

## **Programma di Geometria 2** **A.A. 2021-2022**

Forme bilineari: definizione ed esempi. Matrice associata ad una forma bilineare rispetto ad una base. Matrici congruenti e rango di una forma bilineare. Forme quadratiche, forma bilineare polare, forma canonica, base diagonalizzante.

Spazi vettoriali euclidei. Esempi. Prodotto scalare, norma e proprietà della norma. Distanza fra punti e angolo tra vettori. Basi ortogonali e basi ortonormali. Procedimento di Gram-Schmidt. Complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale. Proiezione ortogonale e proprietà. Endomorfismi simmetrici e forma quadratica associata. Proprietà e Teorema Spettrale. Trasformazioni ortogonali, esempi e proprietà. Forma equivalente del Teorema Spettrale (per le matrici simmetriche reali).

Spazi affini, definizione ed esempi. Coordinate affini e cambiamenti di coordinate. Sottospazi affini, giacitura, dimensione e codimensione. Intersezione di sottospazi affini e parallelismo. Rappresentazione di sottospazi affini: equazioni parametriche e cartesiane. Isomorfismo tra spazi affini. Traslazioni. Trasformazioni affini in coordinate con esempi.

Definizione di spazio affine euclideo e di distanza euclidea. Riferimenti cartesiani e coordinate cartesiane. Isometrie tra spazi affini euclidei. Caratterizzazione geometrica delle isometrie. Ortogonalità tra sottospazi affini.

Geometria del piano euclideo. Equazioni parametriche e equazione cartesiana di una retta. Retta per due punti distinti del piano. Mutua posizione di 2 rette del piano. Fasci di rette propri e impropri. Rappresentazioni di un piano dello spazio euclideo ordinario: equazioni parametriche e equazione cartesiana. Equazione normale di un piano. Prodotto vettoriale e prodotto misto: proprietà e significato geometrico. Equazione cartesiana di un piano per tre punti non allineati. Le rette nello spazio affine: equazioni parametriche e equazioni cartesiane. Mutua posizione di due piani e di una retta e un piano nello spazio Euclideo ordinario. Parallelismo e ortogonalità tra rette e piani dello spazio. Mutua posizione di due rette nello spazio ordinario. Rette complanari e rette sghembe. Definizione di distanza tra due sottospazi affini. Distanza di un punto da un sottospazio affine dello spazio euclideo n-dimensionale. Proiezione ortogonale di un punto su un sottospazio affine. Distanza di un punto da un iperpiano dello spazio euclideo n-dimensionale. Distanza tra due rette, tra due piani, e tra una retta e un piano. Definizione di punto medio di due punti. Simmetria centrale e simmetria ortogonale rispetto ad un iperpiano di uno spazio euclideo n-dimensionale. Fasci propri e impropri di piani. Definizione di retta orientata, coseni direttori e proprietà. Significato geometrico del coefficiente angolare di una retta. Angolo tra due piani orientati e non orientati. Definizione di angoli diedri. Angolo tra una retta e un piano orientati.

Definizione e rappresentazione analitica di una superficie sferica. Circonferenza per 3 punti non allineati e sfera per 4 punti non complanari. Equazioni di una

circonferenza in un piano qualunque dello spazio. Posizioni reciproche tra piano e sfera. Definizione di piano tangente ad una sfera in un suo punto. Intersezione di una sfera (o di una circonferenza) con una retta. Definizione di retta tangente ad una sfera. Equazioni equivalenti per il piano tangente ad una sfera e per la retta tangente ad una circonferenza del piano euclideo. Intersezione e mutua posizione di due circonferenze. Asse radicale di due circonferenze. Potenza di un punto rispetto ad una sfera. Piano radicale di due sfere non concentriche dello spazio euclideo ordinario. Definizione di fascio di circonferenze generato da circonferenze non concentriche, punti base, asse radiale e asse radicale del fascio. Retta tangente ad una circonferenza dello spazio ordinario. Parametrizzazione di una circonferenza del piano euclideo e di una sfera dello spazio euclideo ordinario.

Definizione di curva parametrizzata. Definizione e parametrizzazione di un cilindro. Cilindri circolari retti. Cilindri con generatrici parallele agli assi coordinati. Cilindro circoscritto ad una sfera dello spazio. Definizione di cono e parametrizzazione. Cono circolare con vertice nell'origine del sistema di riferimento cartesiano. Funzioni omogenee di grado  $k$  e relazione con i coni. Cono circoscritto ad una sfera.

Classificazione delle trasformazioni ortogonali di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione due e vettori invarianti. Classificazione delle isometrie del piano euclideo e punti fissi. Classificazione delle trasformazioni ortogonali di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione tre. Classificazione delle isometrie dello spazio euclideo tridimensionale.

Definizione di superficie di rotazione, meridiani, paralleli, curva profilo e asse di rotazione. Rappresentazioni di una superficie di rotazione. Superfici di rotazione attorno ad uno degli assi coordinati: equazione cartesiana e parametrizzazione. Esempi. Parametrizzazione ed equazione cartesiana di un cilindro circolare retto, di una sfera, di un cono rotondo di semi-apertura data e di un toro.

Ellisse e iperbole come luoghi geometrici. Descrizione unificata dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola. Equazione canoniche e parametrizzazioni. Quadriche di rotazione non degeneri e generalizzazione di tali equazioni. Superficie a sella.

Definizione generale di una conica del piano euclideo come equazione algebrica del secondo ordine. Invarianti euclidei di una conica e rango di una conica. Centro di simmetria di una conica e definizione di conica a centro. Classificazione e riduzione a forma canonica di una conica. Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

Definizione di una quadrica come equazione algebrica di secondo grado. Invarianti euclidei di una quadrica e rango di una quadrica. Centro di simmetria di una quadrica e definizione di quadrica a centro. Classificazione e riduzione a forma canonica delle quadriche. Assi di simmetria e piani di simmetria di una quadrica.