

Università di Cagliari  
Corso di Laurea in Matematica  
**Prova scritta di Geometria 1**  
20 gennaio 2022

**Esercizio 1**

Sia  $V$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Si trovi una base di  $V$ .

Si consideri l'applicazione lineare

$$f: V \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

tale che, per ogni  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_3 & x_3 - x_2 \\ x_2 - x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Trovare una base del nucleo di  $f$  e una base dell'immagine di  $f$

c) Trovare la matrice associata a  $f$  rispetto alla base  $B$  di  $V$ , trovata nel punto a), e alla base  $B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$  di  $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

**Esercizio 2**

Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 = k \\ kx_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro  $k \in \mathbb{R}$  il sistema è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

**Esercizio 3**

Si consideri lo spazio vettoriale

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

e l'endomorfismo di  $V$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1, -3x_1 + 4x_2 + 9x_3, 3x_3, -4x_2 - 12x_3).$$

Stabilire se  $f$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base di  $V$  formata da autovettori di  $f$ .