Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

17 febbraio 2022

Esercizio 1

Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ così definiti

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \text{ e } \ x_2 - x_4 = 0\}$$
$$W_2 = L\big((-2,1,1,1), (1,0,0,0)\big)$$

Stabilire se la somma $W_1 + W_2$ è diretta.

In caso affermativo si trovi una decomposizione unica di un vettore di $W_1 \oplus W_2$ come somma di un vettore di W_1 e di un vettore di W_2.

In caso negativo si trovi un vettore di $W_1 + W_2$ che ammette due decomposizioni diverse come somma di un vettore di W_1 e di un vettore di W_2.

Esercizio 2

Dato il seguente sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + (k-2)x_4 = k \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale

$$V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : b = c\right\}$$

e l'endomorfismo f di V definito da

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + kd & b \\ b & a + kd \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale.

a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f è un isomorfismo
b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f è diagonalizzabile e, in corrispondenza di tali valori di k, trovare una base di V formata da autovalori di f.