Università di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Geometria 1

3 febbraio 2022

Esercizio 1

Si consideri il seguente spazio vettoriale

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + b - c = 0 \right\}$$

e l'applicazione lineare $f: V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b, a + d, a + d).$$

a) Si trovi una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f

Si consideri inoltre l'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la cui matrice associata rispetto alle basi $B = \{(1,0,0), (0,1,1), (-1,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e $B' = \{(1,1), (0,-1)\}$ è

$$M_{BB'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Trovare $(g \circ f) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 2

Dato il seguente sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + kx_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = k \\ x_1 + kx_3 + kx_5 = k \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile ed in tali casi trovarne esplicitamente le soluzioni

Esercizio 3

Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (hx + y + z, y, y + 2z)$$

Stabilire, al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, se f è diagonalizzabile.