Esercizio 1

Dobbiamo capire se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$v \in W_1 \cap W_2 \iff v \in W_1 \wedge v \in W_2$

$\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : v = \lambda_1(-2,1,1,1) + \lambda_2(1,0,0,0)$

e $v \in W_2$

$\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : v = (-2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1)$ e

$v \in W_2$

$\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_2 = 0$

Conclusione: esistono vettori non nulli in $W_1 \cap W_2$.
Basta prendere un vettore $v = \lambda_1(-2,1,1,1) + \lambda_2(1,0,0,0)$
con $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$.

Quindi la somma <u>non</u> è diretta.

Per trovare un vettore in $W_1 + W_2$ che ammette due decomposizioni distinte, scegliamo un vettore non nullo in $W_1 \cap W_2$, per esempio

$v = (-2, 1, 1, 1)$.

Tale vettore ammette le seguenti decomposizioni:

$$(-2, 1, 1, 1) = \underset{\in W_1}{(-2, 1, 1, 1)} + \underset{\in W_2}{(0, 0, 0, 0)}$$

$$= \underset{\in W_1}{(4, -2, -2, -2)} + \underset{\in W_2}{(-6, 3, 3, 3)}$$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + k x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + (k-2)x_4 = k \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & k-2 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & k-2 & k \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2$$

Controllo gli orlati di ordine 3:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$ (prima e seconda colonna proporzionali)

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & k-2 \end{pmatrix} = 0$$ perché III RIGA = I RIGA + 2 · II RIGA

Quindi $\rho(A) = 2$.

Riguardo $(A|B)$ sappiamo che $\rho(A|B) \geq 2$ dato che lo stesso minore di ordine 2 di A con $\det \neq 0$ è anche minore di $A|B$.

Controllo l'unico minore orlato di ordine 3 in A|B aggiuntivo rispetto a quelli già esaminati:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix} = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & k \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -(k-2) - 1$$

$$= -k + 1$$

Quindi per $k \neq 1$ $\rho(A|B) = 3$ e il sistema è incompatibile dato che $\rho(A|B) = 2$.

Quando $k = 1$ $\rho(A|B) = 2 = \rho(A)$ e il sistema è dunque compatibile e ammette ∞^2 soluzioni. In tal caso il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_2 = 1 - s - t \\ x_3 = -1 + t \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

L'insieme delle soluzioni è dunque

$$S = \{ (s, -1 + s + t, -1 + t, t) : s, t \in \mathbb{R} \}$$

ESERCIZIO 3

Trovo una base di V.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \Big)$$

I vettori v_1, v_2, v_3 sono lin. indipendenti.

Infatti:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V.

Troviamo la matrice $M_B(f)$ associata a f nella base B.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_3$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v_2$$

$$f(v_3) = f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k\, v_1 + k\, v_3$$

$$\Rightarrow \qquad A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

a) f è isomorfismo $\Leftrightarrow$ A è invertibile $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \neq 0$$

Ma $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Concludiamo che $\forall k \in \mathbb{R}$ f NON è un isomorfismo

b) $$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & k \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & k-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & k \\ 1 & k-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(k - \lambda - k\lambda + \lambda^2 - k)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - k\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda - 1 - k)$$

$$= 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 0 \vee \lambda = 1+k$$

Vi sono dunque i seguenti autovalori:

K	AUTOVALORI	MOLT. ALGEBRICA
$k \neq 0, -1$	0, 1, 1+k	1
$k=0$	0 1	1 2
$k=-1$	0 1	2 1

- Per $k \neq 0,-1$ f è diagonalizzabile perché ammette $3 = \dim V$ autovalori reali e distinti.

Troviamo gli autospazi.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in V(0) \iff f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x+kz & y \\ y & x+kz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + kz = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x = -ks \\ y = 0 \end{cases} \qquad z = s$$

Quindi: $V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} -ks & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in V(1) \iff f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x+kz & y \\ y & x+kz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x+kz = x \\ y = y \\ x+kz = z \end{cases} \iff \begin{cases} kz = 0 \\ x + (k-1)z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 1 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{k \neq 0}{\iff} z = 0, \quad x = 0 \quad y = s$$

Quindi: $V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in V(1+k) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = (1+k)\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+kz & y \\ y & x+kz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+k)x & (1+k)y \\ (1+k)y & (1+k)z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+kz = x+kx \\ y = y+ky \\ y = y+ky \\ x+kz = z+kz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x-z) = 0 \\ ky = 0 \\ x-z = 0 \end{cases}$$

$$\overset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} z = s \\ x = s \\ y = 0 \end{matrix} \qquad s \in \mathbb{R}$$

Quindi $V(1+k) = \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Allora una base di V formata da autovettori di f è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Per $k = 0$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in V(1) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+kz & y \\ y & x+kz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ x = z \end{cases} \Leftrightarrow \{ x - z = 0 \qquad \begin{matrix} y = s \\ z = t \end{matrix}$$

Allora $V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ s & t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow m_g(1) = \dim V(1) = 2 = m_a(1)$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z\end{pmatrix} \in V(0) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad z = s \in R$$

$$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix}0&0\\0&s\end{pmatrix} : s \in R \right\} = L\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Concludo che f è diagonalizzabile e una base di V formata da autovettori di f è $\left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$

- Per $k = -1$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z\end{pmatrix} \in V(0) \Leftrightarrow f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & z\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - z & y \\ y & x - z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = 0 \end{cases} \qquad z = s \in R$$

Allora $V(0) = \left\{ \begin{pmatrix}s&0\\0&s\end{pmatrix} : s \in R \right\} = L\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$m_g(0) = 1 \neq m_a(0) \Rightarrow f$ <u>non</u> è diagonalizzabile.