Esercizio 1

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c = a+b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & d \end{pmatrix} : a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,d \in \mathbb{R} \right\}$

$= L\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right)$

Si noti che v_1, v_2, v_3 sono lin. indipendenti perché

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di V.

Troviamo una base di $\ker(f)$.

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f(v)$

$= x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + x_3 f(v_3)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x_1 f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= x_1(1,1,1) + x_2(1,0,0) + x_3(0,1,1)$

$= (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ x_1 \qquad + x_3 = 0 \\ x_1 \qquad + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad = 0 \\ x_1 \qquad + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$x_1 = s \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -s \\ x_3 = -s \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{ s v_1 - s v_2 - s v_3 : s \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ s(v_1 - v_2 - v_3) : s \in \mathbb{R} \} \\ &= L(v_1 - v_2 - v_3) \\ &= L\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Una base di $\ker(f)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

Troviamo una base di $\mathrm{Im}(f)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= L(f(v_1), f(v_2), f(v_3)) \\ &= L((1,1,1), (1,0,0), (0,1,1)) \end{aligned}$$

Dato che $(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,1)$, una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(1,0,0), (0,1,1)\}$

b)

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$(g\circ f)\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\right) = g(2,1,1)$$

Esprimo $(2,1,1)$ come combinazione lineare della Base B di $\mathbb{R}^3$:

$$(2,1,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(-1,0,1)$$
$$= (\alpha-\gamma,\ \beta,\ \beta+\gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma = 2 \\ \beta = 1 \\ \beta+\gamma = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \longrightarrow \alpha = 2+\gamma = 2+0 = 2 \\ \\ \longrightarrow \gamma = 1-\beta = 1-1 = 0 \end{array}$$

Quindi $(2,1,1) = 2\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,1) + 0\cdot(-1,0,1)$

$$\Rightarrow (g\circ f)\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\right) = g(2,1,1)$$
$$= g(2\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,1))$$
$$= 2\cdot g(1,0,0) + 1\cdot g(0,1,1)$$
$$= 2(1\cdot(1,1) + 2\cdot(0,-1)) + 1\cdot(0\cdot(1,1) + 1\cdot(0,-1))$$
$$= 2(1,-1) + 1\cdot(0,-1)$$
$$= (2,-3)$$

Esercizio 2

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + kx_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = k \\ x_1 + kx_3 + kx_5 = k \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k & 0 & k \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k & 0 & k & k \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2$$

Consideriamo gli orlati:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = k(1-k) = 0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=1$$

Se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ $\rho(A) = 3 = \rho(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^2 soluzioni.

Se $k=0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = A^4$

$A^3 = A^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A|B)^6$

$\Rightarrow \rho(A) = 2 = \rho(A|B) \Rightarrow$ il sistema è compatibile e ammette ∞^3 soluzioni.

• Se $k=1$ $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A|B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dato che $A_1=A_2$ $\quad \rho(A)=2$

Controlliamo l'unico minore orlato di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ di $A|B$ non presente in A:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I \to I - II}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$\rho(A|B)=3 \Rightarrow$ il sistema non è compatibile.

Troviamo le soluzioni nel caso $k\neq 0$ e $k \neq 1$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + k x_2 = -ks \\ x_1 + x_2 = -s + k \\ x_1 + k x_3 = -kt + k \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_4 = s \\ x_5 = t \end{matrix}$$

$$x_1^\circ = \frac{1}{k(1-k)} \det\begin{pmatrix} -ks & k & 0 \\ -s+k & 1 & 0 \\ -kt+k & 0 & k \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k(1-k)} k \cdot \det\begin{pmatrix} -ks & k \\ -s+k & 1 \end{pmatrix} = k\,\frac{-\cancel{ks}+\cancel{ks}-k^2}{k(1-k)} = \frac{k^2}{k-1}$$

$$x_2^\circ = \frac{1}{k(1-k)} \det\begin{pmatrix} 1 & -ks & 0 \\ 1 & -s+k & 0 \\ 1 & -kt+k & k \end{pmatrix} = \frac{k \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -ks \\ 1 & -s+k \end{pmatrix}}{k(1-k)} = \frac{-s+k+ks}{1-k}$$

$$x_3^0 = \frac{1}{k}\left(-kt + k - x_1^0\right) = \frac{1}{k}\left(-kt+k - \frac{k^2}{k-1}\right)$$

dalla terza equazione

$$= 1 - t - \frac{k}{k-1}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{ \left(\frac{k^2}{k-1}, \frac{-s+k+ks}{1-k}, 1-t-\frac{k}{k-1} \right) : s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Troviamo le soluzioni nel caso $k=0$. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -t \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad x_3 = s,\ x_4 = t,\ x_5 = w$$

quindi l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{ (0, -t, s, t, w) : s, t, w \in \mathbb{R} \}$$

ESERCIZIO 3

La matrice associata a f rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} h-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (h-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (h-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

h	AUTOVALORI	MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA	MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA	DIAGONALIZZABILE?
$h \neq 1,\ h \neq 2$	h 1 2	1 1 1	1 1 1	SÌ
$h = 1$	1 2	2 1	2 1	SÌ
$h = 2$	1 2	1 2	1 1	NO

- Per $h \neq 1$ e $h \neq 2$ vi sono $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ autovalori reali e distinti
$\Rightarrow$ f è diagonalizzabile.

- Per $h = 1$ troviamo $m_g(1)$. (già sappiamo che $m_g(2) = 1 = m_a(2)$)

$(x,y,z) \in V(1) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 1(x,y,z) \Leftrightarrow (x+y+z, y, y+2z) =$
$= (x,y,z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = x \\ y = y \\ y+2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = 0 \\ // \end{cases}$$

Quindi $V(1) = \{(s,t,-t) : s,t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(s,0,0) + (0,t,-t) : s,t \in \mathbb{R}\}$
$= \{s(1,0,0) + t(0,1,-1) : s,t \in \mathbb{R}\}$
$= L((1,0,0),(0,1,-1))$

$\Rightarrow m_g(1) = \dim V(1) = 2 = m_a(1) \Rightarrow f$ è diagonalizzabile.

- Per $h=2$ troviamo $m_g(2)$ (già sappiamo che $m_g(1) = 1 = m_a(1)$)

$(x,y,z) \in V(2) \Leftrightarrow f(x,y,z) = 2(x,y,z) \Leftrightarrow (x+y+z, y, y+2z) = (2x, 2y, 2z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 2x \\ y = 2y \\ y+2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z = 0 \\ -y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

quindi $V(2) = \{(s,0,s) : s \in \mathbb{R}\} = L(1,0,1) \Rightarrow$

$m_g(2) = \dim V(2) = 1 \neq m_a(2) \Rightarrow f$ non è diagonalizzabile.