# ESAME SCRITTO 20/01/2022

1\. a) La matrice associata al sistema è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Essa ha rango 2 $\Rightarrow \dim(V) = 4-2 = 2$

Trovo le soluzioni. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} -x_2 = -s \\ x_3 = -t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x_1 = s \\ x_4 = t \end{array}$$

da cui $V = \{(s, s, -t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{s(1,1,0,0) + t(0,0,-1,1) : s,t \in \mathbb{R}\}$

$= L(\underbrace{(1,1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,0,-1,1)}_{v_2})$

$v_1, v_2$ non proporzionali $\Rightarrow v_1, v_2$ lin. indip. $\Rightarrow B = \{v_1, v_2\}$ è base di V

b) $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ker(f)$ e $v \in V$ $\Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_3 & x_3 - x_2 \\ x_2 - x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il rango è 4, dato che il minore

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Quindi il sistema ammette come unica soluzione quella nulla

$$\Rightarrow \underset{(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\underset{\parallel}{v}} \in \ker(f) \iff x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

Allora $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Una base di $\ker(f)$ è quindi $\emptyset$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= L(f(v_1), f(v_2)) \\ &= L(f(1,1,0,0), f(0,0,-1,1)) \\ &= L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Essendo lin. indipendenti costituiscono una base, dunque una base di $\mathrm{Im}(f)$ è

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

c) Poniamo $E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$f(v_1) = f(1,1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_1 + E_2 - E_3 + E_4 + 0 \cdot E_5 + 0 \cdot E_6$$

$$f(v_2) = f(0,0,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot E_1 + E_2 - E_3 + E_4 + 0 \cdot E_5 + 0 \cdot E_6$$

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + k x_3 = k \\ k x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ k x_1 + k x_3 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & k \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ k & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) \geq 2$$

$$\det(A|B) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & k & k \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ k & 0 & k & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-k & -1 & k & k \\ k-1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$(A|B)^1 \to (A|B)^1 - (A|B)^3$

$$= -k \cdot \det\begin{pmatrix} 1-k & -1 & k \\ k-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= +k \cdot (k-1) \det\begin{pmatrix} -1 & k \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = k(k-1)^2.$$ Quindi

$$\det(A|B) \neq 0 \iff k \neq 0 \quad \wedge k \neq 1$$

- Per $k \neq 0 \ \wedge k \neq 1$ $\qquad \rho(A|B) = 4 \neq \rho(A)$
  e dunque il sistema è incompatibile $\qquad$ 3 colonne

• Per $k=0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) \geq 2$. Considero gli orlati di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{I e II colonna proporzionali}}{=} 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{III riga nulla}}{=} 0$$

Concludiamo che $\rho(A) = 2$.

Consideriamo gli orlati "aggiuntivi" in $A|B$ dello stesso minore

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \rho(A|B) = 3$$

$\Rightarrow$ il sistema è incompatibile

• Per $k = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 2$ (due colonne sono uguali $\Rightarrow$ non può essere 3)

Anche $\rho(A|B) = 2$ dato che I e III colonna sono uguali e II e IV sono proporzionali.

Il sistema è compatibile e ammette $\infty^1$ soluzioni. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_3 = -t \\ -x_2 + x_3 = 1 - t \end{cases}$$

$x_1 = t$

da cui $x_3 = -t$ e $x_2 = x_3 - 1 + t = t - 1 + t = 2t - 1$

$\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni è $S = \{(t, 2t-1, -t) : t \in \mathbb{R}\}$

3. $V = \{(-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$= \{x_2(-1,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1) : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$= \mathcal{L}(\underbrace{(-1,1,0,0)}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1,0)}_{v_2}, \underbrace{(-1,0,0,1)}_{v_3})$

I vettori $v_1 = (-1,1,0,0)$, $v_2 = (-1,0,1,0)$, $v_3 = (-1,0,0,1)$

sono linearmente indipendenti perché

$$\rho\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \left(\text{il minore } M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ha } \det \neq 0\right)$$

Quindi $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $V$.

Troviamo $A = M_{BB}(f)$.

$f(v_1) = f(-1,1,0,0) = (-3, 3+4, 0, -4) = (-3, 7, 0, -4)$

$= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (-\alpha - \beta - \gamma, \alpha, \beta, \gamma) \iff$

$$\begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = -3 \\ \alpha = 7 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -4 \end{cases} \Rightarrow f(v_1) = 7v_1 + 0 \cdot v_2 - 4 \cdot v_3$$

$f(v_2) = f(-1,0,1,0) = (-3, 3+9, 3, -12) = (-3, 12, 3, -12)$

$= 12v_1 + 3v_2 - 12v_3$

$f(v_3) = f(-1,0,0,1) = (-3, 3, 0, 0) = 3 v_1$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 12 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -4 & -12 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 3 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 \quad \vee \quad \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 \quad \vee \quad \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

Abbiamo dunque due autovalori:

$\lambda_1 = 3 \qquad m_a(3) = 2$

$\lambda_2 = 4 \qquad m_a(4) = 1$

Troviamo autospazi.

$$v = x v_1 + y v_2 + z v_3 \in V(3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 12 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7x + 12y + 3z \\ 3y \\ -4x - 12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 12y + 3z = 0 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -3s - \frac{3}{4}t \qquad s = y \qquad t = z$$

$$V(3)=\left\{\left(-3s-\frac{3}{4}t\right)v_1+sv_2+tv_3 : s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{s(-3v_1+v_2)+t\left(-\frac{3}{4}v_1+v_3\right) : s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=L\left(-3v_1+v_2,\ -\frac{3}{4}v_1+v_3\right)$$

$$=L\left((-3,3,0,0)+(-1,0,1,0),\ \left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4},0,0\right)+(-1,0,0,1)\right)$$

$$=L\left((-4,3,1,0),\ \left(-\frac{7}{4},\frac{3}{4},0,1\right)\right)$$

$$=L\left((-4,3,1,0),\ (-7,3,0,4)\right)$$

Essendo non proporzionali, essi sono lin. indipendenti e costituiscono una base di $V(3)$ $\Rightarrow$ $m_g(3)=\dim V(3)=2=m_a(3)$.

$$v=xv_1+yv_2+zv_3\in V(4)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7&12&3\\0&3&0\\-4&-12&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7x+12y+3z\\3y\\-4x-12y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x\\4y\\4z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+12y+3z=0\\-y=0\\-4x-12y-4z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y+z=0\\y=0\\x+3y+z=0\end{cases}\qquad \rho\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&4\\0&1\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\\\begin{matrix}1&3\end{matrix}&1\end{pmatrix}=2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y=-s\\y=0\end{cases}\quad z=s\qquad\Leftrightarrow\begin{cases}x=-s\\y=0\end{cases}$$

$$V(4)=\{-sv_1+0\cdot v_2+sv_3 : s\in\mathbb{R}\}=\{s(-v_1+v_3) : s\in\mathbb{R}\}$$

$= L(-v_1 + v_3) = L(0, -1, 0, 1)$

$\Rightarrow$ una base di $V(4)$ è $\{(0,-1,0,1)\}$ $\Rightarrow$

$m_g(4) = \dim V(4) = 1 = m_a(4)$

Quindi $f$ è diagonalizzabile e una base di formata da autovettori di $f$ è

$$\{(-4, 3, 1, 0), (-7, 3, 0, 4), (0, -1, 0, 1)\}$$