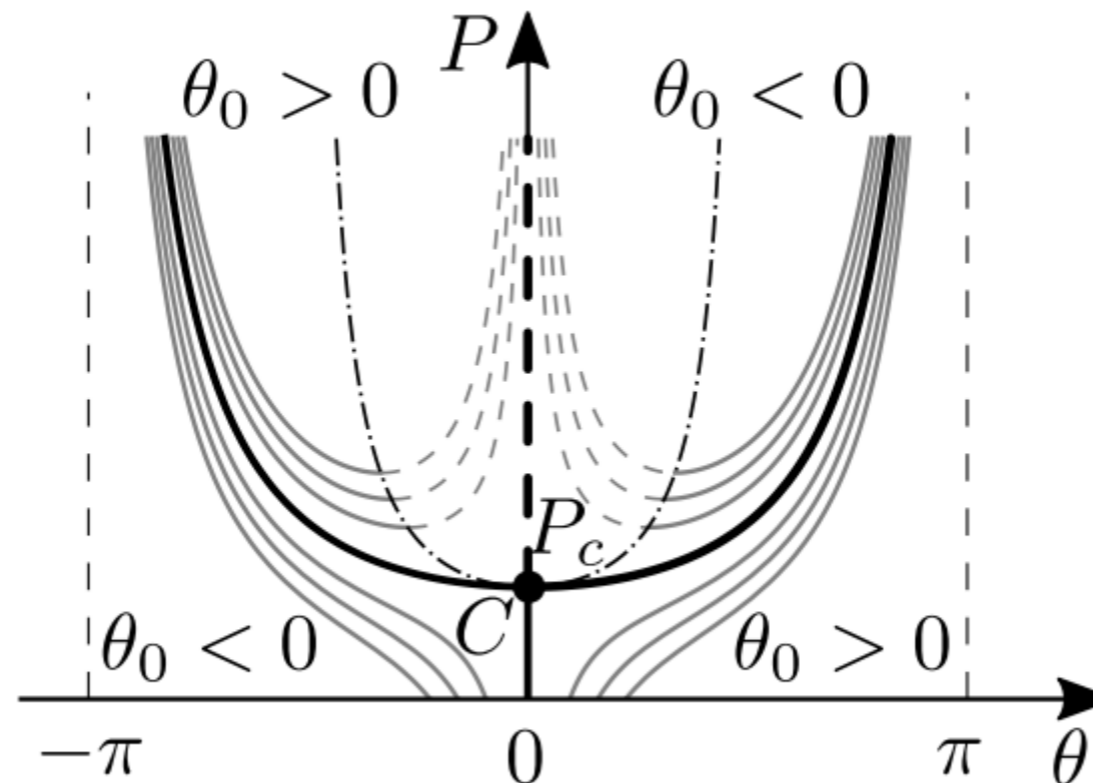
In alternativa, si calcola la derivata seconda dell'energia potenziale:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = k - P\ell \cos \theta$$

Imponendo che sia $\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = 0$ si ottiene un *luogo critico*:

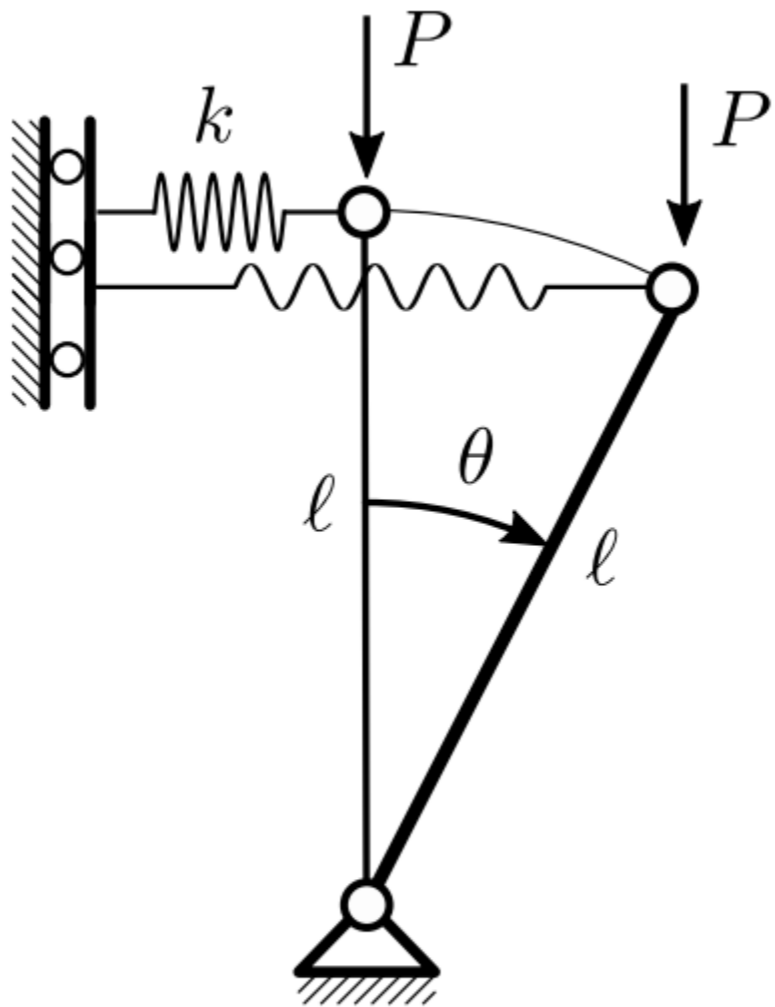
$$P = \frac{k}{\ell} \frac{1}{\cos \theta}$$

che separa, sul piano (θ, P) gli stati stabili (inferiori alla curva) da quelli instabili (superiori alla curva).

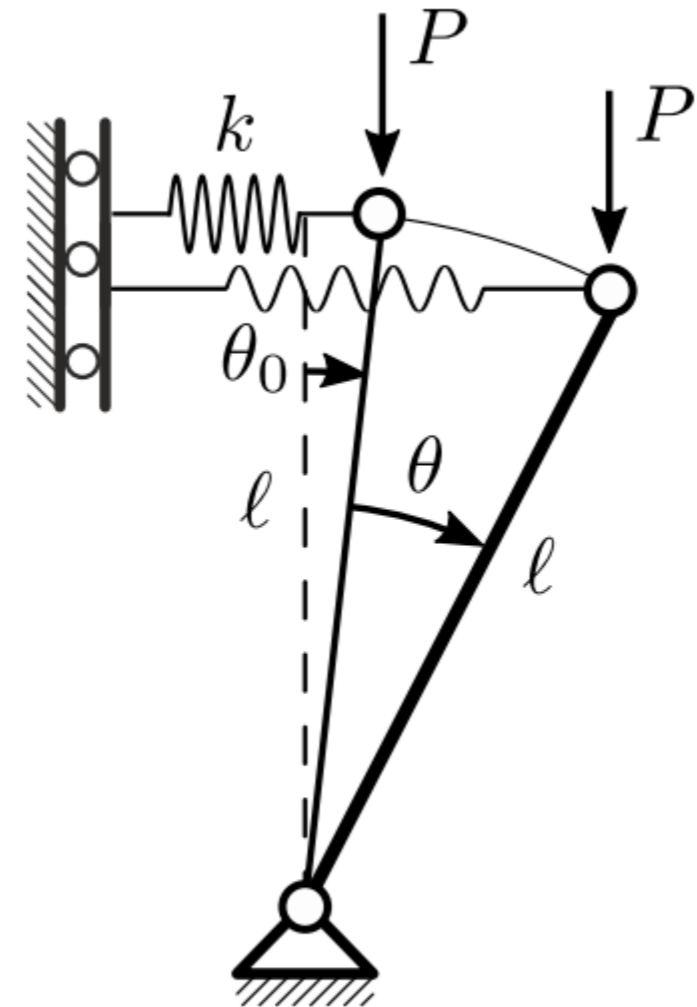


Il pendolo rovescio con molla scorrevole

Si consideri il sistema costituito da un'asta rigida di lunghezza ℓ , incernierata alla base e vincolata elasticamente in sommità da una molla estensionale di rigidità k , scorrevole su glifo, e soggetta ad una forza peso P



(a)



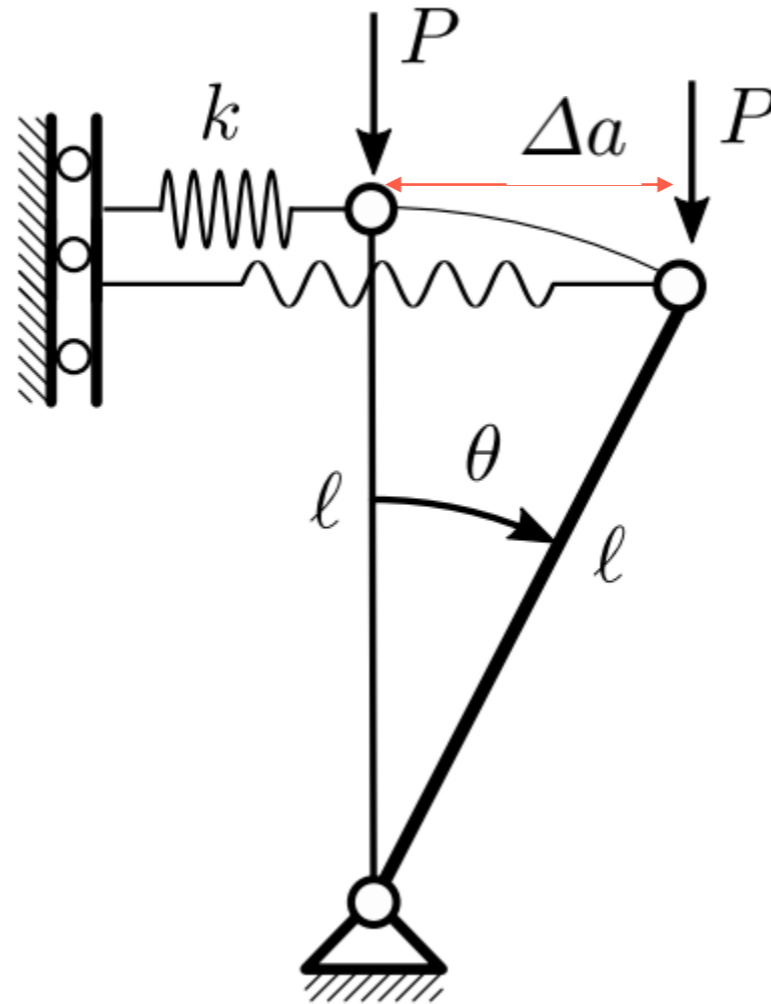
(b)

Pendolo rovescio con molla scorrevole, soggetta a forza peso

Analisi esatta del sistema perfetto

L'Energia potenziale elastica della molla scorrevole è $U = \frac{1}{2}k\Delta a^2$, in cui $\Delta a := \ell \sin \theta$ è il suo allungamento. L'EPT del sistema si scrive dunque:

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2}k \ell^2 \sin^2 \theta - P\ell (1 - \cos \theta)$$



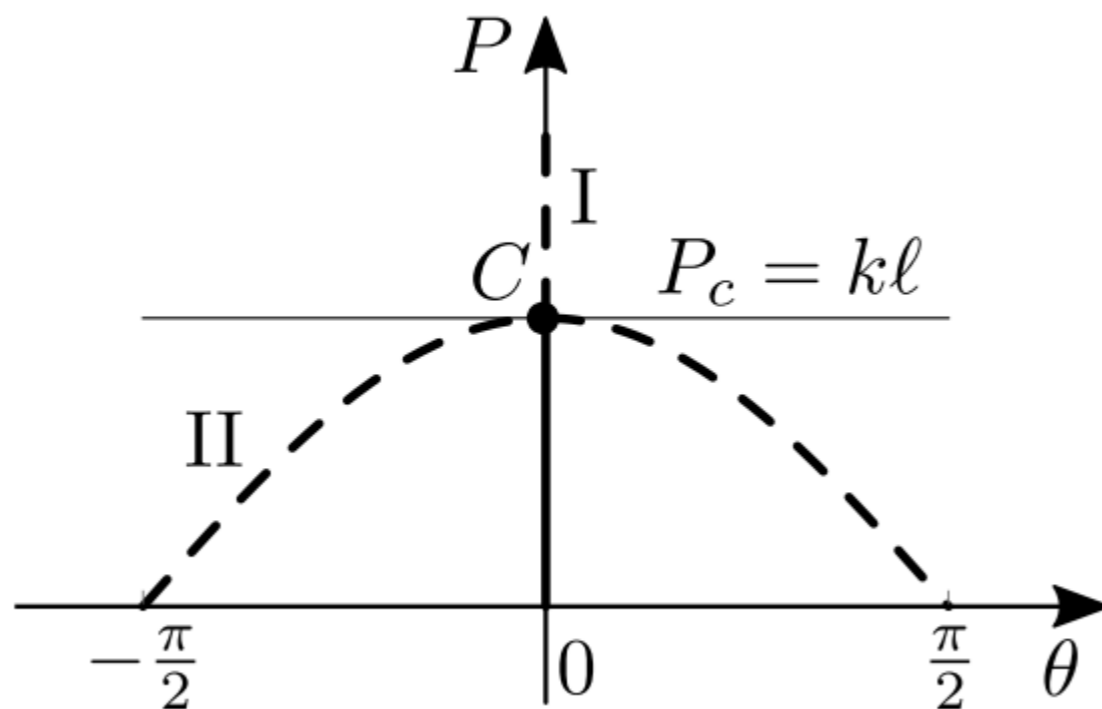
La condizione di equilibrio segue dalla stazionarietà $\frac{d\Pi}{d\theta} = 0$:

$$\ell \sin \theta (k\ell \cos \theta - P) = 0$$

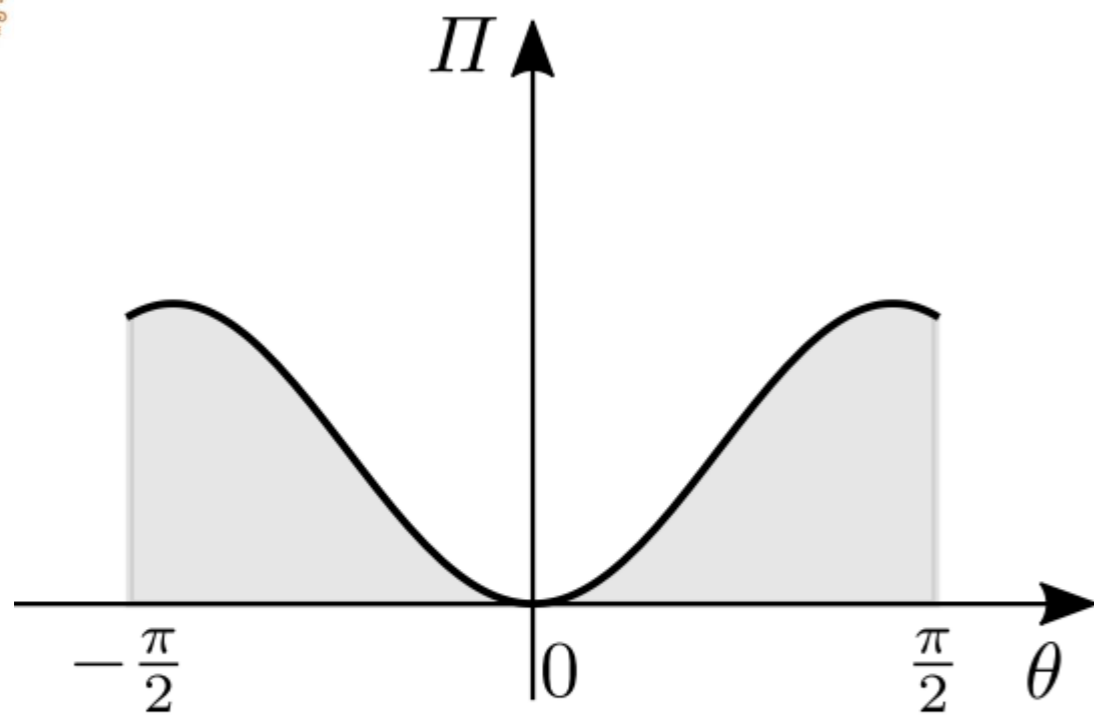
Essa rappresenta il bilancio dei momenti rispetto alla cerniera. Da questa seguono i percorsi di equilibrio:

$$(I) \quad \theta = 0, \quad \forall P$$

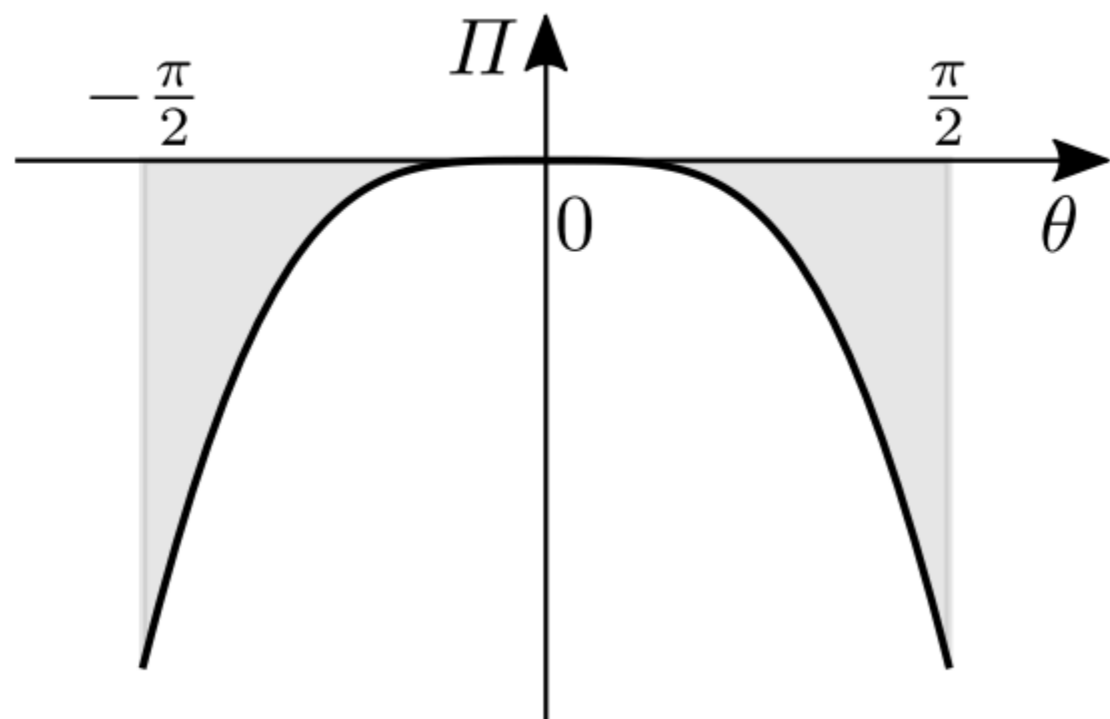
$$(II) \quad P = k\ell \cos \theta$$



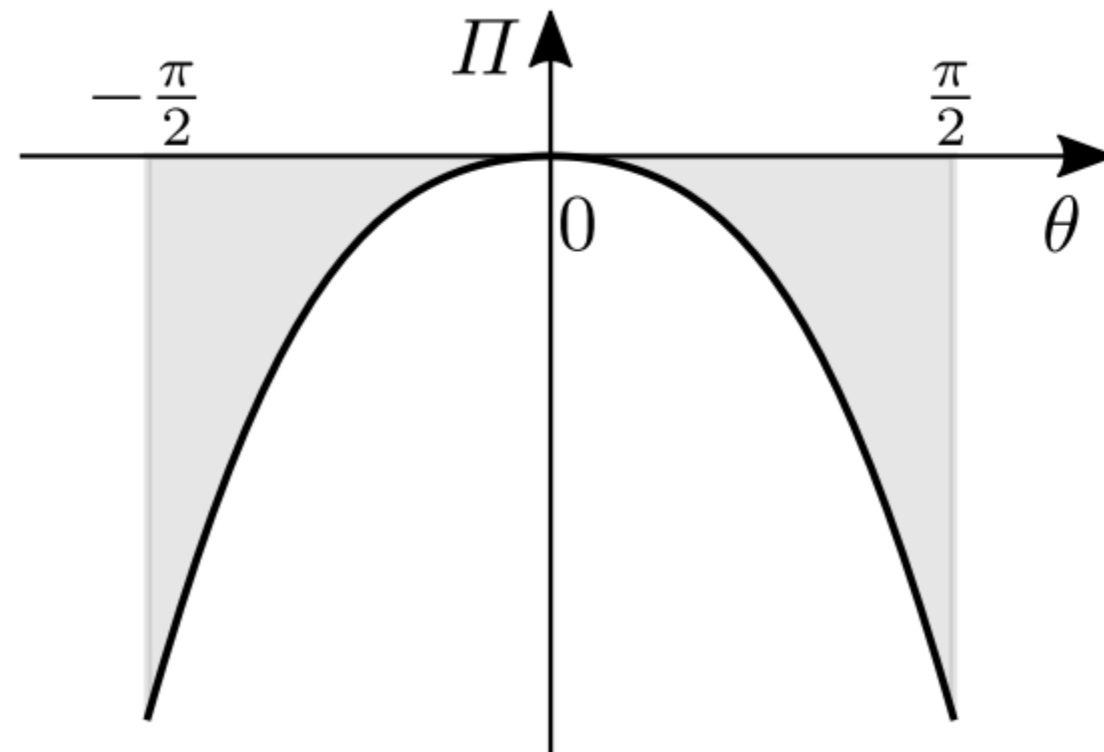
il punto di intersezione determina il carico critico: $P_c = k\ell$



(b)



(c)



(d)

diagramma dell'EPT quando:

(b) $P < P_c$, (c) $P = P_c$, (d) $P > P_c$.

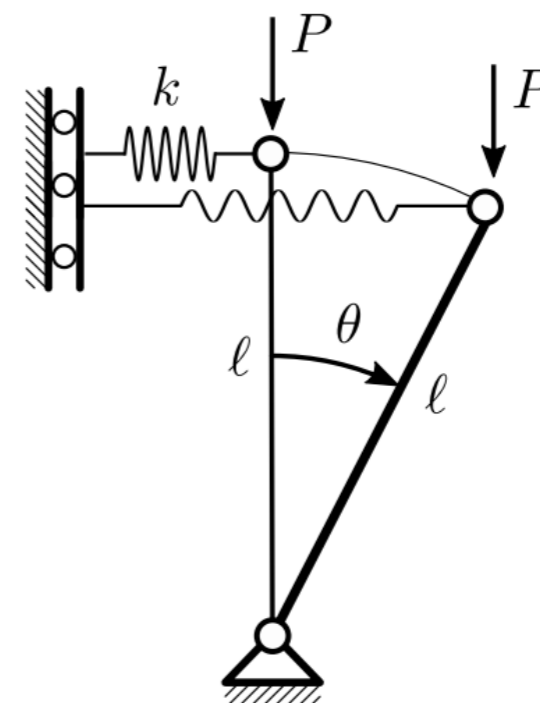
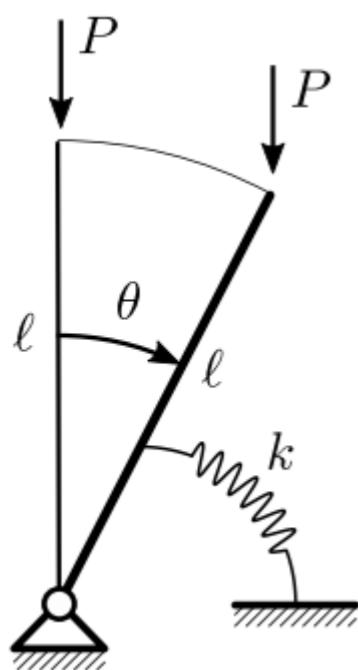
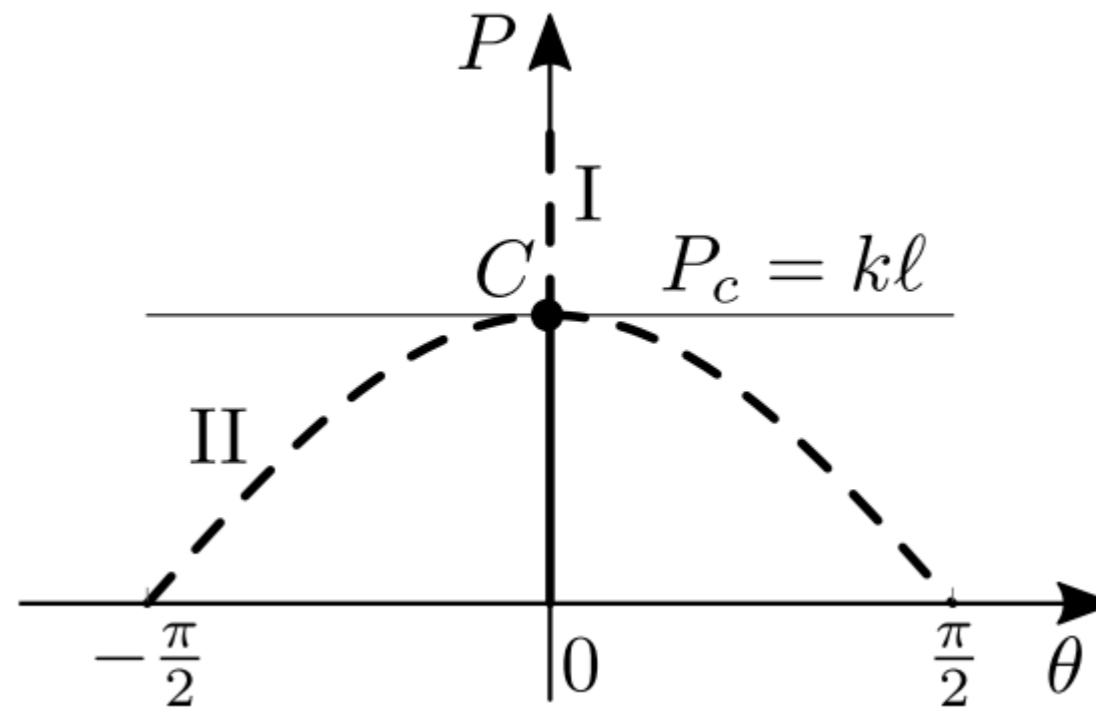
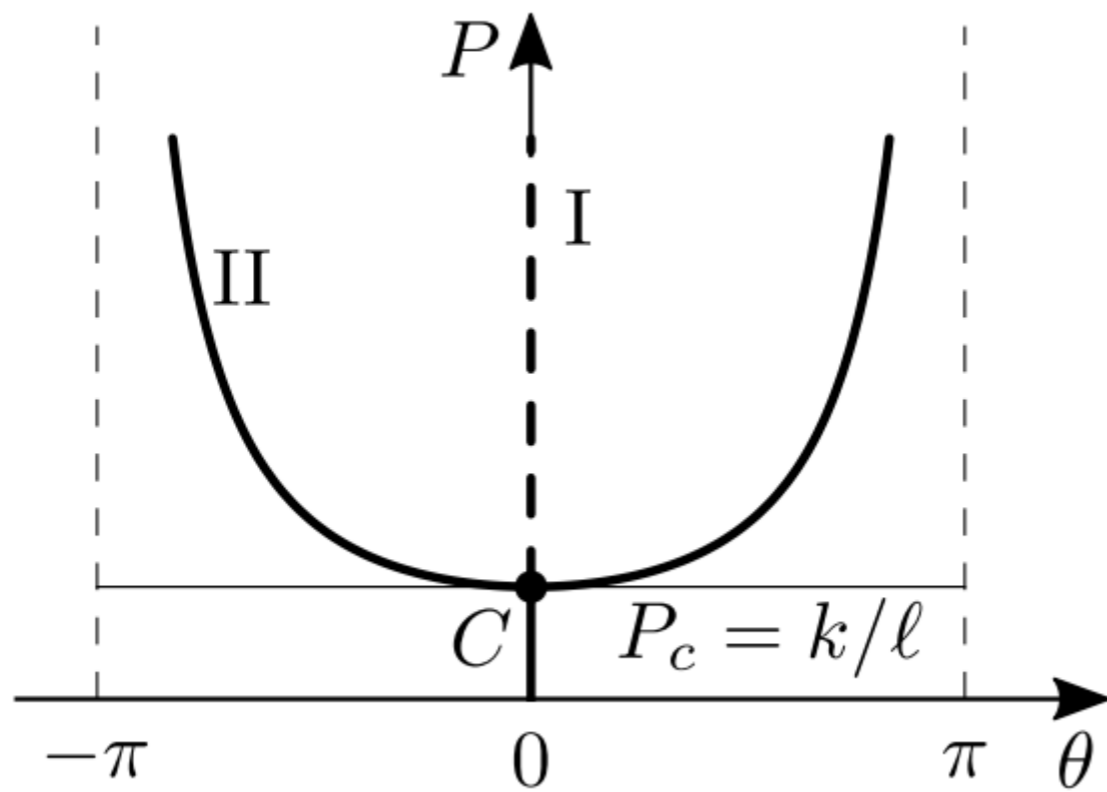
In via alternativa, si calcola:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = k\ell^2 (2 \cos^2 \theta - 1) - P\ell \cos \theta$$

e la si valuta sui due percorsi di equilibrio:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = \begin{cases} k\ell^2 - P\ell \leq 0 & \text{se } P \geq P_c & \text{(I)} \\ \frac{1}{k} (P^2 - k^2\ell^2) \leq 0 & \text{poiché } P \leq P_c & \text{(II)} \end{cases}$$

Questo tipo di biforcazione è detta a *forca sottocritica*, o instabile.



Analisi esatta del sistema imperfetto

L'EPT si modifica come segue:

$$\Pi = \frac{1}{2}k [\ell \sin \theta - \ell \sin \theta_0]^2 - P\ell (1 - \cos \theta) + P\ell (1 - \cos \theta_0)$$

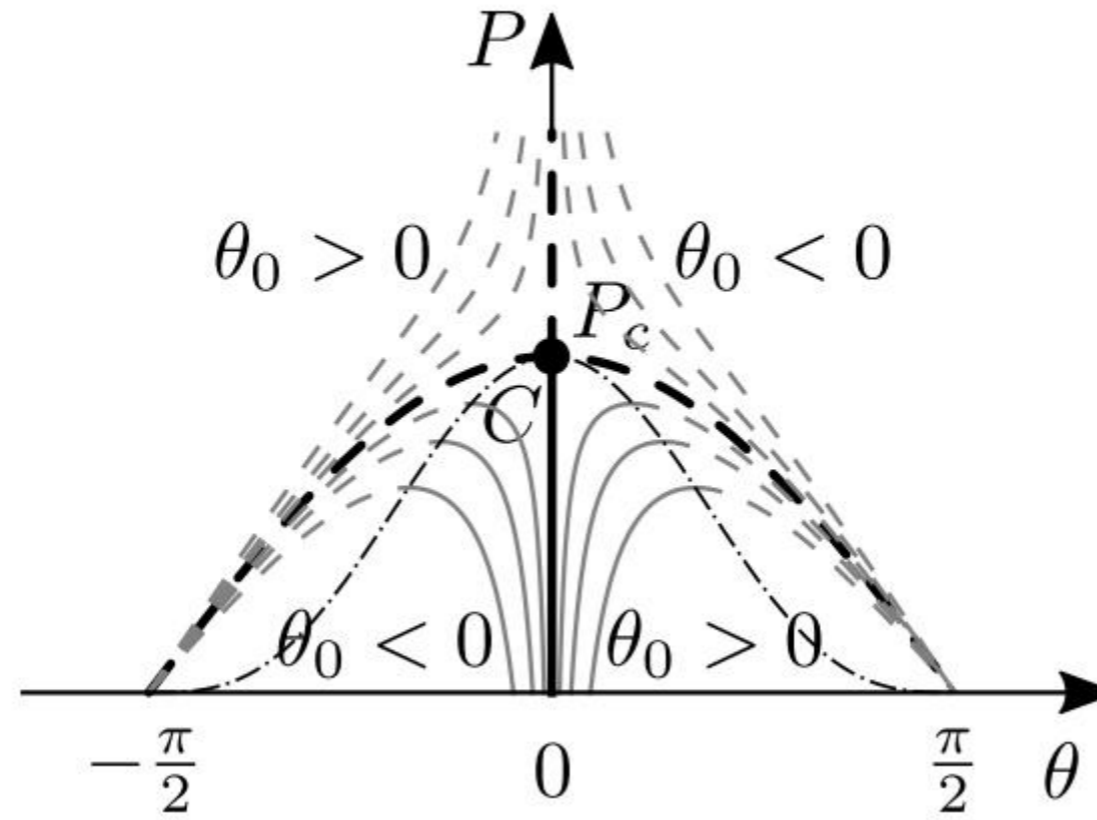
da cui, imposto $\frac{d\Pi}{d\theta} = 0$, segue la condizione di equilibrio:

$$\ell [k\ell \cos \theta (\sin \theta - \sin \theta_0) - P \sin \theta] = 0$$

Questa ammette la soluzione:

$$P = k\ell \frac{\sin \theta - \sin \theta_0}{\tan \theta}$$

che descrive i percorsi naturali e non naturali



In questo sistema, il punto limite (superiore) si manifesta sui rami naturali. Imposto $\frac{dP}{d\theta} = 0$ si trova $\sin \theta_l = \sin^{\frac{1}{3}} \theta_0$; sostituendo in $P(\theta)$ si ottiene il cercato valore limite:

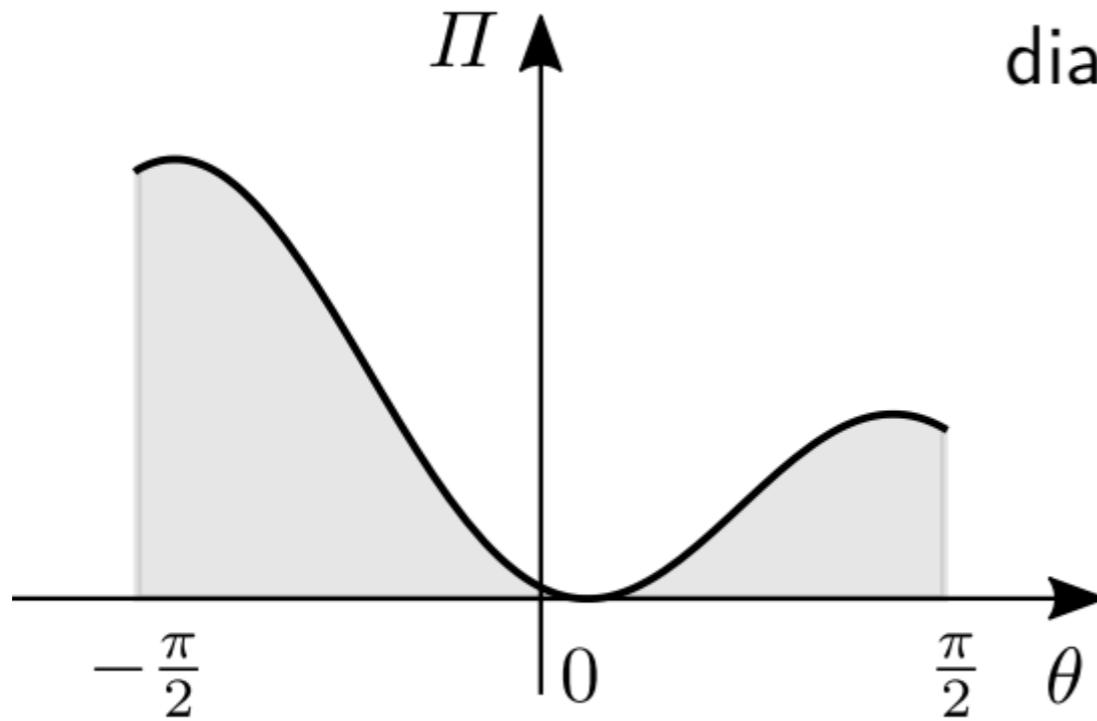
$$P_l = k\ell \left(1 - \sin^{\frac{2}{3}} \theta_0\right)^{\frac{2}{3}}$$

luogo critico (curva a tratto-punto)

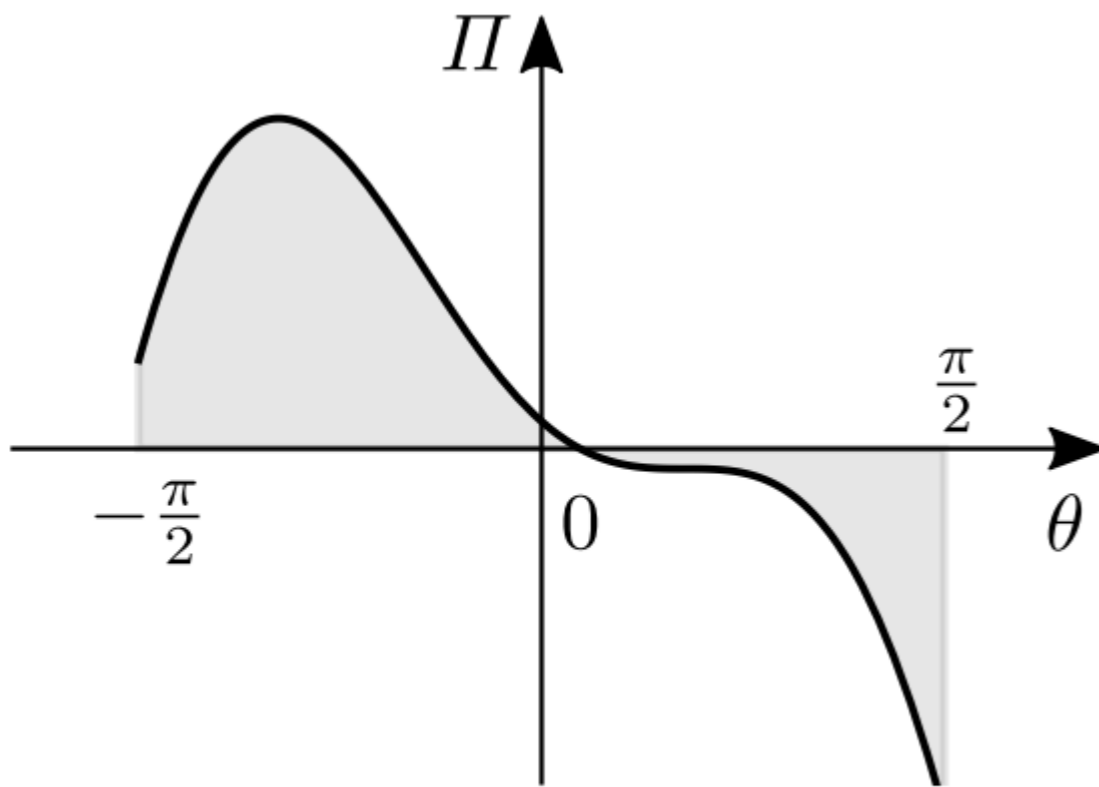
Per analizzare la stabilità dell'equilibrio, si diagramma l'EPT

diagramma dell'EPT, per $\theta_0 > 0$, quando:

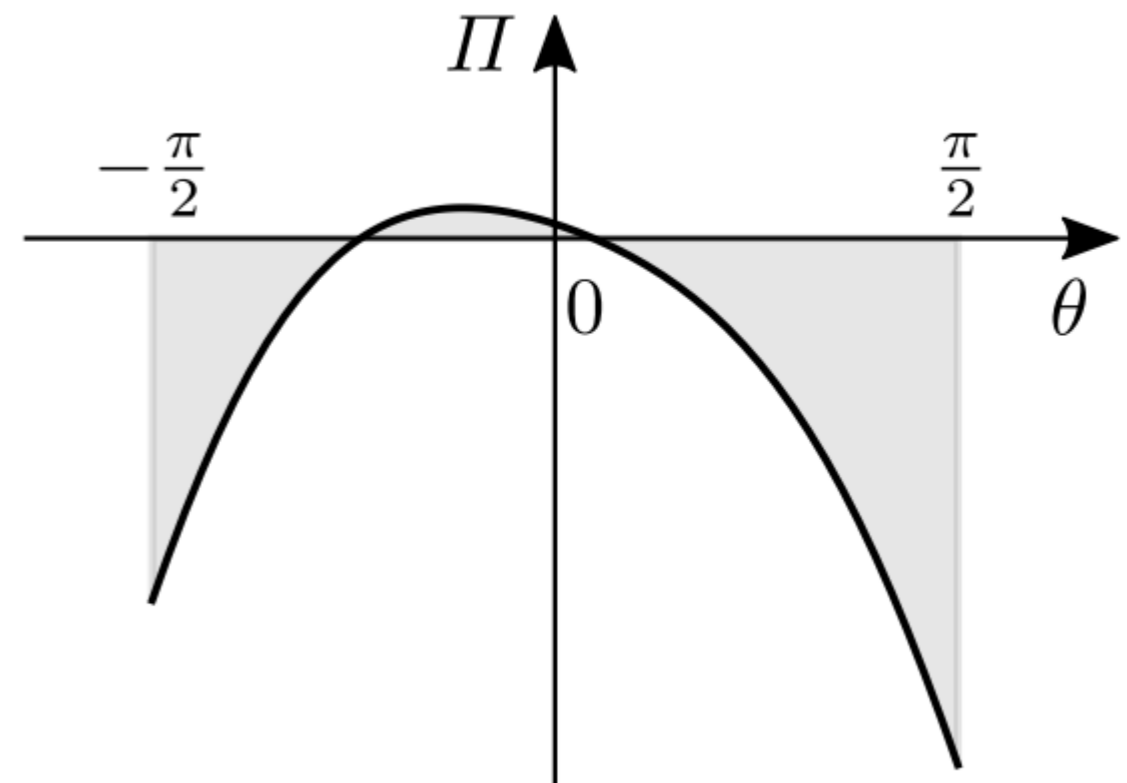
(b) $P < P_c$, (c) $P = P_c$, (d) $P > P_c$



(b)



(c)



(d)

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = k\ell^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \sin \theta \sin \theta_0) - P\ell \cos \theta$$

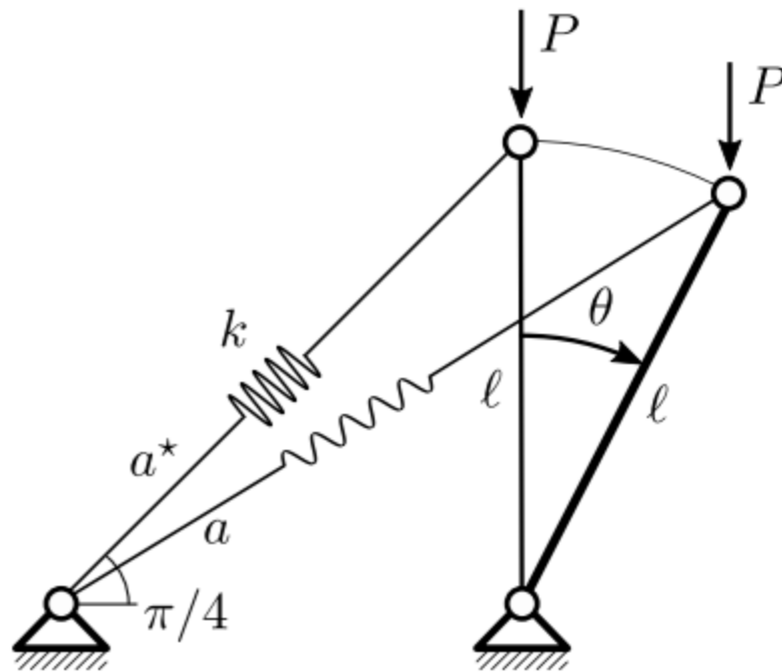
e la si valuta sul percorso di equilibrio della struttura imperfetta; si ottiene:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = k\ell^2 \left(\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} - \sin^2 \theta \right)$$

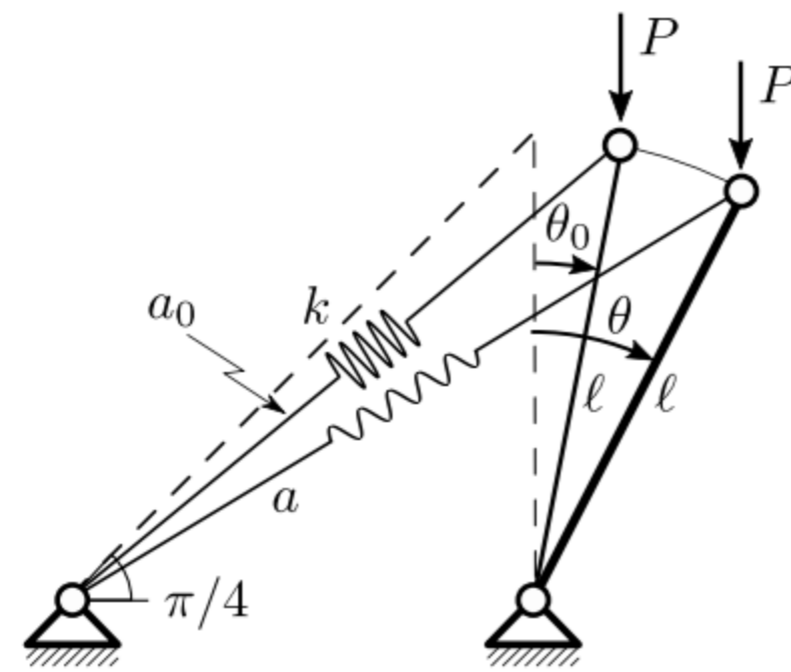
Il luogo critico, che soddisfa la condizione $\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = 0$, è $\sin \theta_0 = \sin^3 \theta$,

Il pendolo rovescio strallato

Si studia ora un sistema ad un grado di libertà, prototipo di sistemi asimmetrici. La struttura considerata consiste di un pendolo rovescio di lunghezza ℓ , vincolato da una molla di rigidezza k , che collega a terra l'estremità libera del pendolo, inclinata di un angolo $\pi/4$ sull'orizzontale. Il pendolo è soggetto ad una forza peso P applicata in sommità.



(a)



(b)

Pendolo rovescio strallato soggetto a forza peso:

Analisi esatta del sistema perfetto

Detta $a^* = \sqrt{2}\ell$ la lunghezza iniziale dello strallo, ed $a = \sqrt{2}\ell\sqrt{1 + \sin\theta}$ la lunghezza attuale, l'energia elastica è $U = \frac{1}{2}k(a - a^*)^2$, e l'EPT:

$$\Pi = U + V = k\ell^2 \left(\sqrt{1 + \sin\theta} - 1 \right)^2 - P\ell(1 - \cos\theta)$$

Imponendo che questa sia stazionaria, $\frac{d\Pi}{d\theta} = 0$, segue l'equilibrio:

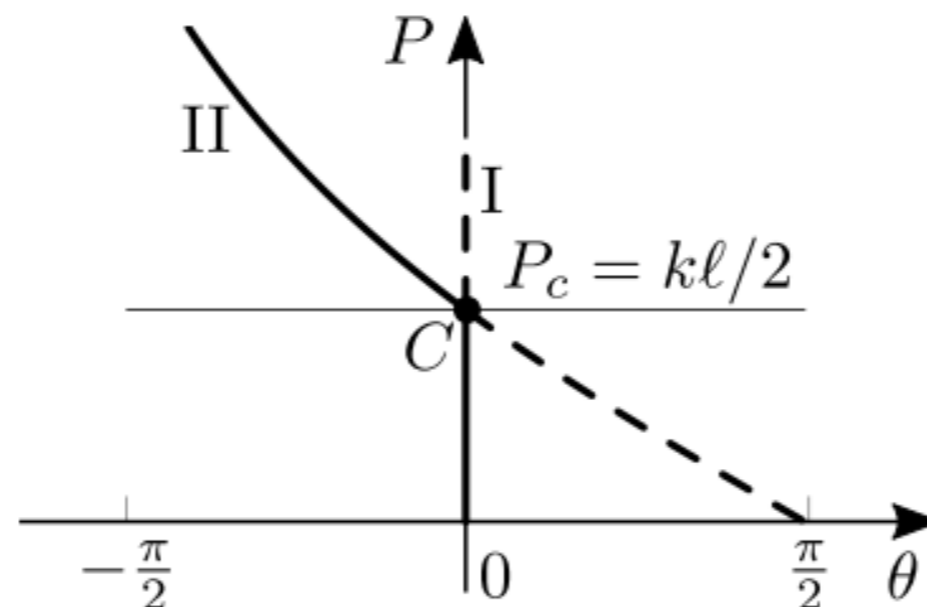
$$k\ell \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \sin\theta}} \right) \cos\theta - P \sin\theta = 0$$

da cui si ricavano i seguenti percorsi

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \theta = 0, \quad \forall P \\ \text{(II)} \quad & P = k\ell \frac{1}{\tan\theta} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \sin\theta}} \right) \end{aligned}$$

il cui punto d'intersezione determina il carico critico:

$$P_c = k\ell/2$$



I diagrammi dell'EPT nei casi sottocritico, critico e sopracritico
 Questo tipo di biforcazione è detta *transcritica*.

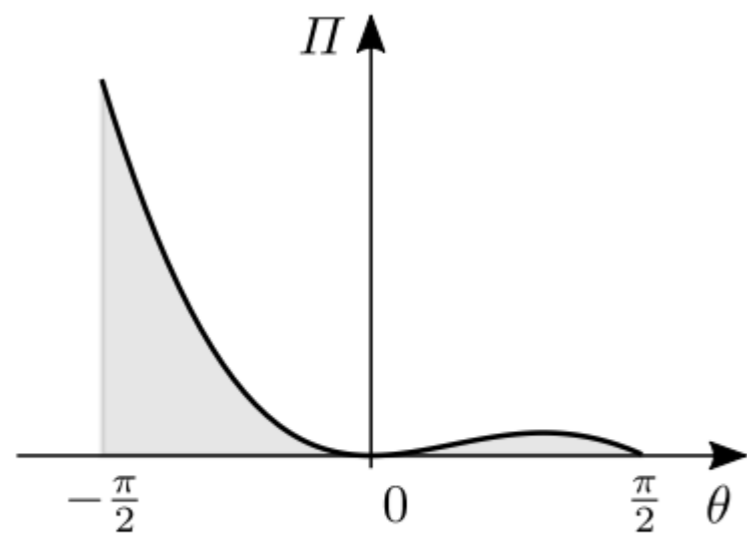
La stabilità può anche essere accertata dal segno di:

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = k\ell^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \theta} - \sin \theta \right) - P\ell \cos \theta$$

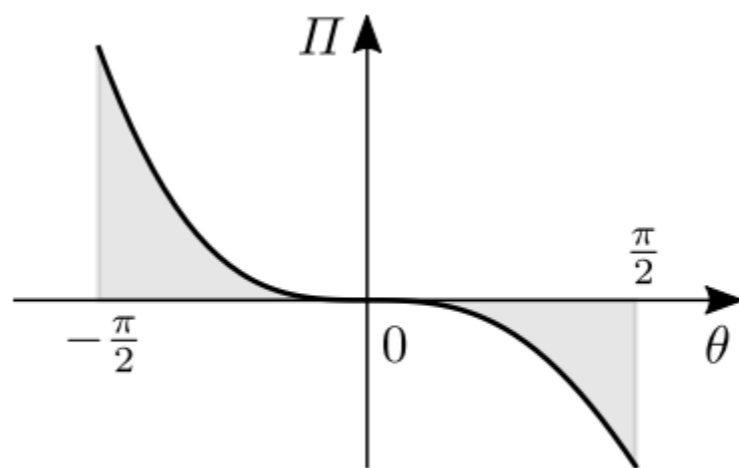
quando valutata sui due percorsi di equilibrio; si ha

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = \begin{cases} \frac{k\ell^2}{2} - P\ell \lesseqgtr 0 & \text{se } P \gtrless P_c \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = \begin{cases} k\ell^2 \frac{2 \sin \theta - 4\sqrt{1 + \sin \theta} + \cos(2\theta) + 3}{4 \sin \theta \sqrt{1 + \sin \theta}} \gtrless 0 & \text{se } \begin{cases} \theta \in (-\pi, 0) \\ \theta \in (0, \pi) \end{cases} \end{cases} \quad \text{(II)}$$



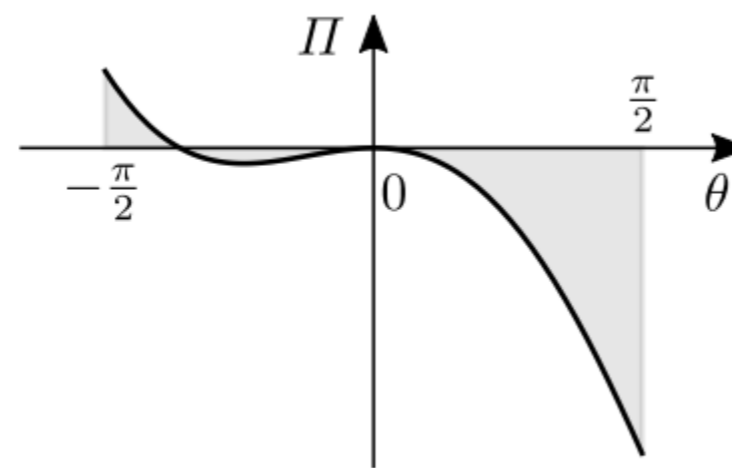
(b)



(c)

diagramma dell'EPT quando:

(b) $P < P_c$, (c) $P = P_c$, (d) $P > P_c$.



(d)

Analisi esatta del sistema imperfetto

Si introduce, quale imperfezione, una piccola deviazione angolare θ_0 del pendolo rovescio strallato. Conseguentemente, la lunghezza iniziale dello strallo è $a_0 := \sqrt{2} \ell \sqrt{1 + \sin \theta_0}$, e l'energia elastica $U = \frac{1}{2} k (a - a_0)^2$. L'EPT, dunque, si scrive:

$$\Pi = \ell^2 \left(\sqrt{1 + \sin \theta_0} - \sqrt{1 + \sin \theta} \right)^2 - P\ell (1 - \cos \theta) + P\ell (1 - \cos \theta_0)$$

Dalla stazionarietà $\frac{d\Pi}{d\theta} = 0$ si trae l'equazione di equilibrio:

$$k\ell \left(1 - \frac{\sqrt{1 + \sin \theta_0}}{\sqrt{1 + \sin \theta}} \right) \cos \theta - P \sin \theta = 0$$

che è soddisfatta dal percorso:

$$P = k\ell \frac{1}{\tan \theta} \left(1 - \frac{\sqrt{1 + \sin \theta_0}}{\sqrt{1 + \sin \theta}} \right)$$

Si vede che:

- se $\theta_0 < 0$, il ramo naturale è stabile e quello non naturale instabile; questi rami non presentano punti limite;
- se $\theta_0 > 0$, entrambi i rami sono costituiti da una porzione stabile ed una instabile, separate da un punto limite (la cui espressione è non riportata qui), superiore od inferiore.

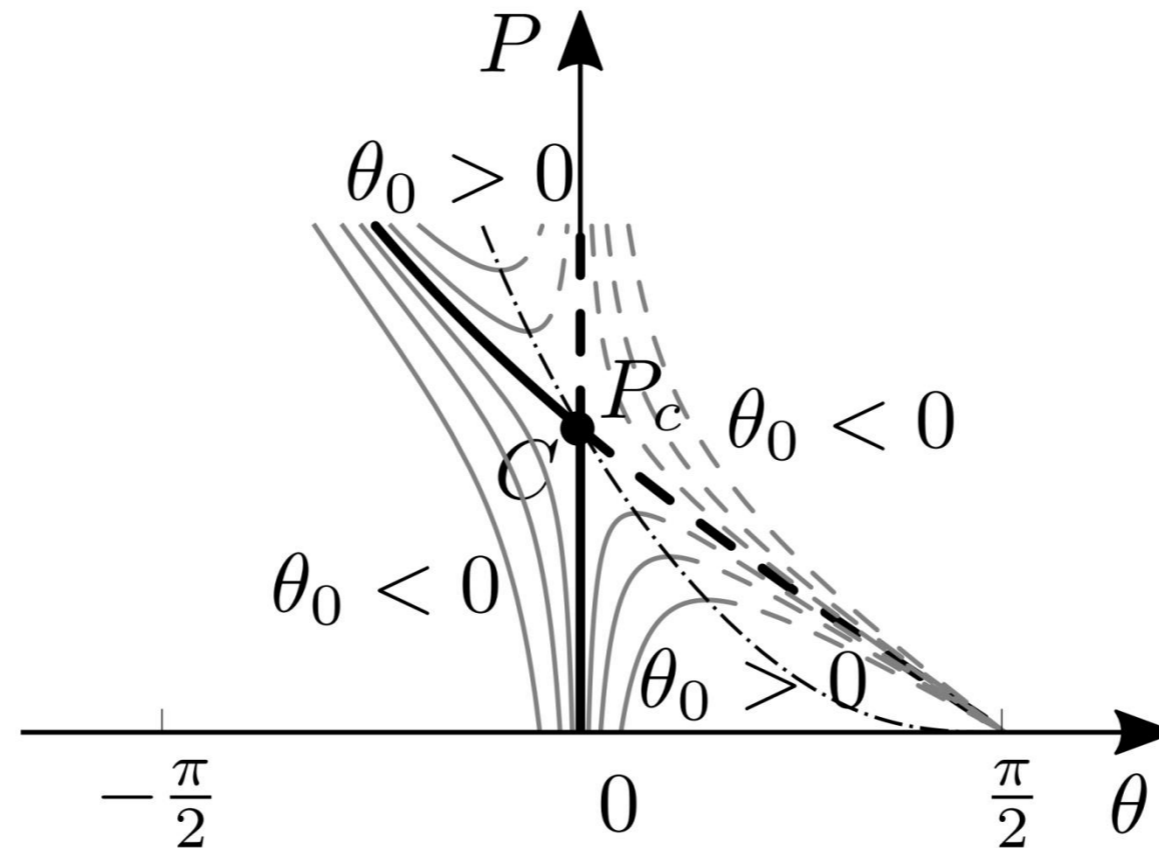
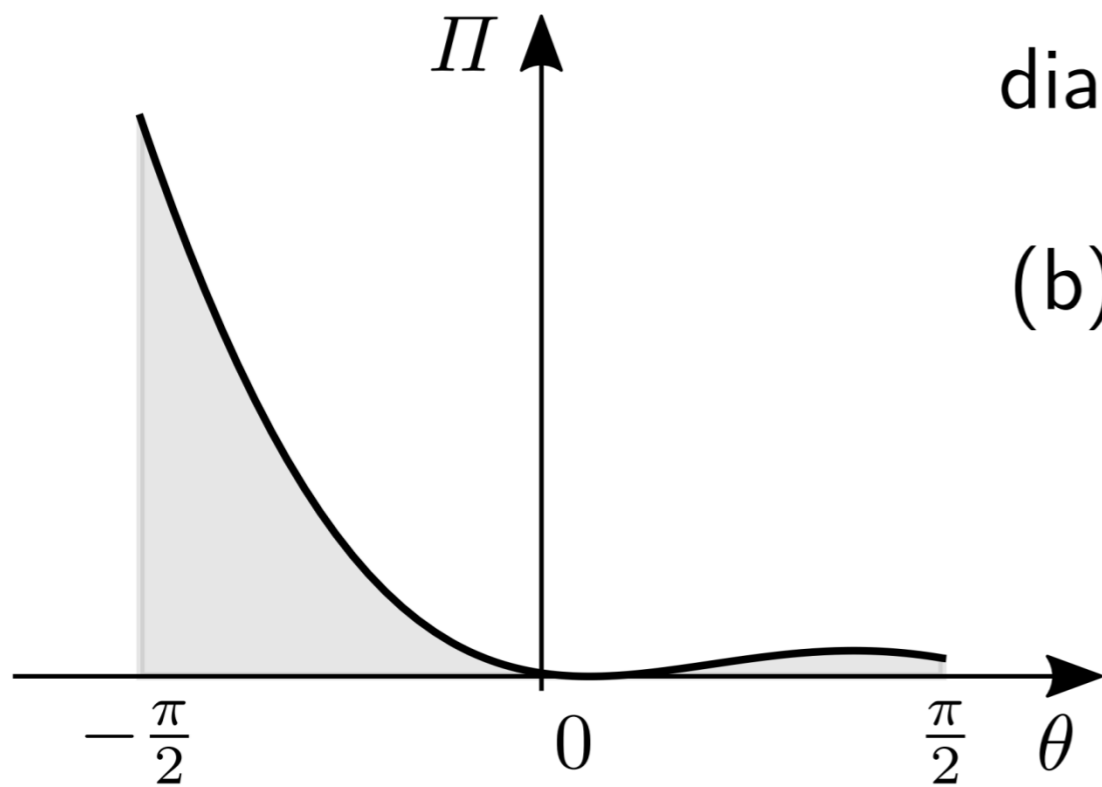
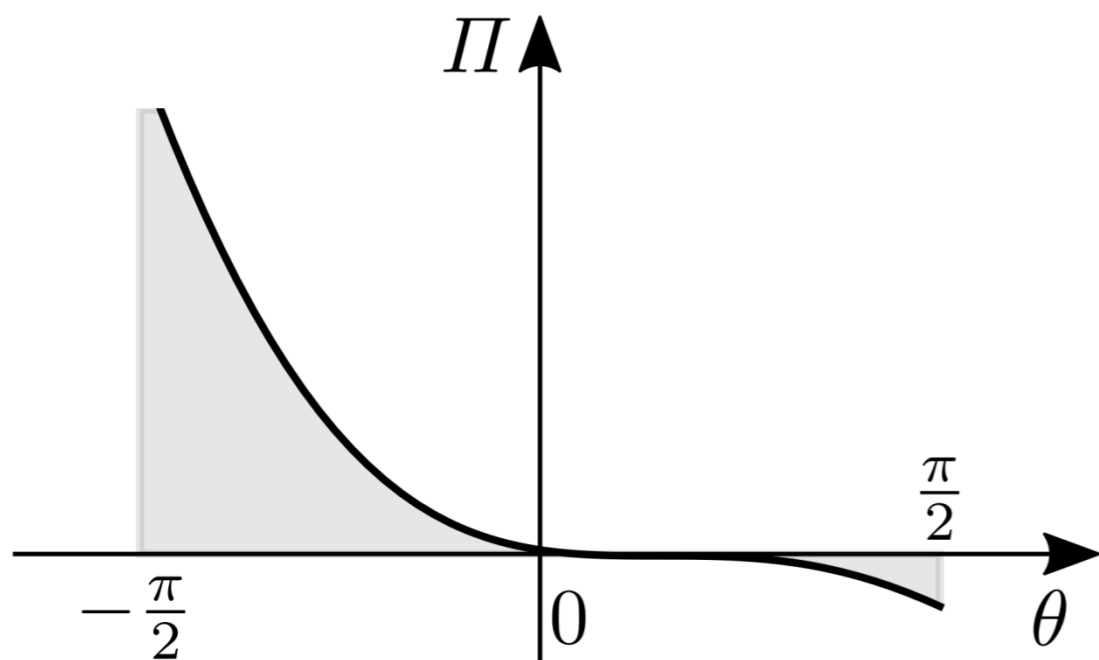


diagramma dell'EPT, per $\theta_0 > 0$, quando:

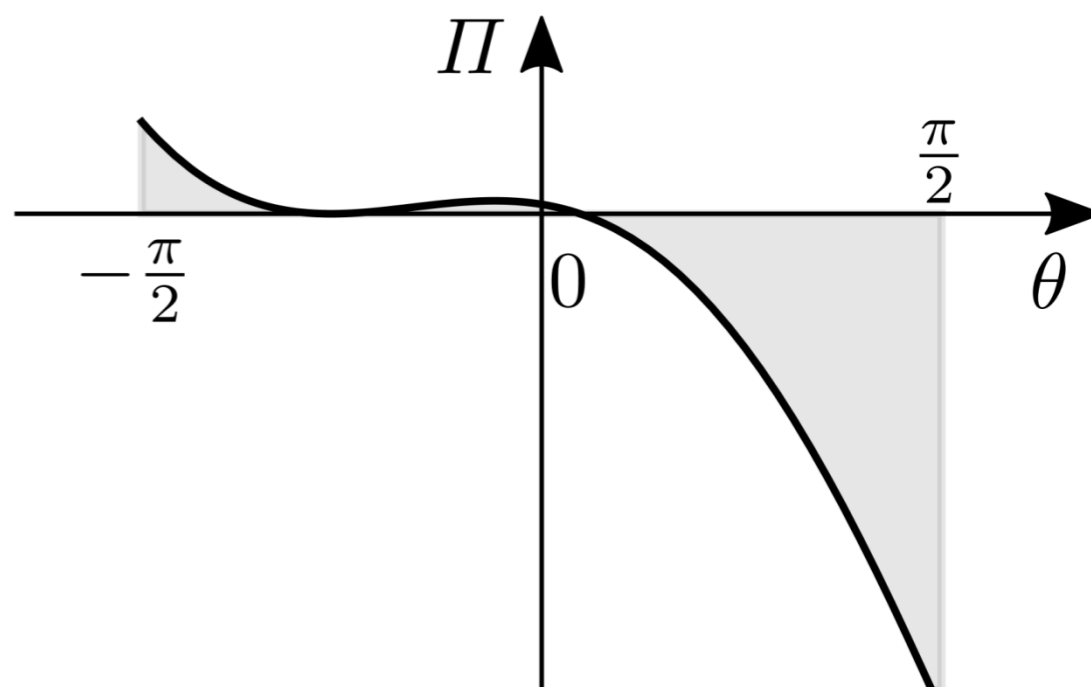
(b) $P < P_c$, (c) $P = P_c$, (d) $P > P_c$



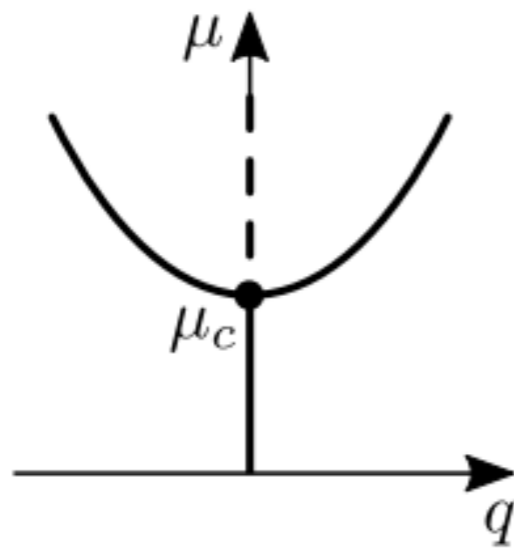
(b)



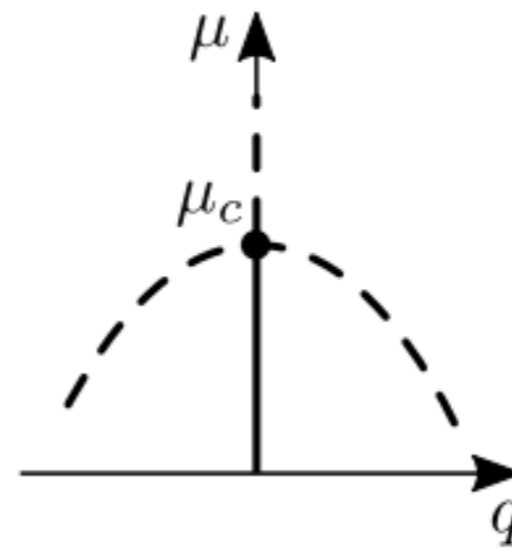
(c)



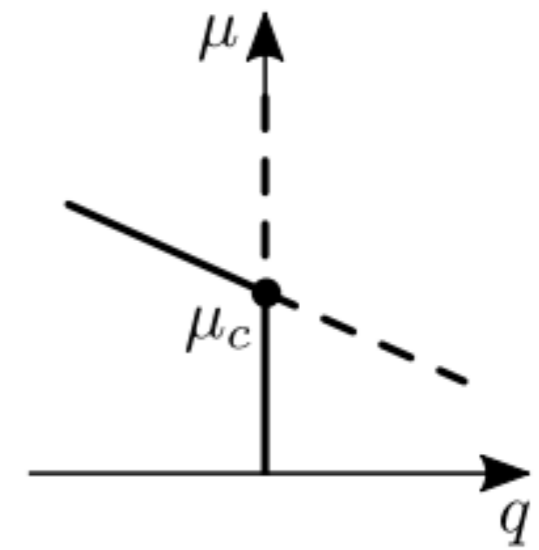
(d)



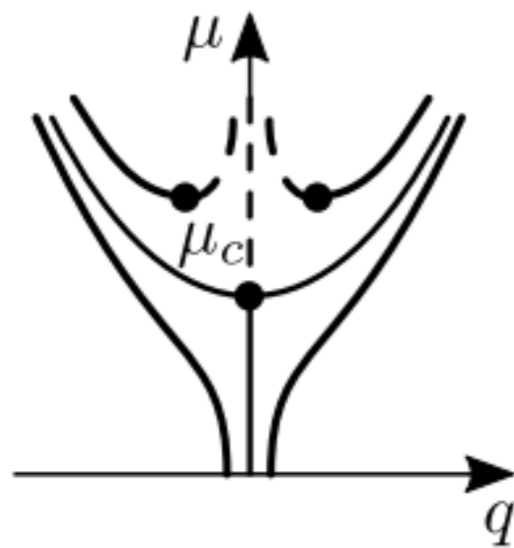
(a)



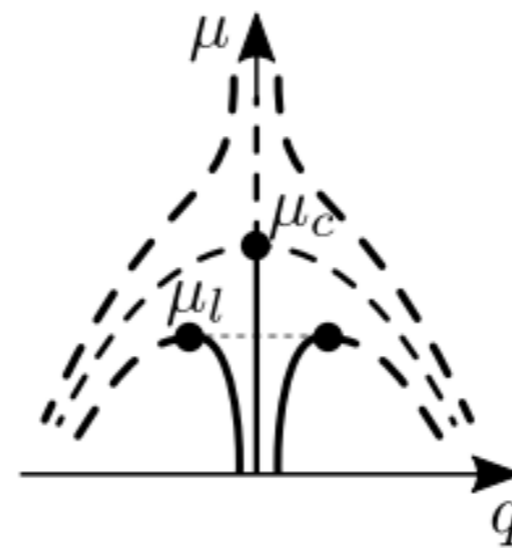
(b)



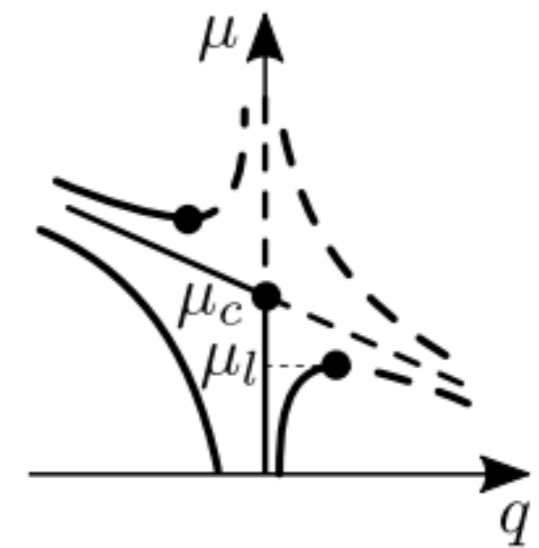
(c)



(d)



(e)



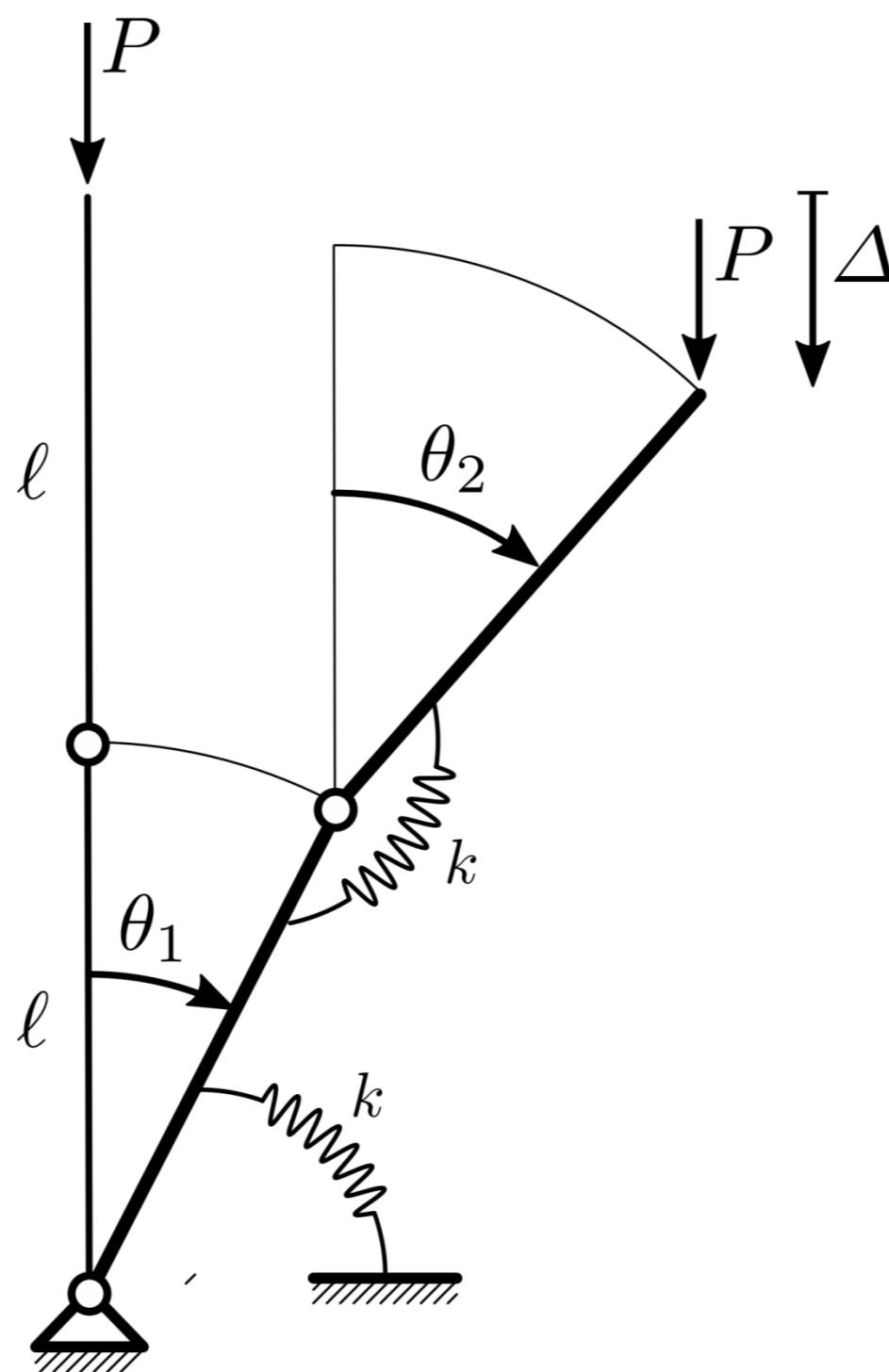
(f)

Figura Biforcazioni statiche: (a) forza stabile; (b) forza instabile; (c) transcritica; (d) forza stabile imperfetta; (e) forza instabile imperfetta; (e) transcritica imperfetta.



Sistemi a due gradi di libertà

Il bipendolo elastico rovescio



Il sistema è costituito da due aste rigide di lunghezza ℓ , incernierate mutualmente e alla base, dotato di molle elastiche torsionali di rigidezza k , soggetto ad una forza peso di intensità P

L'EPT si scrive:

$$\Pi = \frac{1}{2} k [\theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2] - P \Delta$$

In essa, i primi due termini rappresentano l'energia potenziale elastica della molla inferiore e superiore, che subiscono rispettivamente torsione θ_1 e $\theta_2 - \theta_1$; il terzo termine è l'energia potenziale gravitazionale, dove:

$$\Delta = \ell (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

è l'abbassamento dell'estremo libero del bispendolo. In vista di una soluzione perturbativa, si sviluppa l'EPT in serie di MacLaurin, fino ai termini di quarto grado, e si ottiene:

$$\Pi = \frac{1}{2} k [\theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2] - P\ell \left(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} - \frac{\theta_1^4}{24} - \frac{\theta_2^4}{24} \right)$$

L'equilibrio richiede che l'EPT sia stazionaria, e che dunque si annullino le sue derivate parziali rispetto ai parametri lagrangiani:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = k (2\theta_1 - \theta_2) - P\ell \left(\theta_1 - \frac{\theta_1^3}{6} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = k (\theta_2 - \theta_1) - P\ell \left(\theta_2 - \frac{\theta_2^3}{6} \right) = 0$$

In forma matriciale, le precedenti si scrivono:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \mu \begin{pmatrix} \theta_1^3 \\ \theta_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in cui si è introdotto, per comodità, il parametro adimensionale di carico:

$$\mu := \frac{P\ell}{k}$$

In essa si riconoscono, nell'ordine: la matrice di rigidezza elastica, la matrice di rigidezza geometrica e le nonlinearità (cubiche, perchè il sistema è simmetrico).



Il bipendolo ammette il percorso banale (I), di equazioni parametriche $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0 \forall \mu$, ad indicare che la configurazione rettilinea è di equilibrio qualunque sia l'intensità della forza. Si esegue un'analisi di biforcazione dal percorso banale, che consiste: (a) nel cercare lungo di esso, un punto di biforcazione C , di coordinate $(\theta_1, \theta_2, \mu) = (0, 0, \mu_c)$, con μ_c carico critico; (b) nel costruire, nell'intorno della biforcazione, un altro percorso di equilibrio (II) che si diparte da C .

Si descrive il percorso diramato nella forma parametrica $\theta_1 = \theta_1(\epsilon)$, $\theta_2 = \theta_2(\epsilon)$, $\mu = \mu(\epsilon)$, dove ϵ è un parametro che si annulla in C , e si sviluppano in serie tali equazioni per ϵ piccolo:

$$\theta_i = \epsilon\theta_{i1} + \epsilon^2\theta_{i2} + \epsilon^3\theta_{i3} + \dots, \quad i = 1, 2$$

$$\mu = \mu_c + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2 + \dots$$

L'analisi risulta semplificata se si sfruttano a priori le proprietà di simmetria del sistema, che richiedono l'annullarsi di alcune potenze di ϵ nelle precedenti serie. Precisamente:

- nelle serie $\theta_i(\epsilon)$ sono diverse da zero le sole potenze dispari;
- nella serie $\mu(\epsilon)$ sono diverse da zero le sole potenze pari.

$$\theta_i = \epsilon\theta_{i1} + \epsilon^3\theta_{i3} + \dots, \quad i = 1, 2$$

$$\mu = \mu_c + \epsilon^2\mu_2 + \dots$$

Il carico e modo critico

- Ordine ϵ :

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \mu_c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le equazioni perturbative di ordine ϵ , costituiscono un problema omogeneo agli autovalori nel parametro di carico μ . La relativa equazione caratteristica si ottiene annullando il determinante della matrice di rigidezza totale:

$$\begin{vmatrix} 2 - \mu_c & -1 \\ -1 & 1 - \mu_c \end{vmatrix} = (2 - \mu_c)(1 - \mu_c) + 1 = 0$$

da cui, risolvendo, si traggono *due* carichi critici:

$$\mu_{c1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \simeq 0.382$$

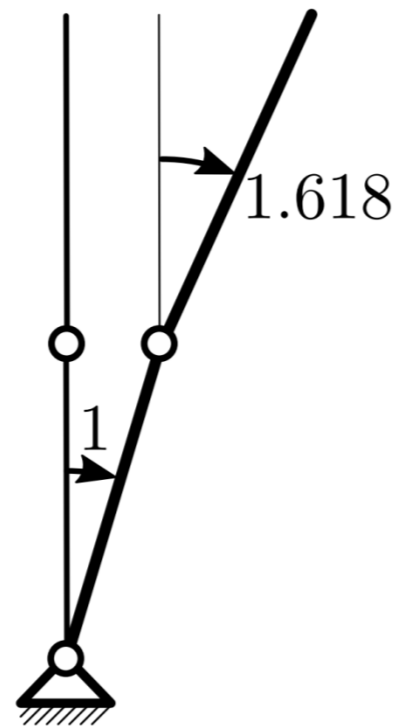
$$\mu_{c2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \simeq 2.618$$

ognuno associato ad un diverso punto di biforcazione. Il più piccolo dei due, $\mu_c := \mu_{c1}$ è detto (primo) carico critico.

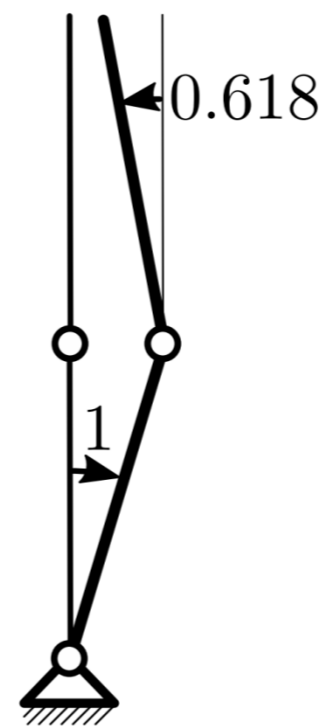
Sostituendo ordinatamente le radici trovate nel problema agli autovalori, e risolvendo, si ha:

$$\begin{bmatrix} 2 - \mu_{c1} & -1 \\ -1 & 1 - \mu_{c1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.618 \end{pmatrix} =: \mathbf{u}_{c1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \mu_{c2} & -1 \\ -1 & 1 - \mu_{c2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.618 \end{pmatrix} =: \mathbf{u}_{c2}$$

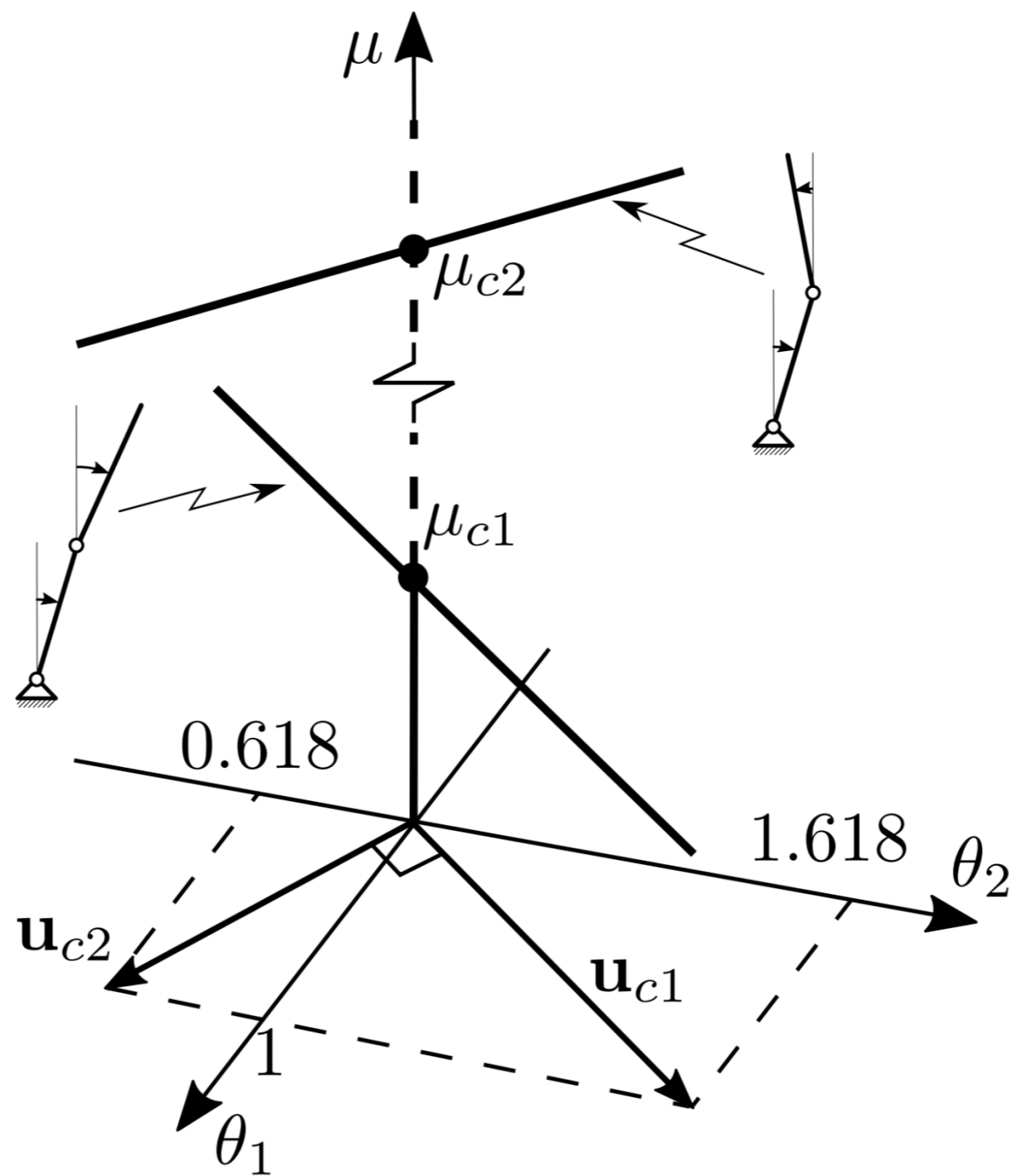


(a)



(b)

Primo (a) e secondo (b) modo critico del bipendolo elastico rovescio.



Tangenti ai percorsi diramati nel primo e secondo punto di biforcazione.

Il percorso diramato

- Ordine ϵ^3 :

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \mu_c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\mu_c \begin{pmatrix} \theta_{11}^3 \\ \theta_{21}^3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix}$$

Si costruisce ora il percorso diramato che passa per il punto di biforcazione più basso. La procedura, ovviamente, può essere ripetuta per il secondo. Sostituendo $\mu_c = 0.382$ e $(\theta_{11}, \theta_{21}) = (1, 1.618)$ nelle equazioni perturbative di ordine ϵ^3 , queste ultime si scrivono:

$$\begin{bmatrix} 2 - 0.382 & -1 \\ -1 & 1 - 0.382 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} = -\frac{0.382}{6} \begin{pmatrix} 1^3 \\ 1.618^3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1.618 \end{pmatrix}$$

Il problema si pone nella forma: $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ con \mathbf{A} singolare, cosicché il problema è generalmente non compatibile, a meno che μ_2 , ancora incognito, non assuma un particolare valore. Per determinarlo, si impone la *condizione di solvibilità*, che richiede che il termine noto sia ortogonale a tutte le soluzioni del problema omogeneo trasposto. Nel problema in esame (in cui il problema omogeneo trasposto ammette la sola soluzione \mathbf{u}_{c1}), la solvibilità richiede che sia:

$$\left(1, 1.618 \right) \left(-\frac{0.382}{6} 1.618^3 + 1.618\mu_2 \right) = 0$$

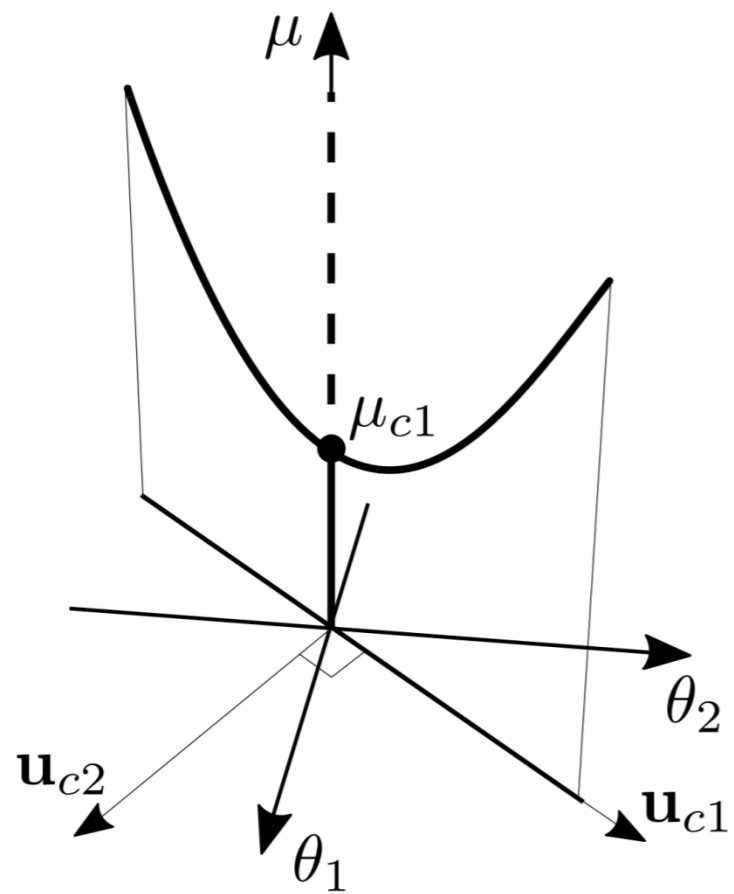
da cui si trae $\mu_2 = 0.138$. Poiché $\mu_2 > 0$, la biforcazione è a *forca stabile*.

Troncando l'analisi a questo ordine, il percorso diramato si scrive, in forma parametrica:

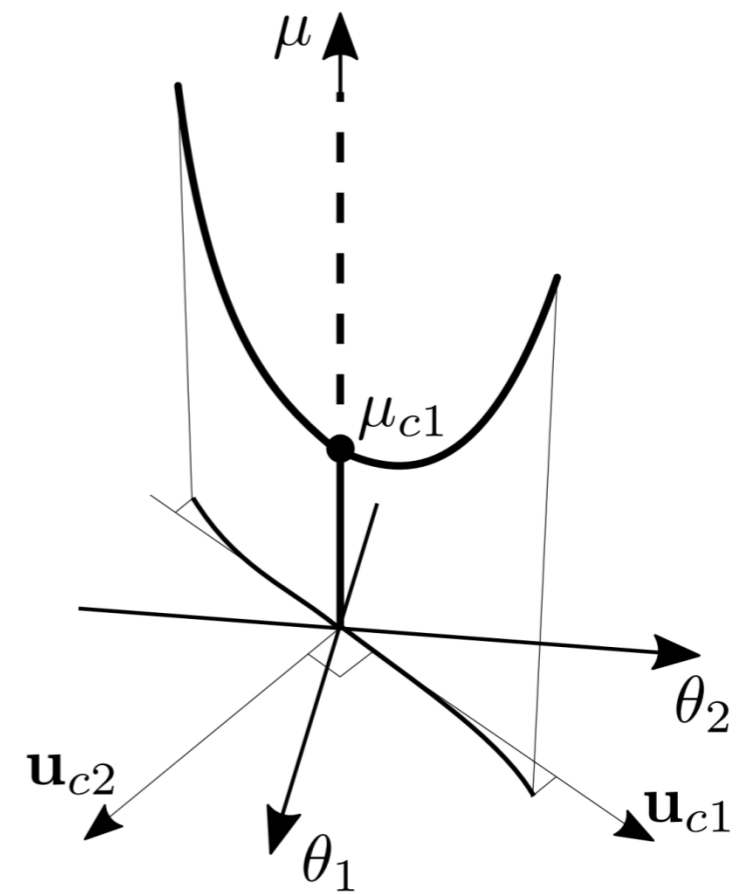
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} &= \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1.618 \end{pmatrix} \\ \mu &= 0.382 + 0.138 \epsilon^2 \end{aligned}$$

ovvero, nella forma cartesiana $\theta_i = \theta_i(\mu)$:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \pm \sqrt{\frac{\mu - 0.382}{0.138}} \\ \theta_2 &= \pm 1.618 \sqrt{\frac{\mu - 0.382}{0.138}} \end{aligned}$$



(a)



(b)

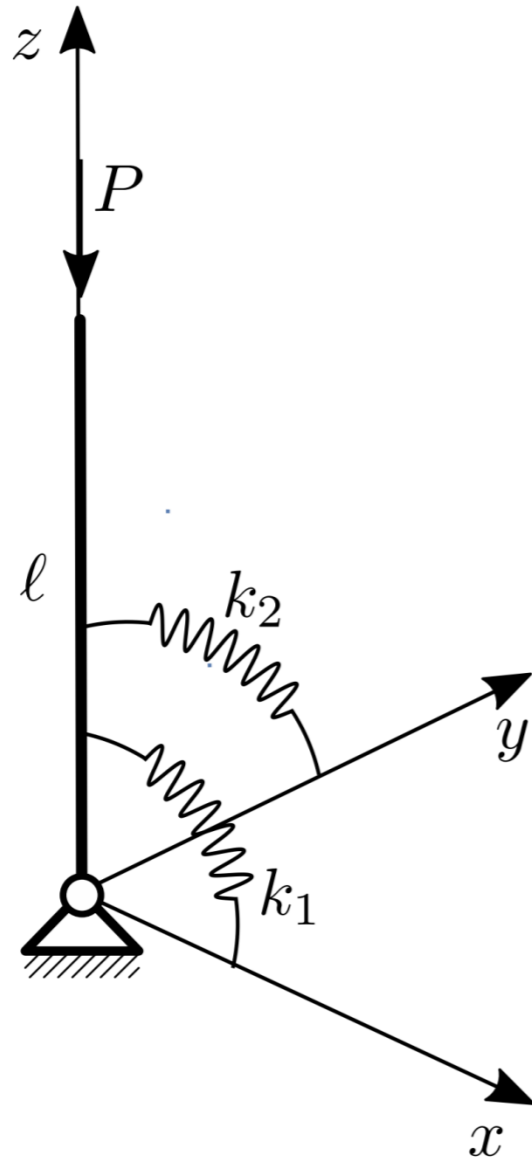
Percorso diramato del bipendolo elastico, senza (a) o con (b) modifica della deformata.

Il pendolo elastico rovescio sferico

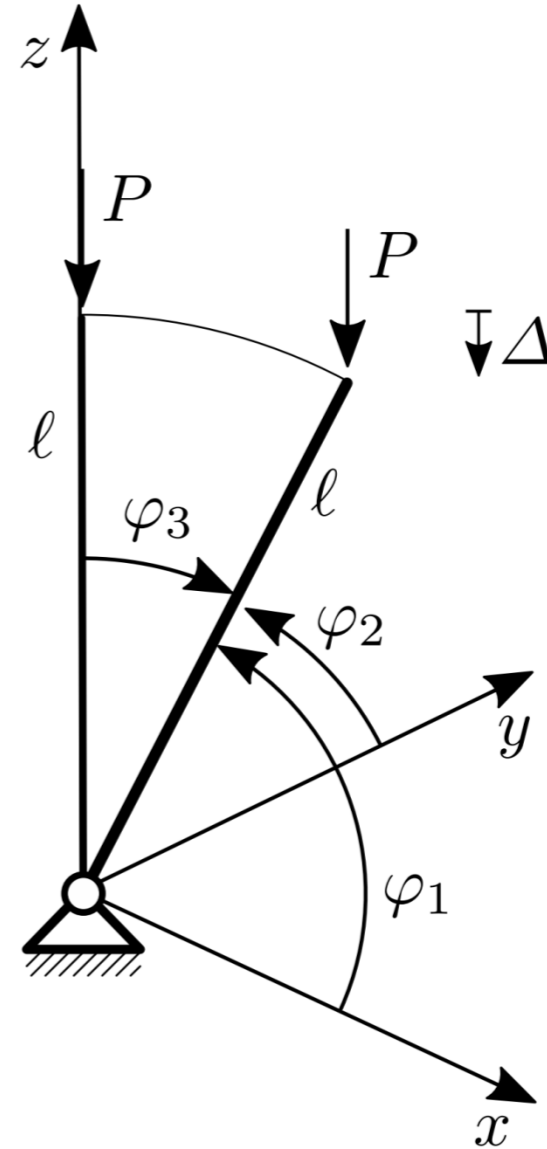
È frequente incontrare nelle applicazioni sistemi a più gradi di libertà che esibiscono carichi critici distinti $\mu_{c1} < \mu_{c2} < \dots$. In queste circostanze, il primo modo critico u_{c1} è attivo (dà cioè il maggior contributo alla risposta del sistema), ed i successivi, u_{c2}, u_{c3}, \dots , sono passivi (danno cioè piccole correzioni). Esistono tuttavia situazioni in cui, specialmente per particolari simmetrie, i primi due (o più) carichi critici coincidono (o sono molto vicini), cioè *il carico critico è una radice multipla* dell'equazione caratteristica del problema agli autovalori. Un esempio è offerto dalla trave di Eulero immersa nello spazio 3D, quando questa abbia uguali rigidezze ed uguali vincoli nei due piani principali d'inerzia. Si vedrà tra breve che, in caso di autovalore multiplo, *più percorsi di equilibrio* (e non solo uno) intersecano il percorso fondamentale nel punto di biforcazione.

Si consideri un pendolo rovescio sferico, costituito da un asta rigida di lunghezza ℓ immersa nello spazio 3D, orientata nella configurazione iniziale come l'asse z , e vincolata al suolo mediante una cerniera sferica e molle torsionali di rigidezza k_1, k_2 , che nella condizione di riposo giacciono rispettivamente nei piani (x, z) ed (y, z) . L'asta sia soggetta ad una forza peso P .

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1$$



(a)



(b)

Pendolo elastico rovescio sferico: (a) configurazione di riferimento, (b) configurazione attuale.

Si scelgono come parametri
lagrangiani gli angoli θ_1, θ_2 , definiti come:

$$\theta_1 := \frac{\pi}{2} - \varphi_1$$
$$\theta_2 := \frac{\pi}{2} - \varphi_2$$

L'energia potenziale totale del sistema si scrive:

$$\Pi = \frac{1}{2} (k_1 \theta_1^2 + k_2 \theta_2^2) - P \Delta$$

in cui Δ è l'abbassamento dell'estremo libero dell'asta, che si scrive:

$$\Delta = \ell (1 - \cos \varphi_3) = \ell \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_2} \right)$$

avendo osservato che $\cos \varphi_1 = \sin \theta_1$ e $\cos \varphi_2 = \sin \theta_2$. Sviluppando fino ai termini di quarto grado, si ha:

$$\Pi = \frac{1}{2} (k_1 \theta_1^2 + k_2 \theta_2^2) - P\ell \left(\frac{1}{2} \theta_1^2 + \frac{1}{2} \theta_2^2 + \frac{1}{4} \theta_1^2 \theta_2^2 - \frac{1}{24} \theta_1^4 - \frac{1}{24} \theta_2^4 \right)$$

Dalla stazionarietà si ricavano le equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = (k_1 - P\ell) \theta_1 + P\ell \left(\frac{1}{6} \theta_1^3 - \frac{1}{2} \theta_1 \theta_2^2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = (k_2 - P\ell) \theta_2 + P\ell \left(\frac{1}{6} \theta_2^3 - \frac{1}{2} \theta_1^2 \theta_2 \right) = 0$$

L'analisi linearizzata di biforcazione

Le equazioni di equilibrio ammettono la soluzione $\theta_1 = \theta_2 = 0 \forall \mu$, che costituisce il percorso di equilibrio banale. Se si è interessati alla determinazione del solo carico critico, le equazioni si possono linearizzare, per fornire:

$$\begin{bmatrix} k_1 - P\ell & 0 \\ 0 & k_2 - P\ell \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La relativa equazione caratteristica:

$$(k_1 - P\ell)(k_2 - P\ell) = 0$$

ammette le due radici:

$$P_{c1} = \frac{k_1}{\ell}, \quad P_{c2} = \frac{k_2}{\ell}$$

associate rispettivamente ai modi critici:

$$\mathbf{u}_{c1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_{c2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che descrivono l'inflessione del pendolo, rispettivamente nel piano (x, z) e (y, z) .

Se $k_1 \neq k_2$, i due carichi critici sono distinti, ed il (primo) carico critico è il più piccolo dei due, $P_c := \min(P_{c1}, P_{c2})$. Corrispondentemente, *il pendolo si inflette nel piano di minore rigidità*, si comporta cioè come un pendolo piano.

Se, tuttavia, $k_1 = k_2$, i due carichi critici sono coincidenti, cioè P_c è una radice doppia dell'equazione caratteristica. In questo caso, *ogni combinazione lineare di $\mathbf{u}_{c1}, \mathbf{u}_{c2}$ è ancora un autovettore*:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = a_1 \mathbf{u}_{c1} + a_2 \mathbf{u}_{c2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \forall (a_1, a_2)$$

I due modi critici sono detti *simultanei*, perché si manifestano insieme, sotto il medesimo carico.

L'analisi di biforcazione nel caso degenere

Poiché si è interessati a studiare il fenomeno dei modi simultanei, d'ora in avanti si assumerà $k_1 = k_2 = k$. Le equazioni di equilibrio si riscrivono dunque:

$$\begin{bmatrix} 1 - \mu & 0 \\ 0 & 1 - \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\theta_1^3 - \frac{1}{2}\theta_1\theta_2^2 \\ \frac{1}{6}\theta_2^3 - \frac{1}{2}\theta_1^2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove si è introdotto il parametro di carico:

$$\mu := \frac{P\ell}{k}$$

Si cerca il valore critico del carico per il quale si ha biforcazione statica ed i percorsi di equilibrio che da esso si diramano. In accordo al metodo perturbativo, si scrivono le equazioni parametriche del percorso diramato nella forma di sviluppi in serie. Tenuto conto che il sistema ha comportamento simmetrico, queste assumono la forma:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} + \epsilon^3 \begin{pmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} + \dots$$

$$\mu = \mu_c + \epsilon^2 \mu_2 + \dots$$

- Ordine ϵ :

$$\begin{bmatrix} 1 - \mu_c & 0 \\ 0 & 1 - \mu_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_c = 1$$

La soluzione delle equazioni perturbative

e la soluzione (indeterminata):

$$\begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \forall (a_1, a_2)$$

- Ordine ϵ^3 :

$$\begin{bmatrix} 1 - \mu_c & 0 \\ 0 & 1 - \mu_c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} = \mu_2 \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix} + \mu_c \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\theta_{11}^3 + \frac{1}{2}\theta_{11}\theta_{21}^2 \\ -\frac{1}{6}\theta_{21}^3 + \frac{1}{2}\theta_{11}^2\theta_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{13} \\ \theta_{23} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left[\mu_2 + \left(-\frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 \right) \right] a_1 \\ \left[\mu_2 + \left(-\frac{1}{6}a_2^2 + \frac{1}{2}a_1^2 \right) \right] a_2 \end{pmatrix}}_{=:b}$$

Questo è un problema iper-singolare, in quanto la matrice a primo membro è due volte singolare (ha rango 0). Poiché il problema omogeneo trasposto ammette due soluzioni indipendenti, \mathbf{u}_{c1} ed \mathbf{u}_{c2} , affinché il sistema di equazioni ammetta soluzione, il termine 'noto' \mathbf{b} deve essere ortogonale ad *entrambe* queste soluzioni, deve cioè essere $\mathbf{u}_{c1}^T \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{u}_{c2}^T \mathbf{b} = 0$, ovvero:

$$\begin{aligned} \left[\mu_2 + \left(-\frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{2}a_2^2 \right) \right] a_1 &= 0 \\ \left[\mu_2 + \left(-\frac{1}{6}a_2^2 + \frac{1}{2}a_1^2 \right) \right] a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Procedendo per ispezione, si trovano le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} (\text{T}) : \quad a_1 &= a_2 = 0, \quad \forall \mu_2 \\ (\text{MM}_1) : \quad a_2 &= 0, \quad \mu = \frac{1}{6}a_1^2 \\ (\text{MM}_2) : \quad a_1 &= 0, \quad \mu = \frac{1}{6}a_2^2 \\ (\text{BM}_1) : \quad a_1 &= a_2, \quad \mu = -\frac{1}{3}a_2^2 \\ (\text{BM}_2) : \quad a_1 &= -a_2, \quad \mu = -\frac{1}{3}a_2^2 \end{aligned}$$

La soluzione (T) (trivial), è quella banale. Le soluzioni (MM) sono dette *monomodali*, perché ad esse partecipa un solo modo critico; corrispondono ad uno sbandamento del pendolo in una delle due direzioni principali. Le soluzioni (BM) sono dette *bi-modali*, perché entrambi i modi critici contribuiscono alla deformata incipiente.

$$a_1 = 1 \quad \text{su} \quad (\text{MM}_1), (\text{BM}_1), (\text{BM}_2)$$

$$a_2 = 1 \quad \text{su} \quad (\text{MM}_2)$$

Si ottengono così i seguenti percorsi in forma parametrica:

$$(\text{T}) : \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \forall \mu$$

$$(\text{MM}_1) : \quad \theta_1 = \epsilon, \quad \theta_2 = 0, \quad \mu = \left(1 + \frac{1}{6}\epsilon^2\right)$$

$$(\text{MM}_2) : \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \epsilon, \quad \mu = \left(1 + \frac{1}{6}\epsilon^2\right)$$

$$(\text{BM}_1) : \quad \theta_1 = \epsilon, \quad \theta_2 = \epsilon, \quad \mu = \left(1 - \frac{1}{3}\epsilon^2\right)$$

$$(\text{BM}_2) : \quad \theta_1 = \epsilon, \quad \theta_2 = -\epsilon, \quad \mu = \left(1 - \frac{1}{3}\epsilon^2\right)$$

ovvero, in forma cartesiana:

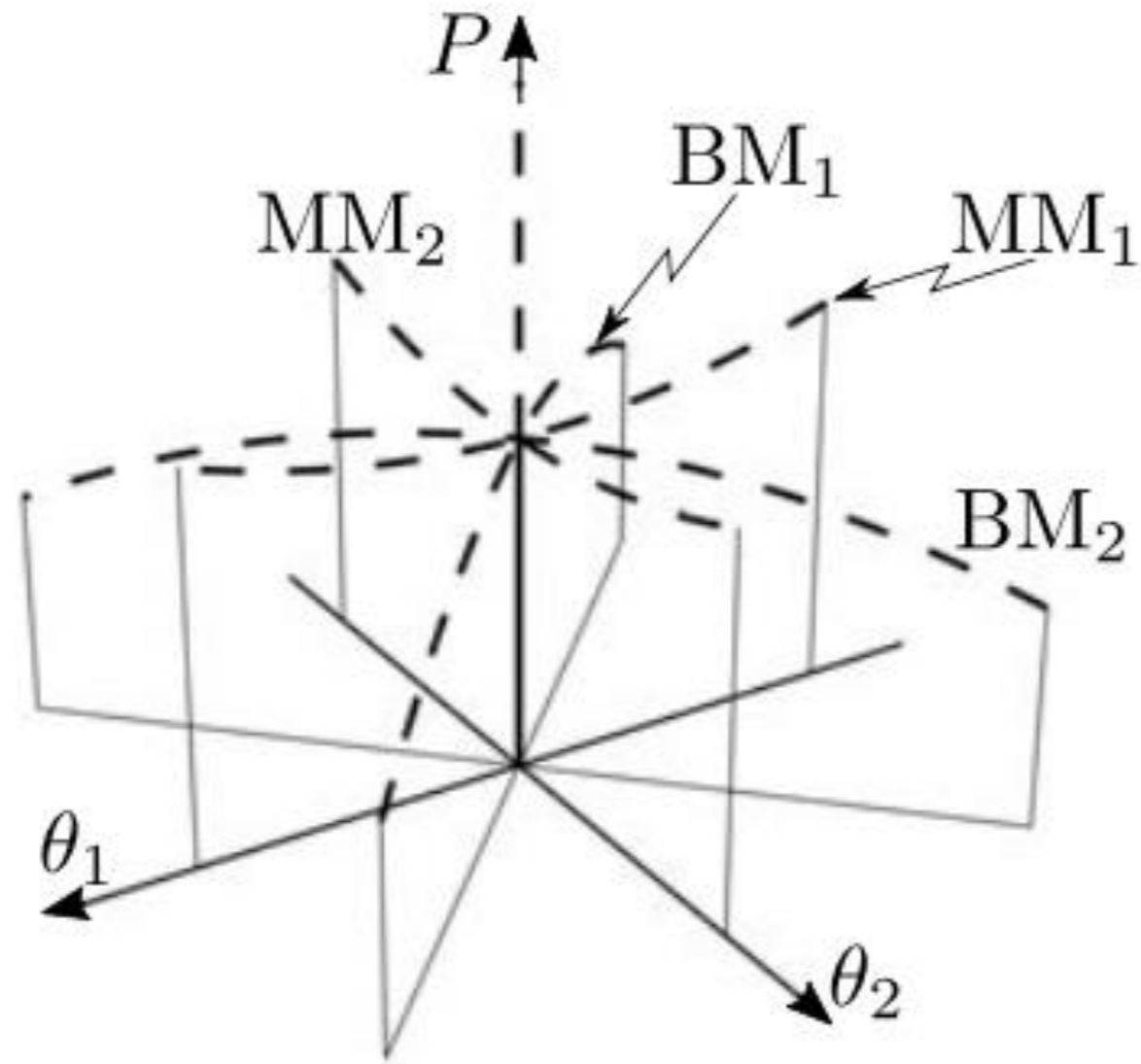
$$(\text{T}) : \quad \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad \forall \mu$$

$$(\text{MM}_1) : \quad \theta_2 = 0, \quad \mu = \left(1 + \frac{1}{6}\theta_1^2\right)$$

$$(\text{MM}_2) : \quad \theta_1 = 0, \quad \mu = \left(1 + \frac{1}{6}\theta_2^2\right)$$

$$(\text{BM}_1) : \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \mu = \left(1 - \frac{1}{3}\theta_1^2\right)$$

$$(\text{BM}_2) : \quad \theta_1 = -\theta_2, \quad \mu = \left(1 - \frac{1}{3}\theta_1^2\right)$$



La stabilità dei percorsi diramati

Per analizzare la stabilità dei quattro percorsi diramati occorre studiare la definitezza dell'EPT sul singolo percorso.

La matrice Hessiana, per il sistema allo studio, si scrive:

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 - \mu + \frac{\mu}{2} (\theta_1^2 - \theta_2^2) & -\mu \theta_1 \theta_2 \\ -\mu \theta_1 \theta_2 & 1 - \mu + \frac{\mu}{2} (\theta_2^2 - \theta_1^2) \end{bmatrix}$$

- Sul percorso (T):

$$\mathbf{H}|_{(T)} = k \begin{bmatrix} 1 - \mu & 0 \\ 0 & 1 - \mu \end{bmatrix}$$

da cui $\Lambda_1 = \Lambda_2 = k(1 - \mu)$. Quindi il percorso banale è stabile se $\mu < \mu_c = 1$ ed instabile se $\mu > \mu_c$.

- Sul percorso (MM₁):

$$\mathbf{H}|_{(MM_1)} = k \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \theta_1^2 (4 + \theta_1^2) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} \theta_1^2 (8 + \theta_1^2) \end{bmatrix}$$

da cui: $\Lambda_1 = \frac{1}{12} k \theta_1^2 (4 + \theta_1^2)$, $\Lambda_2 = -\frac{1}{12} k \theta_1^2 (8 + \theta_1^2)$. Poiché $\Lambda_2 < 0, \forall \theta_1$, il percorso è instabile.

- Sul percorso (MM₂):

$$\mathbf{H}|_{(MM_2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}k\theta_1^2(8 + \theta_2^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}k\theta_1^2(4 + \theta_2^2) \end{bmatrix}$$

da cui: $\Lambda_1 = -\frac{1}{12}k\theta_1^2(8 + \theta_2^2)$, $\Lambda_2 = \frac{1}{12}k\theta_1^2(4 + \theta_2^2)$. Poiché $\Lambda_1 < 0, \forall \theta_2$, il percorso è instabile.

- Sul percorso (BM₁):

$$\mathbf{H}|_{(BM_1)} = k \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\theta_2^2 & -\frac{1}{6}(6 + \theta_2^2)\theta_2^2 \\ -\frac{1}{6}(6 + \theta_2^2)\theta_2^2 & -\frac{1}{6}\theta_2^2 \end{bmatrix}$$

da cui: $\Lambda_1 = -\frac{1}{6}k\theta_2^2(7 + \theta_2^2)$, $\Lambda_2 = \frac{1}{6}k\theta_2^2(5 + \theta_2^2)$. Poiché $\Lambda_1 < 0, \forall \theta_2$, il percorso è instabile.

- Sul percorso (BM₂):

$$\mathbf{H}|_{(BM_2)} = k \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\theta_2^2 & \frac{1}{6}(6 + \theta_2^2)\theta_2^2 \\ \frac{1}{6}(6 + \theta_2^2)\theta_2^2 & -\frac{1}{6}\theta_2^2 \end{bmatrix}$$

da cui: $\Lambda_1 = -\frac{1}{6}k\theta_2^2(7 + \theta_2^2)$, $\Lambda_2 = \frac{1}{6}k\theta_2^2(5 + \theta_2^2)$. Poiché $\Lambda_1 < 0, \forall \theta_2$, il percorso è instabile.

In definitiva, *tutti e quattro i percorsi diramati sono instabili*, anche quelli sopra-critici (a concavità verso l'alto).