Corso di
Modellazione di Sistemi a Fluido
—
Richiami di Fluidodinamica

Tiziano Ghisu

November 8, 2018

Contents

1 Introduzione

La materia può essere suddivisa in due stati, definiti solido e fluido. La differenza di comportamento è riconducibile alle differenti strutture molecolari:

- nei solidi le molecole sono molto vicine le une alle altre e le forze di coesione molto elevate; essi hanno pertanto la proprietà di mantenere invariata la propria forma anche sotto l'azione di forze esterne
- nei fluidi si hanno legami coesivi di minore intensità, le molecole sono più distanti tra loro e hanno più possibilità di movimento. I fluidi a loro volta possono essere allo stato liquido o in quello gassoso, in cui tali legami hanno ancora minor forza

Una definizione più corretta considera i diversi tipi di sforzi che un elemento di materia può subire. Si consideri la possibilità di creare uno stato di sforzo puramente tangenziale in un **solido**, ad esempio applicando ad un provino due forze parallele eguali ed opposte. Il solido si deforma inizialmente e poi tale deformazione, se inferiore a quella di rottura, rimane costante. A seguito della applicazione di forze tali da generare uno stato di sforzo stazionario composto da tensioni tangenziali, il solido subisce una deformazione statica costante.

Un esperimento analogo nel caso di un **liquido** genera risultati diversi. Si potrebbe pensare ad una tavola di legno galleggiante sulla superficie libera di una vasca idrodinamica, opportunamente collegata in modo da potervi applicare una forza. Si applichi una forza minima, parallela alla superficie libera. Quello che si osserva è che la tavola si mantiene in moto, e così le particelle che vi aderiscono. È come se la deformazione continuasse ad aumentare all'infinito. Un fluido è uno stato di aggregazione della materia tale da deformarsi continuamente se sottoposto a uno stato di sforzo tangenziale, anche di lieve intensità e costante. Se ne deduce che se un fluido è fermo, in esso non sono presenti sforzi tangenziali.

Lo studio del moto dei fluidi, così come affrontato nella Fluidodinamica classica, non parte dall'analisi del comportamento delle singole molecole (che può essere pensato come un punto di vista microscopico), in quanto non conveniente, essendo il moto molecolare di tipo caotico, irregolare e soggetto a forze di natura varia e complessa. È preferibile individuare delle entità di fluido (particelle fluide) tali da soddisfare i seguenti requisiti:

- il loro volume deve essere sufficientemente grande da comprendere un numero elevato di molecole. Si può pensare di caratterizzare tale porzione di fluido attraverso un unico valore per ciascuna delle grandezze termofluidodinamiche d'interesse, considerato come valore medio statistico.
- il volume deve essere sufficientemente ridotto rispetto al sistema fluido che si sta studiando. Solo in questo modo la particella fluida potrà essere considerata come puntiforme nel dominio considerato.

I valori delle grandezze relative a particelle fluide molto vicine saranno molto simili e lo spazio di interesse, il dominio fluido, sarà pertanto individuabile come un continuo al quale potranno essere applicate le leggi del calcolo differenziale.

Alcune semplici considerazioni permettono di individuare le dimensioni di una particella fluida. Nella tabella 1 sono riportate alcune grandezze caratteristiche per gas e liquidi.

Quindi anche una piccola porzione di fluido, ad esempio un volume di 10^{-9} mm^3 (un cubetto di 10^{-3} mm di lato), contiene un elevatissimo numero di molecole. Nella fluidodinamica classica, quindi, il fluido è considerato composto non da molecole ma da particelle fluide, cioè da porzioni di fluido piccole rispetto al sistema in studio, ma sufficientemente grandi da permettere una valutazione statistica delle grandezze termofluidodinamiche.

Table 1: Distanze tra molecole in gas e liquidi

Gas	distanza tra le molecole	10^{-6}mm
	molecole contenute in 1 mm^3	10^{18}
Liquido	distanza tra le molecole	10^{-7}mm
	molecole contenute in 1 mm^3	10^{21}

2 Grandezze termodinamiche

Pressione
È lo sforzo di compressione in un punto di un fluido fermo o che in un fluido in moto è indipendente dalla direzione. Nei flussi a bassa velocità (incomprimibili, $M < 0.3$) sono le differenze di pressione e non i valori effettivi delle pressioni ad essere importanti, in quanto costituiscono le forze che generano il moto. Nel caso di flussi compressibili, invece, è importante anche il modulo della pressione.

Temperatura
È una misura dell'energia interna di un fluido. Assume importanza notevole nel caso di flussi comprimibili e, nel caso di flusso a densità costante, se sono presenti fenomeni di scambio termico con le pareti di confine del dominio fluido (heat transfer).

Densità
Rappresenta il valore del rapporto massa/volume del fluido considerato. Nel caso dei liquidi la densità assume un valore pressochè costante (nello spazio e nel tempo) e indipendente dalla pressione. Se non in qualche fenomeno particolare (e.g. colpo d'ariete nelle condotte), il liquido si può pertanto considerare a densità costante, incomprimibile. Pertanto, la definizione di incompressibilità andrebbe correttamente rivolta al flusso di un liquido, e non al liquido stesso.

Energia specifica
L'energia totale specifica associata ad una particella fluida è costituita da tre termini:

$$e = u + \frac{v^2}{2} + gz \tag{1}$$

- il primo termine corrisponde all'energia interna termodinamica, dovuta all'attività ed ai legami di tipo molecolare
- il secondo termine è l'energia cinetica per unità di massa, associata al moto della particella
- il terzo termine è relativo all'energia potenziale conservativa, in questo caso determinata dalla posizione verticale z in un campo gravitazionale definito dalla accelerazione di gravità g

L'energia totale è normalmente utilizzata per fluidi incomprimibili. Nel caso di flussi compressibili si utilizza l'entalpia:

$$h = e + \frac{p}{\rho} \tag{2}$$

Relazioni di stato

Rappresentano delle relazioni tra variabili termodinamiche, che valgono in condizioni di equilibrio per una particolare sostanza, e possono essere ricavate sperimentalmente o teoricamente. Nel corso si prenderanno in considerazione solo sostanze pure, o miscele di gas a composizione costante, come l'aria per un campo esteso di temperature, anch'esse trattate come sostanze pure. Per i gas perfetti, ad esempio, vale la relazione

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{3}$$

dove R è la costante particolare dei gas. Valgono le seguenti relazioni:

$$R = c_p - c_v \tag{4}$$

$$k = \frac{c_p}{c_v} \tag{5}$$

dove i calori specifici sono da considerarsi costanti. Per i gas ideali la relazione precedente è ancora valida ma i calori specifici sono funzioni della temperatura.

Altre relazioni di stato sono disponibili per un gas ideale: si può dimostrare che l'energia interna u e l'entalpia di un gas ideale sono funzioni di stato e dipendono unicamente dalla temperatura:

$$e = c_v T \tag{6}$$

$$h = e + \frac{p}{\rho} = c_p T \tag{7}$$

Viscosità

Nella dinamica dei fluidi reali la viscosità è il parametro che determina lo scambio di quantità di moto (e quindi le forze) tra particelle fluide prossime tra loro. Il concetto di viscosità puà essere analizzato nel caso di un flusso piuttosto semplice, di tipo stazionario, riportato nella figura 2.

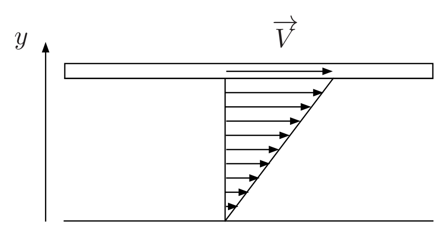

Figure 1: Legame tra tensione e deformazione in un fluido

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \tag{8}$$

dove il coefficiente di proporzionalità μ tra tensione e deformazione prende il nome di vistosità dinamica (unità di misura $\frac{\text{kg}}{\text{ms}}$). La viscosità cinematica è invece definita come rapporto tra viscosità dinamica e densità (unita di misura della viscosità cinematica $\frac{\mathrm{m}^2}{s}$).

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{9}$$

3 Cinematica

Il problema fluidodinamico consiste nella determinazione delle proprietà del fluido in funzione della posizione spaziale e del tempo. Si deve conoscere il **campo** delle grandezze di interesse (pressione, tempertatura, velocità, ecc).

I problemi fluidodinamici possono essere studiati secondo due punti di vista:

- LAGRANGIANO o SOSTANZIALE: studia le grandezze viste da un osservatore che si muove con una particella fluida
- EULERIANO o LOCALE: le grandezze sono studiate nei diversi punti (o volumetti infinitesimi) fissi nello spazio

L'<u>accelerazione sostanziale</u> rappresenta l'accelerazione di una particella fludia:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_A(x_2, y_2, z_2, t_2) - V_A(x_1, y_1, z_1, t_1)}{\Delta t} \tag{10}$$

dove il pedice A indica che il rapporto incrementale è calcolato a partire dalle velocità della particella A in due istanti di tempo vicini t_1 e t_2, nei quali la particella fluida occupa rispettivamente le posizioni (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2).

Sviluppando:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{11}$$

Essendo:

$$u = \frac{dx}{dt};\ v = \frac{dy}{dt};\ w = \frac{dz}{dt} \tag{12}$$

$$\overrightarrow{V} = u\,\overrightarrow{i} + v\,\overrightarrow{j} + w\,\overrightarrow{k} \tag{13}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial z} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + (\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{V} \tag{14}$$

Il termine $\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t}$ è l'**accelerazione locale o euleriana** e rappresenta l'accelerazione vista da un osservatore fisso nello spazio:

$$\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_B(x_1, y_1, z_1, t_2) - V_A(x_1, y_1, z_1, t_1)}{\Delta t} \tag{15}$$

dove i pedici A e B indicano due diverse particelle fluide A e B che negli istanti di tempo

t_1 e t_2 transitano per il punti (x_1, y_1, z_1). Il campo di grandezze fluidodinamiche per cui l'accelerazione locale è nulla si dice **stazionario**.

Il termine $(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{V}$ è l'**accelerazione convettiva** ed è dovuta al fatto che la particella fluida si muove in un campo in cui ci sono gradienti spaziali. In un campo stazionario c'è solo l'accelerazione convettiva. Se anche questa è nulla il campo è uniforme spazialmente.

Il legame tra derivate lagrangiana, euleriana e convettiva esiste per tutte le variabili dipendenti:

$$\frac{d(\ )}{dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + (\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\nabla})(\ ) \tag{16}$$

Distinguiamo tra:

- linea di corrente o streamline luogo dei punti tali che il vettore velocità è tangente in ogni punto della linea stessa *ad un dato istante di tempo*
- traiettoria o pathline luogo dei punti occupati da una particella fluida *nel tempo*
- linea di fumo o streakline luogo dei punti occupati (*in un dato istante di tempo*) da tutte le particelle fluide che sono passate precedentemente in un punto dello spazio.

In un flusso stazionario le tre curve coincidono.

4 Operatori vettoriali

Dati :

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \tag{17}$$
$$\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \tag{18}$$

Definiamo:

Prodotto scalare (interno)

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{19}$$

Prodotto vettoriale (esterno)

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\overrightarrow{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\overrightarrow{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\overrightarrow{k} \tag{20}$$
$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |a||b|\sin\alpha \tag{21}$$

dove α è l'angolo compresso tra $\overrightarrow{a}$ e
$vecb$

Operatore nabla

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k} \tag{22}$$

Gradiente

$$\overrightarrow{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{k} \tag{23}$$

Il risultato è un vettore.

Divergenza

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div(\overrightarrow{a}) \tag{24}$$

Il risultato è uno scalare.

Rotore

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\overrightarrow{i} + (\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_z}{\partial y})\overrightarrow{k} \tag{25}$$

$$\tag{26}$$

Il risultato è un vettore.

5 Deformazione di un elemento fluido

Consideriamo un flusso bidimensionale. Una particella fluida quadrata (ABCD) al tempo t si muove, deformandosi in una particella (A'B'C'D'), al tempo $t + dt$.

La particella fluida subisce le seguenti trasformazioni:

- traslazione: il punto B si sposta in B'
- rotazione: la diagonale BD ruota (B'D')
- deformazione: l'elemento non e' più quadrato
- dilatazione: variazione di area (volume in 3D)

Velocità di traslazione

$$\overrightarrow{V} = u\,\overrightarrow{i} + v\,\overrightarrow{j} \tag{27}$$

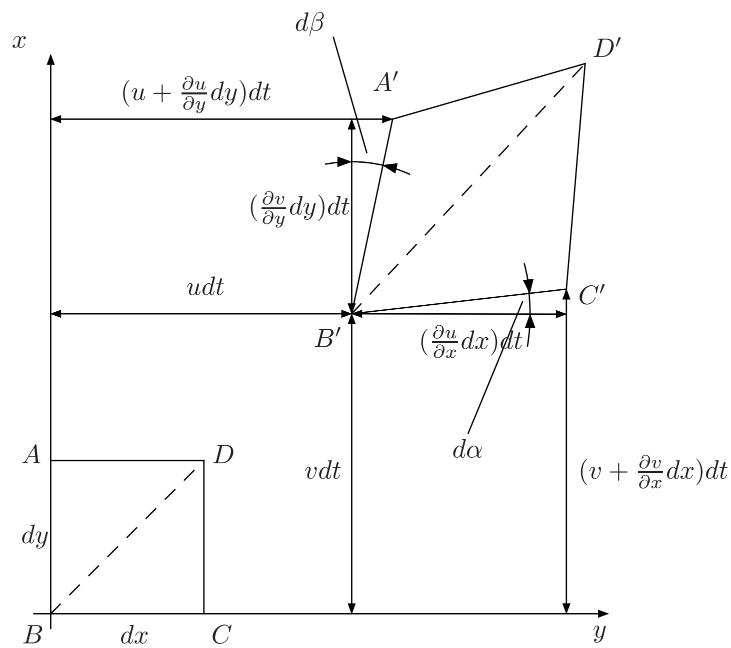

Figure 2: Deformazione di una particella fluida

<u>Rotazione</u>

$$d\Omega_z = \frac{1}{2}(d\alpha - d\beta) \tag{28}$$

$$d\alpha = \lim_{dt\to 0}(\tan^{-1}\frac{\frac{\partial v}{\partial v}dxdt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dxdt} = \frac{\partial v}{\partial x}dt \tag{29}$$

$$d\alpha = \lim_{dt\to 0}(\tan^{-1}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}yxdt}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}yxdt} = \frac{\partial u}{\partial y}dt \tag{30}$$

Pertanto:

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \tag{31}$$

In tre dimensioni:

$$\frac{d\Omega_x}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) \tag{32}$$

$$\frac{d\Omega_y}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \tag{33}$$

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) \tag{34}$$

Definiamo la <u>vorticità</u> come:

$$\overrightarrow{\omega} = 2\frac{d\Omega}{dt} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \tag{35}$$

<u>Deformazione a taglio</u>

È definita come la diminuzione dell'angolo tra due linee inizialmente perpendicolari:

$$\epsilon_{xy} = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{2}\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \tag{36}$$

In tre dimensioni:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) \tag{37}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) \tag{38}$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) \tag{39}$$

<u>Dilatazione</u>

$$\epsilon_{xx} = \lim_{dt \to 0} \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dxdt - dx}{dxdt} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{40}$$

Allo stesso modo:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{41}$$

<u>Tensore di deformazione</u>

Il tensore di deformazione viene indicato nel seguente modo:

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \tag{42}$$

Particolarmente importante è l'invariante primo, che rappresenta la velocità di variazione unitaria del volume della particella (nullo per flussi incompressibili).

$$I_1 = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} \tag{43}$$

6 Equazioni di conservazione

6.1 Conservazione della massa (continuità)

Consideriamo un volumetto infinitesimo (come in figura 3), di lati δx, δy e δz e volume $\delta V = \delta x \delta y \delta z$. Indichiamo con ρ la densità e con $\overrightarrow{V} = u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + w\overrightarrow{k}$ il vettore velocità.

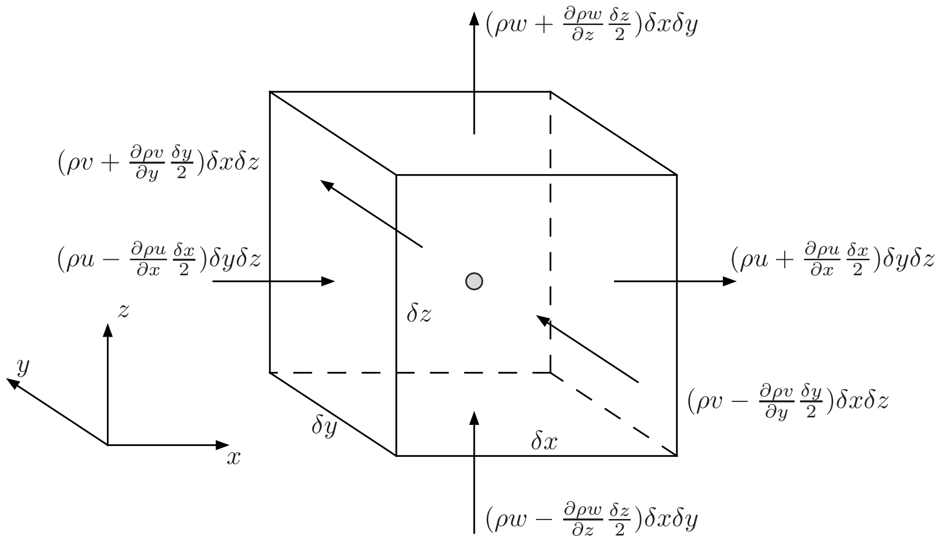

Figure 3: Flussi di massa in un volumetto infinitesimo

Scriviamo la legge di conservazione della massa: la variazione di massa all'interno del volume di controllo deve uguagliare la somma dei flussi entranti e uscenti (con segno):

$$\delta M = \sum (\delta \dot{f}) \delta t \tag{44}$$

Al limite:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \sum (\delta \dot{f}) \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x \delta y \delta z = & \left(\rho u - \frac{\partial \rho u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta y \delta z + \\
& + \left(\rho v - \frac{\partial \rho v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta x \delta z + \\
& + \left(\rho w - \frac{\partial \rho w}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x \delta y - \left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\delta x \delta y = \\
& = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z
\end{aligned} \tag{46}$$

Semplificando il volume:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x \delta y \delta z + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)\delta x \delta y \delta z = 0 \tag{47}$$

oppure, in notazione vettoriale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V}) = 0 \tag{48}$$

Per un fluido incompressibile ($\rho =$ cost.):

$$\nabla \cdot \overrightarrow{V} = 0 \tag{49}$$

6.2 Approccio Euleriano e approccio Lagrangiano

Consideriamo una proprietà qualunque di una particella fluida ϕ (intensiva, per unità di massa). La variazione diellla grandezza ϕ nel tempo sarà:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + w\frac{\partial \phi}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\overrightarrow{V} \cdot \nabla)\phi \end{aligned} \tag{50}$$

Il termine $\frac{d\phi}{dt}$ rappresenta la variazione della grandezza ϕ per unità di massa nell'unità di tempo (rate of change of ϕ per unit mass and unit time). Rappresenta una derivata **lagrangiana** (o totale o sostanziale) e si riferisce alla variazione per una determinata particella fluida.

Il termine $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ rappresenta la variazione della grandezza ϕ per unità di massa nell'unità di tempo (rate of change of ϕ per unit mass and unit time), calcolata in un determinato punto dello spazio. Rappresenta una derivata **euleriana** (o parziale) e si riferisce alla variazione in un determinato punto dello spazio.

Se voglio calcolare la variazione per unità di volume anzichè di massa:

$$\rho\frac{d\phi}{dt} = \rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\rho\overrightarrow{V} \cdot \nabla)\phi \tag{51}$$

Questo può anche essere scritto nel seguente modo:

$$\rho\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial (\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\overrightarrow{V}\phi) \tag{52}$$

Infatti sviluppando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}\phi) &= \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \phi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \phi\nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}) + (\rho\overrightarrow{V}\cdot\nabla)\phi \\ &= \phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V})\right) + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + (\rho\overrightarrow{V}\cdot\nabla)\phi \qquad (53)\end{aligned}$$

Il primo termine nell'ultima uguaglianza è nullo per l'equazione di conservazione della massa, da cui risulta verificata l'equazione (52).
Da notare come dalla equazione (52), per $\phi = 1$ recupero l'equazione di continuità.

L'equazione (52) rappresenta la forma conservativa, mentre l'equazione (51) rappresenta la forma non conservativa.

6.3 Conservazione della quantità di moto

Rappresenta l'applicazione della seconda legge di Newton per un volumetto infinitesimo. Esprime matematicamente il concetto che la variazione di quantità di moto nell'unità di tempo deve essere uguale alla somma delle forze applicate.

La variazione della quantità di moto nell'unità di tempo e di volume per il volumetto infinitesimo rappresentato in figura 3 può essere scritta come $\rho\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$, che può essere scritto in forma conservativa o non conservativa nel seguente modo:

$$\rho\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial(\rho\overrightarrow{V})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}\overrightarrow{V}) = \rho\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t} + (\rho\overrightarrow{V}\cdot\nabla)\overrightarrow{V} \qquad (54)$$

La precedente può essere anche scomposta nelle tre direzioni cartesiane:

$$\rho\frac{du}{dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}u) = \rho\frac{\partial u}{\partial t} + (\rho\overrightarrow{V}\cdot\nabla)u \qquad (55)$$

$$\rho\frac{dv}{dt} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}v) = \rho\frac{\partial v}{\partial t} + (\rho\overrightarrow{V}\cdot\nabla)v \qquad (56)$$

$$\rho\frac{dw}{dt} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}w) = \rho\frac{\partial w}{\partial t} + (\rho\overrightarrow{V}\cdot\nabla)w \qquad (57)$$

Tra le forze agenti sul volumetto infinitesimo consideriamo solamente quelle dovute alla pressione e agli sforzi viscosi. Trascuriamo invece le forze di Volume (gravità, centrifuga, Coriolis, ecc.). Un diagramma delle pressioni agenti sulle facce del volumetto infinitesimo è riportato in figura 4, mentre le figure 5, 6 e 7 riportano gli sforzi agenti rispettivamente sulle facce perpendicolari alle direzioni x, y e z.

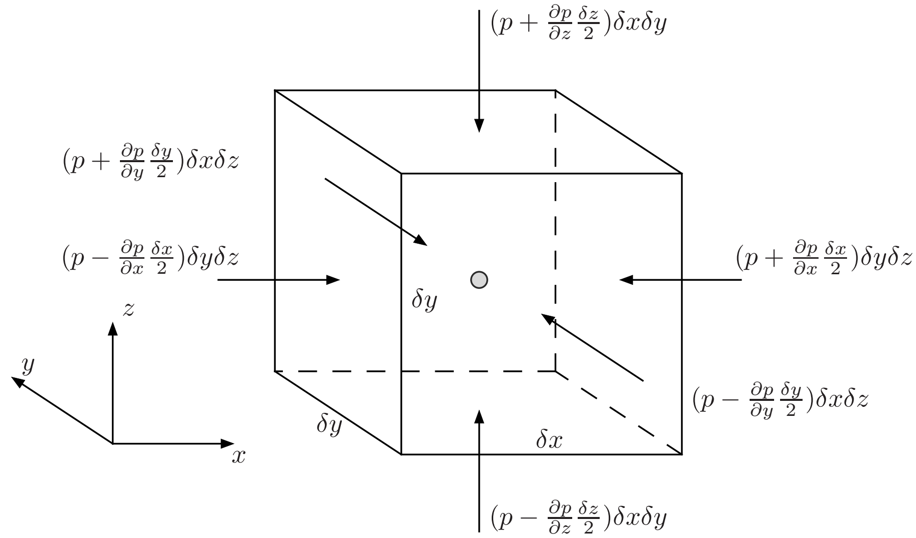

Figure 4: Pressioni agenti sul volumetto infinitesimo

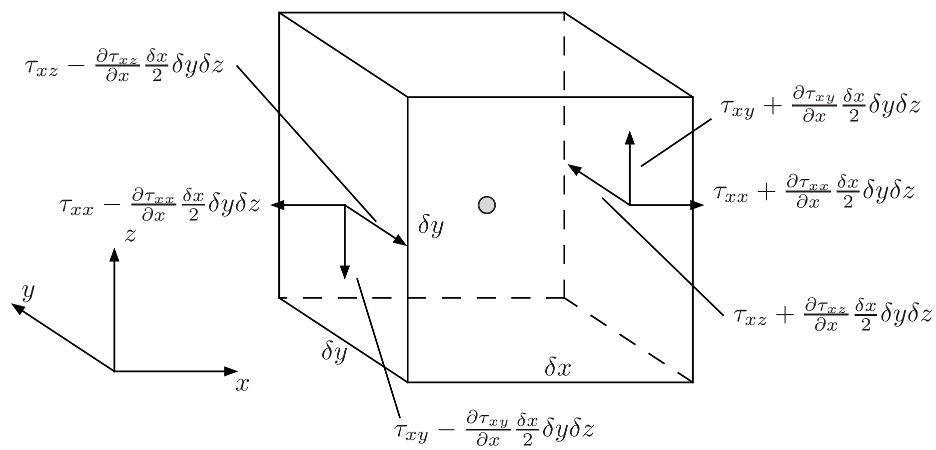

Figure 5: Sforzi agenti sulle facce “x” del volumetto infinitesimo

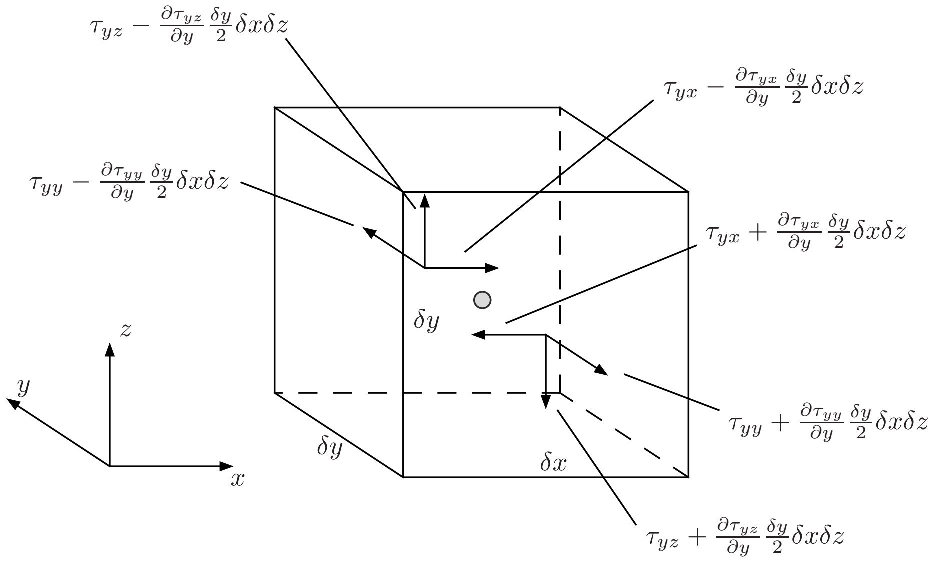

Figure 6: Sforzi agenti sulle facce "y" del volumetto infinitesimo

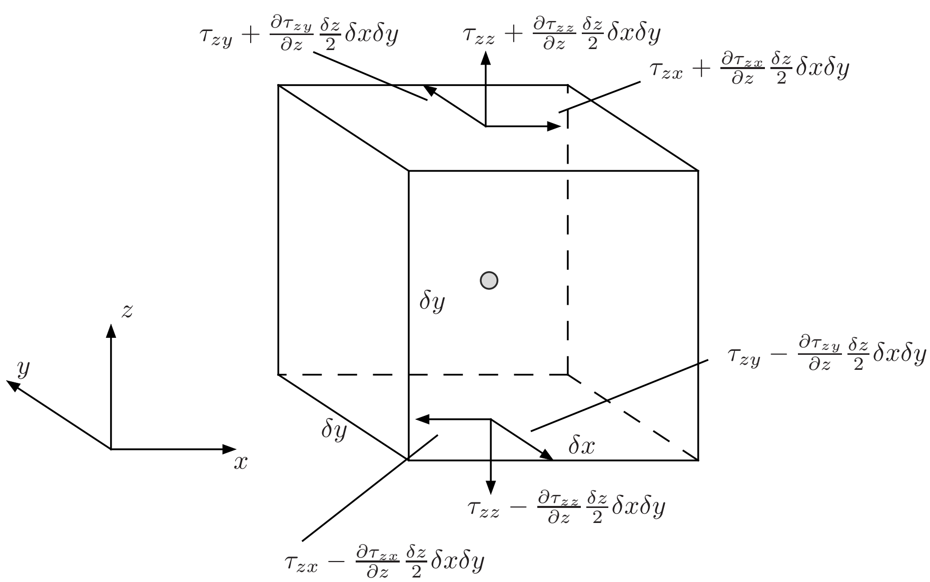

Figure 7: Sforzi agenti sulle facce "z" del volumetto infinitesimo

La somma delle forze agenti nella direzione x è pertanto:

$$\begin{aligned}\delta F_x = &(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z - (p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z\\ &- (\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z + (\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z\\ &- (\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\delta y}{2})\delta x\delta z + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{\delta y}{2})\delta x\delta z\\ &- (\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{\delta z}{2})\delta x\delta y + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{\delta z}{2})\delta x\delta y =\\ &= \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z \end{aligned} \tag{58}$$

Allo stesso modo:

$$\delta F_y = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z \tag{59}$$

$$\delta F_z = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z \tag{60}$$

Le equazioni di conservazione della quantità di moto saranno perciò:

$$\rho\frac{du}{dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}u) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \tag{61}$$

$$\rho\frac{dv}{dt} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}v) = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \tag{62}$$

$$\rho\frac{dw}{dt} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}w) = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \tag{63}$$

Indicando con $\bar{\bar{\sigma}}$ il tensore completo degli sforzi (includendo la pressione):

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\tau}} - p\bar{\bar{I}} \tag{64}$$

In forma completa:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx}\\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy}\\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz}\end{bmatrix} - p\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{65}$$

Le equazioni di conservazione della quantità di moto possono perciò essere scritte anche come:

$$\rho\frac{du}{dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}u) = \nabla\cdot\bar{\sigma}_x \tag{66}$$
$$\rho\frac{dv}{dt} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}v) = \nabla\cdot\bar{\sigma}_y \tag{67}$$
$$\rho\frac{dw}{dt} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}w) = \nabla\cdot\bar{\sigma}_z \tag{68}$$

dove:

$$\bar{\sigma}_x = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx}\end{bmatrix} \tag{69}$$
$$\bar{\sigma}_y = \begin{bmatrix}\sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy}\end{bmatrix} \tag{70}$$
$$\bar{\sigma}_z = \begin{bmatrix}\sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \tag{71}$$
$$\tag{72}$$

In forma compatta:

$$\rho\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial(\rho\overrightarrow{V})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}\overrightarrow{V}) = \nabla\cdot\bar{\bar{\sigma}} \tag{73}$$

Questa è la forma conservativa. La forma non conservativa è invece:

$$\rho\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \rho\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial t} + (\rho\overrightarrow{V}\cdot\nabla)\overrightarrow{V} = \nabla\cdot\bar{\bar{\sigma}} \tag{74}$$

6.4 Conservazione dell'energia

Rappresenta l'applicazione della prima legge della termodinamica per un volumetto infinitesimo. Esprime matematicamente il concetto che la variazione di energia nell'unità di tempo deve essere uguale alla somma di lavoro fatto dalle forze esterne e calore scambiato (nell'unità di tempo):

$$\rho\frac{dE}{dt}\delta x\delta y\delta z = \delta\dot{W} + \delta\dot{Q} \tag{75}$$

Scriviamo il lavoro fatto dalle forze che agiscono nella direzione x

$$\begin{aligned}\delta\dot{W}_x = &-\left[(\tau_{xx}-p)u - \frac{\partial(\tau_{xx}-p)u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right]\delta y\delta z + \left[(\tau_{xx}-p)u + \frac{\partial(\tau_{xx}-p)u}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right]\delta y\delta z\\ &-\left[\tau_{yx}u - \frac{\partial\tau_{yx}u}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right]\delta x\delta z + \left[\tau_{yx}u + \frac{\partial\tau_{yx}u}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right]\delta x\delta z\\ &-\left[\tau_{zx}u - \frac{\partial\tau_{zx}u}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right]\delta x\delta y + \left[\tau_{zx}u + \frac{\partial\tau_{zx}u}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right]\delta x\delta y =\\ &= (\frac{\partial(\tau_{xx}-p)u}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}u}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}u}{\partial z})\delta x\delta y\delta z\end{aligned} \tag{76}$$

Allo stesso modo:

$$\delta \dot{W}_y = (\frac{\partial \tau_{xy} v}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yy} - p) v}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy} v}{\partial z}) \delta x \delta y \delta z \tag{77}$$

$$\delta \dot{W}_z = (\frac{\partial \tau_{xz} w}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz} w}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{zz} - p) w}{\partial z}) \delta x \delta y \delta z \tag{78}$$

Possiamo invece scrivere il calore scambiato nel seguente modo (indicando con $\dot{q}$ il calore scambiato per unità di tempo e di area):

$$\begin{aligned}
\delta \dot{Q} = & (\dot{q}_x - \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}) \delta y \delta z - (\dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x}\frac{\delta x}{2}) \delta y \delta z \\
& + (\dot{q}_y - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\frac{\delta y}{2}) \delta x \delta z - (\dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y}\frac{\delta y}{2}) \delta x \delta z \\
& + (\dot{q}_z - \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}\frac{\delta z}{2}) \delta x \delta y - (\dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}\frac{\delta z}{2}) \delta x \delta y = \qquad (79) \\
& = - \left(\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z \qquad (80)
\end{aligned}$$

Ipotizzando che il calore sia scambiato per conduzione secondo la legge di Fourier:

$$\dot{q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}; \;\; \dot{q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}; \;\; \dot{q}_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \tag{81}$$

dove k è il coefficiente di conduzione termica. Perciò:

$$\delta \dot{Q} = \left(\frac{\partial (k \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (k \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial (k \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z = \nabla \cdot (k \nabla T) \delta x \delta y \delta z \tag{82}$$

Nel caso in cui il coefficiente di conduzione termica sia costante:

$$\delta \dot{Q} x = \left(k \nabla^2 T \right) \delta x \delta y \delta z \tag{83}$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{dE}{dt} = & \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V} E) = - \left(\frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} \right) \\
& + \left(\frac{\partial \tau_{xx} u}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx} u}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx} u}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy} v}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy} v}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy} v}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz} w}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz} w}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz} w}{\partial z} \right) \\
& + \nabla \cdot (k \nabla T) \qquad (84)
\end{aligned}$$

In forma compatta:

$$\rho \frac{dE}{dt} = \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V} E) = -\nabla \cdot (p \overrightarrow{V}) + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \overrightarrow{V}) + \nabla \cdot (k \nabla T) \tag{85}$$

6.4.1 Formulazioni alternative

Scriviamo l'energia totale per unità di massa E come somma di energia interna i e energia cinetica $\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$:

$$E = i + \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) \tag{86}$$

Moltiplichiamo le equazioni della quantità di moto per la rispettiva componente di velocità:

$$\rho u \frac{du}{dt} = -u\frac{\partial p}{\partial x} + u\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) \tag{87}$$

$$\rho v \frac{dv}{dt} = -v\frac{\partial p}{\partial y} + v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) \tag{88}$$

$$\rho w \frac{dw}{dt} = -w\frac{\partial p}{\partial y} + w\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \tag{89}$$

Sottraendo dalla equazione (84):

$$\begin{aligned}\rho\frac{di}{dt} = &-p(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) + \tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} \\ &+ \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + \nabla\cdot(k\nabla T)\end{aligned} \tag{90}$$

In forma compatta:

$$\rho\frac{di}{dt} = -p\nabla\cdot\overrightarrow{V} + \bar{\bar{\tau}}\cdot(\nabla\overrightarrow{V}) + \nabla\cdot(k\nabla T) \tag{91}$$

Per **fluidi incompressibili** $\nabla\cdot\overrightarrow{V} = 0$ e quindi

$$\rho\frac{di}{dt} = \bar{\bar{\tau}}\cdot(\nabla\overrightarrow{V}) + \nabla\cdot(k\nabla T) \tag{92}$$

Per **fluidi compressibili** è più comune scrivere l'equazione nel modo seguente:

$$\rho\frac{dH}{dt} = \frac{\partial\rho H}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}H) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(\bar{\bar{\tau}}\cdot\overrightarrow{V}) + \nabla\cdot(k\nabla T) \tag{93}$$

dove abbiamo sfruttato l'uguaglianza $H = E + \frac{p}{\rho}$

7 Fluidi Newtoniani

Le equazioni di conservazione contengono una serie di incognite (la densità ρ, le componenti della velocità u, v e w, la pressione p , l'energia E, la temperatura T, le sei componenti indipendenti del tensore degli sforzi $\bar{\bar{\tau}}$). Solitamente il legame tra pressione, densità, temperatura e energia interna viene espresso tramite due equazioni di stato, eliminando di fatto due variabili dal problema. Rimane da trovare il modo di calcolare gli sforzi viscosi.

La forma più comune delle equazioni di conservazione si ottiene introducendo un modello per gli stress τ_{ij}. In molti fluidi gli stress possono essere espressi in funzione delle deformazioni locali (deformazioni lineari e deformazioni volumetriche):

3 deformazioni lineari:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{94}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{95}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{96}$$

6 deformazioni a taglio:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{97}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{98}$$

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{99}$$

e la deformazione volumetrica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \overrightarrow{V} \tag{100}$$

Nei fluidi Newtoniani gli sforzi viscosi sono proporzionali alle deformazioni, tramite due costanti di proporzionalità:

- μ (viscosità dinamica)
- λ (secondo coefficiente di viscosità)

$$\tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\nabla \cdot \overrightarrow{V} \tag{101}$$

Il secondo coefficiente di viscosità λ è poco conosciuto e difficile da valutare sperimentalmente, visto anche l'effetto spesso trascurabile sugli sforzi viscosi. Di solito viene assunto pari a $-\frac{2}{3}\mu$. Nei fluidi incompressibili $\nabla \cdot \overrightarrow{V}$ quindi l'effetto è nullo.

Se riprendiamo le equazioni della quantità di moto e sostituiamo l'espressione scritta per gli sforzi ottenuti otteniamo (direzione x):

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} = \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})\right) = \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right) = \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla\cdot(\mu\nabla u) + \nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right) \qquad (102)
\end{aligned}
$$

Nel caso di fluidi incompressibili l'ultimo termine è nullo ($\nabla\cdot\overrightarrow{V} = 0$), mentre il penultimo è nullo se anche la viscosità è costante ($\nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right)$).

Allo stesso modo nelle altre due direzioni:

$$
\rho\frac{dv}{dt} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla\cdot(\mu\nabla v) + \nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right) \qquad (103)
$$

$$
\rho\frac{dw}{dt} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}w) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla\cdot(\mu\nabla w) + \nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right) \qquad (104)
$$

In forma vettoriale:

$$
\rho\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial(\rho\overrightarrow{V})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}\overrightarrow{V}) = -\nabla p + \nabla\cdot\left(\mu\nabla\overrightarrow{V}\right) + \nabla\cdot\left(\mu\nabla\overrightarrow{V}^T\right) + \nabla\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right) \qquad (105)
$$

La precedente viene spesso scritta nella forma:

$$
\rho\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{\partial(\rho\overrightarrow{V})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\overrightarrow{V}\overrightarrow{V}) = -\nabla p + \nabla\cdot\left(\mu\nabla\overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{S} \qquad (106)
$$

dove:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{S} &= \nabla\cdot\left(\mu\nabla\overrightarrow{V}^T\right) + \nabla\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right) = \\
&= \left[\nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right)\right]\overrightarrow{i} + \left[\nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right)\right]\overrightarrow{j} \\
&+ \left[\nabla\cdot\left(\mu\frac{\partial\overrightarrow{V}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right)\right]\overrightarrow{k} \qquad (107)
\end{aligned}
$$

$\overrightarrow{S}$ viene spesso scritto separatamente sia per il minore impatto sulle equazioni della quantità di moto (nullo per fluidi incompressibili) sia per il modo diverso con cui viene trattato numericamente (come sorgente o forza di volume).

Per quanto riguarda, l'equazione dell'energia, consideriamo quella scritta in forma di energia interna e sostituiamo l'equazione degli sforzi viscosi nel caso di fluidi Newtoniani:

$$\begin{aligned}
\rho\frac{di}{dt} &= -p(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})+\tau_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}\\
&+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\nabla\cdot(k\nabla T)=\\
&=-p(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})+\nabla\cdot(k\nabla T)\\
&+\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\\
&+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial z}\\
&+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\left(2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right)\frac{\partial w}{\partial z}=\\
&=-p(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})+\nabla\cdot(k\nabla T)+2\mu\left((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2+(\frac{\partial w}{\partial z})^2\right)\\
&+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=\\
&=-p(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})+\nabla\cdot(k\nabla T)+S_e
\end{aligned}\tag{108}$$

Nella precedente:

$$\begin{aligned}
S_e &= 2\mu\left((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2+(\frac{\partial w}{\partial z})^2\right)\\
&+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}\tag{109}$$

rappresenta il contributo degli sforzi viscosi all'energia interna. Il contributo è sempre positivo, quindi l'effetto degli sforzi viscosi è sempre l'aumento dell'energia interna di un fluido.

7.1 Equazioni: forma differenziale

Riassumiamo di seguito le equazioni di Navier-Stokes per un fluido Newtoniano, espresse in forma conservativa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V}) = 0 \tag{110}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V} u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + S_x \tag{111}$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V} v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + S_y \tag{112}$$

$$\frac{\partial (\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V} w) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\mu \nabla w) + S_z \tag{113}$$

$$\frac{\partial (\rho i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V} i) = -p(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) + \nabla \cdot (k \nabla T) + S_e \tag{114}$$

dove:

$$S_x = \nabla \cdot \left(\mu \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \nabla \cdot \overrightarrow{V} \right) \tag{115}$$

$$S_y = \nabla \cdot \left(\mu \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \nabla \cdot \overrightarrow{V} \right) \tag{116}$$

$$S_z = \nabla \cdot \left(\mu \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \nabla \cdot \overrightarrow{V} \right) \tag{117}$$

$$\begin{aligned} S_e = {} & 2\mu \left((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2 \right) \\ & + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \tag{118}$$

Questo rappresenta un sistema di 5 equazioni differenziali in 7 incognite (p, ρ, T, i, u, v, w). Due relazioni aggiuntive possono essere introdotte tramite due equazioni di stato, ad esempio per un gas perfetto:

$$\frac{p}{\rho} = RT \tag{119}$$

$$i = c_v T \tag{120}$$

Tutte queste equazioni possono essere viste come forme particolari di un'equazione base:

$$\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \tag{121}$$

dove i vari termini rappresentano rispettivamente:

$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$	variazione di $\rho\phi$ nell'unità di tempo
$\nabla \cdot (\rho\overrightarrow{V}\phi)$	termine dovuto alla convezione
$\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi)$	termine dovuto alla diffusione
S_ϕ	termine sorgente

7.2 Equazioni: forma integrale

Possiamo passare dalla forma differenziale a quella integrale integrando le equazioni precedenti in un volumetto di controllo generico $\forall$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\forall \rho d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (\rho\overrightarrow{V})d\forall = 0 \tag{122}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\forall \rho u d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (\rho\overrightarrow{V}u)d\forall = -\int_\forall \frac{\partial p}{\partial x}d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (\mu\nabla u)\, d\forall + \int_\forall S_x d\forall \tag{123}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\forall \rho v d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (\rho\overrightarrow{V}v)d\forall = -\int_\forall \frac{\partial p}{\partial y}d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (\mu\nabla v)\, d\forall + \int_\forall S_y d\forall \tag{124}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\forall \rho w d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (\rho\overrightarrow{V}w)d\forall = -\int_\forall \frac{\partial p}{\partial z}d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (\mu\nabla w)\, d\forall + \int_\forall S_z d\forall \tag{125}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\forall \rho i d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (\rho\overrightarrow{V}i)d\forall = -\int_\forall p(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})d\forall + \int_\forall \nabla \cdot (k\nabla T)d\forall + \int_\forall S_e d\forall \tag{126}$$

I termini dovuti alla convezione e diffusione vengono solitamente scritti come flussi attraverso le supervici del volumetto di controllo, utilizzando il teorema di Gauss (o della divergenza), per il quale:

$$\int_\forall \nabla \cdot \overrightarrow{F} d\forall = \int_\Omega \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} d\Omega \tag{127}$$

dove Ω rappresenta il contorno del volume di controllo $\forall$ e $\overrightarrow{n}$ il versore perpendicolare allo stesso e uscente. In questo modo le equazioni di Navier-Stokes diventano:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho d\forall + \int_{\Omega}(\rho\overrightarrow{V})\cdot\overrightarrow{n}d\Omega = 0 \tag{128}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho u d\forall + \int_{\Omega}(\rho\overrightarrow{V}u)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega = -\int_{\forall}\frac{\partial p}{\partial x}d\forall + \int_{\Omega}(\mu\nabla u)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega + \int_{\forall}S_x d\forall \tag{129}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho v d\forall + \int_{\Omega}(\rho\overrightarrow{V}v)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega = -\int_{\forall}\frac{\partial p}{\partial y}d\forall + \int_{\Omega}(\mu\nabla v)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega + \int_{\forall}S_y d\forall \tag{130}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho w d\forall + \int_{\Omega}(\rho\overrightarrow{V}w)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega = -\int_{\forall}\frac{\partial p}{\partial z}d\forall + \int_{\Omega}(\mu\nabla w)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega + \int_{\forall}S_z d\forall \tag{131}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho i d\forall + \int_{\Omega}(\rho\overrightarrow{V}i)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega = -\int_{\forall}p(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})d\forall + \int_{\Omega}(k\nabla T)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega + \int_{\forall}S_e d\forall \tag{132}$$

Anche in questo caso queste equazioni possono essere viste come forme particolari di un'equazione base:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho\phi d\forall + \int_{\Omega}(\rho\overrightarrow{V}\phi)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega = \int_{\Omega}(\Gamma\nabla\phi)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega + \int_{\forall}S_{\phi}d\forall \tag{133}$$

dove i vari termini rappresentano rispettivamente:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall}\rho\phi)d\forall$	variazione di $\rho\phi$ nell'unità di tempo nel volume di controllo
$\int_{\Omega}(\rho\overrightarrow{V}\phi)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega$	flusso di $\rho\phi$ attraverso la superficie (convezione)
$\int_{\Omega}(\Gamma\nabla\phi)\cdot\overrightarrow{n}d\Omega$	flusso di $\Gamma\nabla\phi$ (diffusione)
$\int_{\forall}S_{\phi}d\forall$	termine sorgente (produzione/distruzione)