Corso di
Modellazione di Sistemi a Fluido
—
Equazioni Differenziali Ordinarie

Tiziano Ghisu

September 25, 2018

Contents

1 Introduzione

Le equazioni differenziali sono fondamentali per la risoluzione di problemi scientifici e ingegneristici e vengono spessissimo utilizzate per descriverne il funzionamento.

ES 1. MECCANICA APPLICATA - SISTEMA MASSA-MOLLA

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \tag{1}$$

dove m la massa attaccata la molla, β il coefficiente d'attrito scorso, k la costante elastica della molla e F la forza esterna agente su m.

In questa equazione si possono distinguere:

- la variabile indipendente (t)
- la variabile dipendente (x), che rappresenta l'incognita del problema

Questa un'equazione differenziale ordinaria, in quanto a una sola variabile indipendente (il tempo t). Per essere risolta deve essere corredata da un set opportuno di condizioni al contorno.

ES 2. BARRETTA MONODIMENSIONALE - TRASMISSIONE CALORE

Facendo una serie di ipotesi (problema monodimensionale, scambio termico solo attraverso le estremit della barretta)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2};\ \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_v} \tag{2}$$

In questa equazione si possono distinguere:

- le variabili indipendenti (t e x)
- la variabile dipendente (T), che rappresenta l'incognita del problema

Si tratta in questo cao di un'equazione alle derivate PARZIALI (PDE). Anche in questo caso devo fornire un opportuno set di condizioni al contorno.

ES 3. SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Nel solido di Saint Venant (barretta a sezione costante sottoposta a momento torcente ad un'estremità e vincolata all'altra estremità) il campo degli sforzi può essere ricavato risolvendo l'equazione del potenziale

$$\nabla^2\Phi = -f;\ \text{dove } \tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \text{ e } \tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{3}$$

- le variabili indipendenti (x e y)
- la variabile dipendente (Φ), che rappresenta l'incognita del problema

Anhe questa rappresenta un'equazione alle derivate parziali (PDE), che deve essere risolta fornendo opportune condizioni al contorno.

ES 4. FLUSSO EULERIANO 2D (forzi viscosi trascurabili)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial \rho h_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho u h_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho v h_0}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4}
$$

dove ρ rappresenta la densità, u e v le componenti della velocità, p la pressione e h_0 l'entalpia totale del fluido. Queste sono tutte variabili dipendenti, mentre le variabili indipendenti sono le coordinate spaziali x e y e quella temporale t.

Questo è un sistema di equazioni alle derivate parziali (accoppiate) che bisogna ancora una volta risolvere con delle opportune condizioni al contorno.

Non sempre le equazioni differenziali che descrivono un determinato fenomeno fisico possono essere risolte analiticamente, vuoi per la complicazione delle equazioni stesse, le condizioni al contorno, il dominio fisico, o tutti questi motivi. Dobbiamo in questi casi cercare una soluzione numerica e questo è quello che faremo in questo corso.

2 Definizioni

Equazioni differenziali ordinarie. Si tratta di equazioni che esprimono una relazione tra una o più variabili dipendenti e UNA SOLA variabile indipendente

$$y^m(x) = f(y^{m-1}(x), y^{m-2}(x), \ldots, y(x), x) \tag{5}$$

dove:

- x è la variabile indipendente
- y è la variabile dipendente

L'**ordine** dell' equazione differenziale è rappresentato dall'ordine più alto in cui compare la derivata di y. Un esempio di equazione differenziale del primo ordine è:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(y(x), x) \tag{6}$$

Dover integrare questa equazione porta alla necessità di trovare il valore di una costante arbitraria. Questa viene definita **condizione iniziale** o **condizione al contorno**. Devo anche fornire un **dominio di definizione**. Risolvere l'equazione differenziale significa trovare la funzione $y(x)$ che soddisfi l'equazione differenziale e le condizioni al contorno.

Riassumendo, il problema differenziale diventa:

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(y(x), x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{7}$$

Nel caso di equazioni differenziali d ordine superiore posso poi avere:

- PROBLEMI AI VALORI INIZIALI

$$\begin{cases} \frac{d^2y(x)}{dx^2} = y''(x) = f(y'(x), y(x), x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a, \ y'(a) = \mu_a \end{cases} \tag{8}$$

- PROBLEMI AI LIMITI (o AL CONTORNO)

$$\begin{cases} \frac{d^2y(x)}{dx^2} = y''(x) = f(y'(x), y(x), x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a, \ y(b) = y_b \end{cases} \tag{9}$$

Le equazioni differenziali possono poi essere **lineari** oppure **non lineari**.

- NONLINEARE

$$y'(x) + g(x, y(x))y(x) = f(x, y(x)) \tag{10}$$

- LINEARE

$$y'(x) + g(x)y(x) = f(x) \tag{11}$$

In questo caso g e f sono funzioni della sola sola variabile indipendente x.

3 Dal problema reale al modello numerico

1. DEFINIZIONE PROBLEMA REALE: Evidenziare tutti gli aspetti importanti del problema, quali parametri, geometria, condizioni al contorno, condizioni di funzionamento.

2. DEFINIZIONE DEL MODELLO FISICO SEMPLIFICATO: Identificazione dei soli parametri effettivamente importanti del problema.

3. ELABORAZIONE DEL MODELLO MATEMATICO: Identificazione delle equazioni che descrivono il modello fisico definito al punto 2.

4. COSTRUZIONE DEL MODELLO NUMERICO: Applicazione delle metodologie del calcolo numerico alle equazioni definite al punto 3. Questo consiste spesso nella scrittura di un programma di calcolo che mi fornirà la soluzione numerica.

FONDAMENTALE è la VALIDAZIONE, ossia la verifica dell'adeguato funzionamento del modello numerico. Questa può essere fatta tramite:

- confronto con soluzione analitica (caso semplice)
- confronto con dati sperimentali (caso complesso)

<u>Esempio: Conduzione di calore in una barretta di metallo</u>

1. DEFINIZIONE PROBLEMA REALE. Ho una barretta con temperature fissate agli estremi e voglio conoscere la distribuzione di temperatura T(x,y,z,t), che dipenderà sia dalla conduzione termica (funzione del coefficiente di conducibilità termica k) che dallo scambio termico per convezione con l'aria circostante.

2. DEFINIZIONE DEL MODELLO FISICO SEMPLIFICATO. Posso ipotizzare il problema monodimensionale, e quindi che la temperatura T sia solo funzione di x e del tempo t, e anche ipotizzare k costante, e trascurare la convezione con l'aria circostante.

3. ELABORAZIONE DEL MODELLO MATEMATICO. Prendiamo un piccolo elemento della barretta (elemento infinitesimo) e applihiamo il primo principio della termodinamica per sistemi chiusi:

$$\Delta U = Q - L \tag{12}$$

$$L = 0 \tag{13}$$

$$\Delta U = \rho c_v V \Delta T = \rho c_v V \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial t} dT \tag{14}$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_0}^{t_1} -k(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\frac{\Delta x}{2}) A dt \int_{t_0}^{t_1} +k(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\frac{\Delta x}{2}) A dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} k(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Delta x) A dt \end{aligned} \tag{15}$$

Pertanto l'equazione diventa:

$$\rho c_v V \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial t} dt = \int_{t_0}^{t_1} k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} A \Delta x dt \tag{16}$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{17}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \text{ con } \alpha = \frac{k}{\rho c_v} \tag{18}$$

4. COSTRUZIONE DEL MODELLO NUMERICO. Devo ora trovare il modo di risolvere numericamente l'equazione differenziale definita al punto 3.

4 Problemi ai valori iniziali e al contorno

4.1 Problemi con valori iniziali

Riprendiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(y(x), x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{19}$$

Si tratta di un problema differenziale del primo ordine, perciò posso definire una sola condizione al contorno. Ricordiamo che il problema è lineare se:

$$f(x, y(x)) = a(x)y(x) + b(x) \tag{20}$$

Definizione: Continuità secondo Lipschitz Una funzione $f(x, y(x))$ è continua secondo Lipschitz se dato un intervallo esiste una costante L tale che

$$|f(x, u^*) - f(x, u)| < L|u - u^*| \tag{21}$$

Questa è una condizione più forte della semplice continuità. Infatti:

- per una funzione continua $|f(x, u^*) - f(x, u)| \to 0$ per $|u - u^*| \to 0$
- per una funzione Lipschitziana $|f(x, u^*) - f(x, u)| = O(|u - u^*|)$

Perchè questo è importante? Perchè la lipschitzianità di una funzione ci assicura che la soluzione esista e sia unica. Vediamo due casi.

- $u(x)' = g(x)$. In questo caso le curve soluzione sono parallele e la loro pendenza non dipende da u
- $u(x)' = \lambda u(x)$. Le curve soluzione convergono o divergono a seconda vel valore negativo o positivo di λ.

4.2 Problemi con valori al contorno

Posso avere problemi con valori al contorno solo se l'equazione differenziale è almeno di ordine 2. Per esempio:

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \tag{22}$$

L'espressione generale del problema differenziale è:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + kx(t) = F(t); \text{ per } x \in [a, b] \\ + \text{ condizioni al contorno} \end{cases} \tag{23}$$

In generale posso avere 2 tipi di condizioni al contorno:

- DIRICHLET: $T(a) = T_a$ o $T(b) = T_b$

- NEUMANN: $\frac{\partial T}{\partial x}(a) = \mu_a$ o $\frac{\partial T}{\partial x}(b) = \mu_b$

Qual è il significato di queste due condizioni al contorno?

- DIRICHLET: La T è fissata. Significa che disponiamo di un serbatoio di energia termica infinita posto a contatto con l'estremo della barretta.
- NEUMANN: La barretta è a contatto con un sistema capace di regolare lo scambio termico con la barretta.

Quando è invece che la soluzione è unica?

- DIRICHLET + DIRICHLET: <u>OK</u>
- DIRICHLET + NEUMANN: <u>OK</u>
- NEUMANN + NEUMANN: <u>NO</u>

La soluzione di un'equazione del tipo $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ é una retta, pertanto con 2 condizioni al contorno di NEUMANN posso avere:

- inifinite soluzioni, se $\mu_a = \mu_b$
- zero soluzioni, se $\mu_a \neq \mu_b$

5 Soluzione numerica di equazioni differenziali

Esistono tre approcci:

- differenze finite
- volumi finiti
- elementi finiti

In questo corso tratteremo solo i primi due approcci. Le differenze finite sono il primo metodo studiato, i volumi finiti sono invece il metodo più generale e utilizzato in fluidodinamica numerica.

Riprendiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t) & ; \text{dove } t \in [a, b] \\ & \text{oppure } t \in [0, \infty] \\ & \text{oppure } t \geq 0 \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{24}$$

E cerchiamo una soluzione numerica al problema. Questo si fa "trasformando" l'equazione differenzale in un'equazione algebrica e risolvendo il problema algebrico.

5.1 Metodo differenziale

1. Definisco una discretizzazione della variabile indipendente

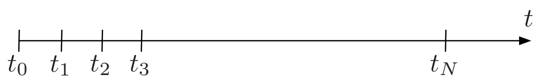

Figure 1: Discretizzazione della variabile indipendente t

$$t_i = i\Delta t, \text{ con } i = 0, \ldots, N \tag{25}$$

2. Ricavo un'espressione approssimata della derivata
3. La sostituisco nell'equazione
4. Risolvo l'equazione algebrica

5.1.1 Metodo di Eulero in avanti (Forward Euler)

Riprendiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t) & ; \text{dove } t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{26}$$

Proviamo ad approssimare la derivata prima con il rapporto incrementale:

$$y'(t) \simeq \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \tag{27}$$

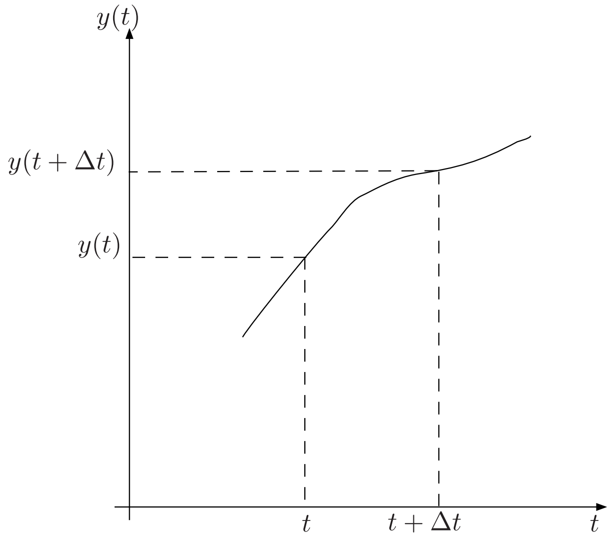

Figure 2: Approssimazione della derivata come rapporto incrementale

Posso ottenere la stessa cosa approssimazione anche tramite uno sviluppo in serie di Taylor:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + y'(t)\Delta t + y''(t)\frac{\Delta t^2}{2} + y'''(t)\frac{\Delta t^3}{3!} + O(\Delta t^4) \tag{28}$$

$$y'(t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} - y''(t)\frac{\Delta t}{2} - y'''(t)\frac{\Delta t^2}{3!} - O(\Delta t^3) \tag{29}$$

$$y'(t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{30}$$

In questo modo stiamo anche evidenziando che l'errore che si commette nell'approssimare la derivata con il rapporto incrementale è del primo oridine ($O(\Delta t)$).

Sostituiamo quindi nel problema di Cauchy e otteniamo

$$y(t+\Delta t) = t(t) + (\Delta t) f(t, y(t)) \tag{31}$$

oppure

$$y(t_{j+1}) = t(t_j) + (\Delta t) f(t_j, y_j) \tag{32}$$

Questa equazione algebrica può essere applicata a tutti i punti del dominio, cioè per $j = 1, ..N$, mentre la soluzione al tempo t_0 è nota dalle condizioni al contorno.

<u>ESEMPIO</u>

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t),\ \lambda = 3.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La **soluzione esatta** è:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\lambda dt \tag{33}$$
$$ln(y) = -\lambda t + c \tag{34}$$
$$y(t) = ke^{-\lambda t} \tag{35}$$

Utilizzando la condizione al contorno ($y(0) = 1$), ottengo k=1.
La **soluzione numerica** è

$$\Big\{ t_j = j\Delta t, \text{ per} j = 0, 1, \ldots, N y_{j+1} = y_j - \lambda(\Delta t)y_j = (1 - \lambda\Delta t)y_j \tag{36}$$

Posso quindi risolvere con un metodo che vedremo poi chiameremo AD AVANZAMENTO.

$$\begin{aligned}
y_1 &= (1 - \lambda\Delta t)y_0 \\
y_2 &= (1 - \lambda\Delta t)y_1 \\
y_3 &= (1 - \lambda\Delta t)y_2 \\
y_4 &= (1 - \lambda\Delta t)y_3 \\
y_5 &= (1 - \lambda\Delta t)y_4 \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{37}$$

Posso scrivere la stessa soluzione anche in forma matriciale (per N=5):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(1-\lambda\Delta t) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\lambda\Delta t) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\lambda\Delta t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-\lambda\Delta t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(1-\lambda\Delta t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Devo risolvere questo sistema algebrico per trovare la soluzione numerica del problema differenziale di Cauchy. Questo metodo di soluzione viene detto DIRETTO.

Mi chiedo ora se questo problema ammette soluzione. Perchè la risposta sia affermativa, la matrice deve essere invertibile, e per essere invertibile è sufficiente che sia diagonale dominante

$$\begin{aligned}
1 &\geq \frac{1}{|1-\lambda}\Delta t| \\
-1l &\frac{1}{e1-\lambda}\Delta t \leq 1
\end{aligned} \tag{39}$$

Essendo Δt positivo la seconda diseguaglianza è sempre verificata, quindi la condizione per l'invertibilità diventa:

$$\begin{aligned}
-\lambda\Delta t &\geq -1 \\
\Delta t &\leq \frac{2}{\lambda}
\end{aligned} \tag{40}$$

5.1.2 Metodo di Eulero all'indietro (Backward Euler)

Posso anche approssimare la derivata con un approssimazione *all'indietro*:

$$y'(t) \simeq \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} \tag{41}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale ottengo:

$$y_j - y_{j-1} = f(t_j, y_j)\Delta t \tag{42}$$

<u>ESEMPIO</u>. Riprendendo l'equazione

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), \ \lambda = 3.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Posso risolvere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{y_0}{(1 + \lambda \Delta t)} \\ y_2 &= \frac{y_1}{(1 + \lambda \Delta t)} \\ y_3 &= \frac{y_2}{(1 + \lambda \Delta t)} \\ y_4 &= \frac{y_3}{(1 + \lambda \Delta t)} \\ y_5 &= \frac{y_4}{(1 + \lambda \Delta t)} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{43}$$

In forma matriciale (per N=5):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(1+\lambda\Delta t)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(1+\lambda\Delta t)} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(1+\lambda\Delta t)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{(1+\lambda\Delta t)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \frac{1}{(1+\lambda\Delta t)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Quando il sistema algebrico ammette soluzione? La matrice deve essere diagonale dominante, quindi:

$$1 \geq \frac{1}{(1 + \lambda \Delta t)} \tag{45}$$

Questa disequazione è sempre verificata, quindi Eulero all'indietro risulta un metodo sempre stabile, contrariamente a Eulero in avanti che non lo era. Quale metodo scelgo?

5.1.3 Metodo del punto medio (Leapfrog)

Si ottiene approssimando la derivata in questo modo:

$$y'(t) \simeq \frac{y(t+\Delta t) - y(t-\Delta t)}{2\Delta t} \tag{46}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale ottengo:

$$y_{j+1} - y_{j-1} = f(t_j, y_j)2\Delta t \tag{47}$$

In questo caso ho bisogno di 2 soluzioni precedenti per poter applicare il metodo.

ESEMPIO. Riprendendo l'equazione

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), \ \lambda = 3.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Posso risolvere nel seguente modo:

$$\begin{gathered} y_2 = y_0 - \lambda y_1(2\Delta t) \\ y_3 = y_1 - \lambda y_2(2\Delta t) \\ y_4 = y_2 - \lambda y_3(2\Delta t) \\ y_5 = y_3 - \lambda y_4(2\Delta t) \\ \dots \end{gathered} \tag{48}$$

In forma matriciale (per N=5):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (+\lambda 2\Delta t) & 1 & 0 & 0 \\ -1 & (+\lambda 2\Delta t) & 1 & 0 \\ 0 & -1 & (+\lambda 2\Delta t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 - u_1(2\lambda\Delta t) \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

5.2 Metodo integrale

Esiste un altro modo in cui posso giungere alla stessa equazione algebrica, il metodo integrale. Ripartiamo dal problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t) \quad ; \text{dove } t \geq 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{50}$$

Se integro l'equazione differenziale ottengo:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(t)dt \tag{51}$$

Posso quindi trovare un'approssimazione numerica per l'integrale:

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t)dt \simeq f(t, y(t))\Delta t \tag{52}$$

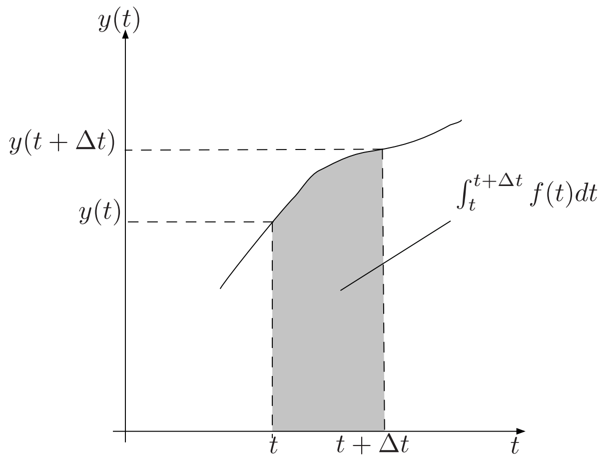

Figure 3: Metodo integrale

5.2.1 Metodo dei trapezi

Posso anche utilizzare un'altra approssimazione numerica per l'integrale:

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t)dt \simeq (\frac{1}{2}f(t, y(t)) + \frac{1}{2}f(t + \Delta t, y(t + \Delta t)))\Delta t \tag{53}$$

Ottengo perciò:

$$y_{j+1} - y_j = \frac{1}{2}(f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})\Delta t \tag{54}$$

ESEMPIO. Riprendendo l'equazione

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t), \; \lambda = 3.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y_{j+1} - y_j = -\frac{1}{2}\lambda(f_j + f_{j+1})\Delta t \tag{55}$$

$$y_{j+1}(1 + \frac{\lambda}{2}\Delta t) = y_j(1 - \frac{\lambda}{2}\Delta t) \tag{56}$$

Posso risolvere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0\frac{1 - \frac{\lambda}{2}\Delta t}{1 + \frac{\lambda}{2}\Delta t} \\ y_2 &= y_1\frac{1 - \frac{\lambda}{2}\Delta t}{1 + \frac{\lambda}{2}\Delta t} \\ y_3 &= y_2\frac{1 - \frac{\lambda}{2}\Delta t}{1 + \frac{\lambda}{2}\Delta t} \\ y_4 &= y_3\frac{1 - \frac{\lambda}{2}\Delta t}{1 + \frac{\lambda}{2}\Delta t} \\ y_5 &= y_4\frac{1 - \frac{\lambda}{2}\Delta t}{1 + \frac{\lambda}{2}\Delta t} \\ &\dots \end{aligned} \tag{57}$$

In forma matriciale (per N=5):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\frac{\lambda}{2}\Delta t}{1+\frac{\lambda}{2}\Delta t} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\frac{\lambda}{2}\Delta t}{1+\frac{\lambda}{2}\Delta t} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\frac{\lambda}{2}\Delta t}{1+\frac{\lambda}{2}\Delta t} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\frac{\lambda}{2}\Delta t}{1+\frac{\lambda}{2}\Delta t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0\frac{1-\frac{\lambda}{2}\Delta t}{1+\frac{\lambda}{2}\Delta t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

Quando il sistema algebrico ammette soluzione? La matrice deve essere diagonale dominante, quindi:

$$1 \geq \frac{1 - \frac{\lambda}{2}\Delta t}{1 + \frac{\lambda}{2}\Delta t} \tag{59}$$

Questa disequazione è sempre verificata, quindi anche il metodo dei trapezi è sempre stabile, come il metodo di Eulero all'indietro, e contrariamente al metodo di Eulero in avanti.

5.3 Classificazione

Posso distinguere tra:

- METODI DIRETTI. Richiedono la risoluzione del sistema matriciale
- METODI AD AVANZAMENTO. Risolvo un'equazione differenziale per ogni intervallo temporale

ma anche tra:

- SCHEMI ESPLICITI. La soluzione all'istante t_{j+1} dipende solo dalla soluzione all'istante t_j (o a istanti precedenti)
- SCHEMI IMPLICITI. La soluzione all'istante t_{j+1} dipende anche da se stessa

Posso inoltre distinguere tra:

- SCHEMI A UN PASSO. La soluzione dipende solo dalla soluzione al tempo t_j
- SCHEMI A PIÙ PASSI. La soluzione dipende dalla soluzione al più tempi.

In generale, i metodi impliciti sono più costosi numericamente rispetto a quelli espliciti, i metodi a più passi sono pi'u dispendiosi rispetto ai metodi a un passo in termini di memoria.

5.4 Discretizzazione delle derivate: metodo dei coefficienti indeterminati

Indichiamo con $Du(x)$ una approssimazione numerica per la derivata di ordine generico della funzione $u(x)$. Supponiamo di aver discretizzato la variabile indipendente x con una discretizzazione regolare con passo $h = \Delta x$

Posso scrivere la approssimazione in funzione dei valori della funzione in una serie di punti vicini.

$$Du(x) = au(x-h) + bu(x) + cu(x+h) \tag{60}$$

Scriviamo lo sciluppo in serie di Taylor della funzione u nei diversi punti:

$$\begin{cases} u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} + u'''(x)\frac{h^3}{3!} + u^{iv}(x)\frac{h^4}{4!} + O(h^5) \\ u(x) = u(x) \\ u(x-h) = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} - u'''(x)\frac{h^3}{3!} + u^{iv}(x)\frac{h^4}{4!} + O(h^5) \end{cases} \tag{61}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} Du(x) = au(x-h) + bu(x) + cu(x+h) = \\ = (a+b+c)u(x) + (c-a)u'(x)h + (a+c)u''(x)\frac{h^2}{2} + \\ \cdots + (c-a)u'''(x)\frac{h^3}{3!} + (a+c)u'''(x)\frac{h^4}{4!} + O(h^5) \end{aligned} \tag{62}$$

Supponiamo di voler trovare una approssimazione numerica per la derivata prima. In questo caso dobbiamo imporre:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c-a=\frac{1}{h} \end{cases} \tag{63}$$

Soddisfacendo queste due condizioni avremo:

$$Du(x)=u'(x)+(a+c)u''(x)\frac{h^2}{2}+u'''(x)\frac{h^2}{3!}+O(h^4) \tag{64}$$

Questa approssimazione è di ordine 1, perchè l'errore è $O(h)$, in quanto $(a+c)h^2$ è $O(h)$.

Se invece vogliamo ottenere un'approssimazione di ordine superiore, possiamo imporre che anche $c-a=0$. In questo modo:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c-a=\frac{1}{h} \\ a+c=0 \end{cases} \tag{65}$$

$$Du(x)=u'(x)+u'''(x)\frac{h^2}{3!}+O(h^4) \tag{66}$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{h} \\ b=0 \\ c=\frac{1}{2h} \end{cases} \tag{67}$$

Quindi:

$$Du(x)=\frac{1}{2h}(u(x+h)-u(x-h))=u'(x)+O(h^2) \tag{68}$$

Se non avessi posto $a+c=0$ potrei avere altre approssimazioni della derivata prima (del primo ordine)

$$\begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{1}{h} \\ c=\frac{1}{h} \end{cases} \tag{69}$$

$$Du(x)=\frac{1}{h}(u(x+h)-u(x))=u'(x)+O(h) \tag{70}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{h} \\ b = \frac{1}{h} \\ c = 0 \end{cases} \tag{71}$$

$$Du(x) = \frac{1}{h}(u(x) - u(x-h)) = u'(x) + O(h) \tag{72}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{h} \\ b = -\frac{3}{h} \\ c = \frac{2}{h} \end{cases} \tag{73}$$

$$Du(x) = \frac{1}{h}(2u(x+h) - 3u(x) + u(x-h)) = u'(x) + O(h) \tag{74}$$

5.4.1 Derivata seconda

In questo caso devo imporre (vedi eq. 62):

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ c - a = 0 \\ a + c = \frac{2}{h^2} \end{cases} \tag{75}$$

Risolvendo ottengo:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{h^2} \\ b = -\frac{2}{h^2} \\ c = \frac{1}{h^2} \end{cases} \tag{76}$$

Pertanto:

$$Du(x) = \frac{1}{h^2}(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)) = u''(x) + O(h^2) \tag{77}$$

Questa è un'approssimazione del secondo ordine. E se volessi ottenere un'approssimazione di ordine superiore?

6 Convergenza, consistenza e stabilità

Riprendiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(y(x), x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{78}$$

La soluzione esatta sarà:

$$\begin{cases} y(x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{79}$$

Supponiamo di aver trovato la soluzione numerica:

$$\begin{cases} u(x_j); \text{ per } x_j = a + j\Delta x, \text{ per } j = 0, 1, \cdots, N \\ u(a) = y_a \end{cases} \tag{80}$$

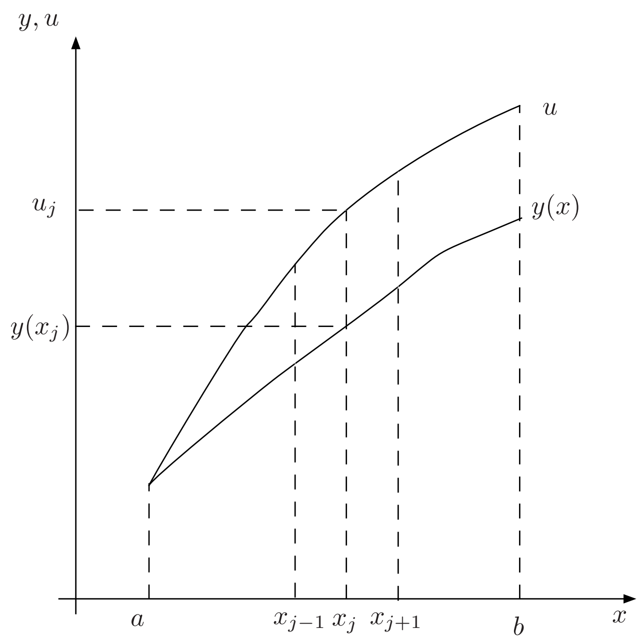

Figure 4: Errore globale

L'errore globale viene definito come la differenza tra la soluzione esatta in un punto e la soluzione numerica:

$$e_j = |u_j - y(x_j)| \tag{81}$$

Un metodo numerico viene detto convergente se l'errore globale tende a zero quando $\Delta x = h$ tede a zero

$$e_j = |u_j - y(x_j)| \leq Ch^p \ \forall j \tag{82}$$

Nella disuguaglianza precendente p rappresenta l'ordine di convergenza. La proprietà di convergenza è fondamentale per uno schema numerico. Infatti, se uno schema numerico è convergente, posso ridurre a mio piacimento l'errore globale diminuendo il passo di discretizzazione. In questo modo la soluzione numerica diventa un'approssimazione accettabile di quella esatta.

In realtà non è così semplice verificare la convergenza di uno schema numerico (lo si può are in maniera diretta solo in casi molto semplici, di cui conosco la soluzione). Nei casi complessi questo non è possibile, quindi si studiano altre proprietà più semplici da dimostrare.

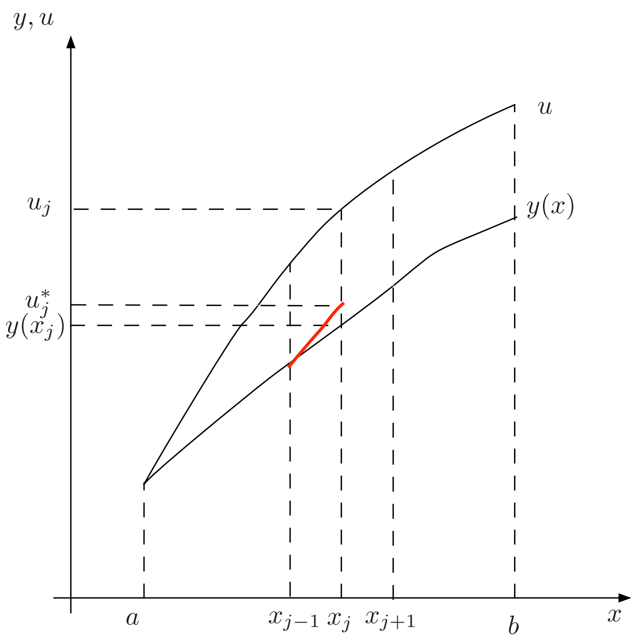

Figure 5: Errore globale e errore locale

Nella figura, u_j^* rappresenta la soluzione che otterrei se applicassi lo schema numerico a partire dalla soluzione esatta in x_{j-1}.

$$\text{errore globale } e_j = |u_j - y(x_j)| = |(u_j - u_j^*) + (u_j^* - y(x_j))| \tag{83}$$

Ho pertanto diviso l'errore globale in due termini:

- $(u_j^* - y(x_j))$ rappresenta l'errore locale di avanzamento, cioè l'errore dovuto ad un passo di avanzamento dello schema numerico
- $(u_j - u_j^*)$ rappresenta l'errore dovuto alla propagazione dell'errore presente al passo precedente.

I due errori sono associati a 2 proprietà fondamentali degli schemi numerici, CONSISTENZA e STABILITÀ. Il TEOREMA DI LAX ci assicura che se riesco ad avere uno schema numerico CONSISTENTE e STABILE (e quindi a limitare errore locale e errore di propagazione) ottengo anche la stabilità dello stesso schema numerico.

6.1 Sull'errore locale di avanzamento

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(y(x), x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{84}$$

Se risolviamo questo problema di Cauchy con Eulero Esplicito:

$$u_j^* = y(x_{j-1}) + f(x_{j-1}, y(x_{j-1}))h = y_{j-1} + f(x_{j-1}, y_{j-1})h \tag{85}$$

Posso ovviamente scrivere y_j come sviluppo in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} y_j &= y_{j-1} + f(x_{j-1}, y_{j-1})h + f'(x_{j-1}, y_{j-1})\frac{h^2}{2} + O(h^3) \\ &= y_{j-1} + f(x_{j-1}, y_{j-1})h + f'(\xi), y(\xi))\frac{h^2}{2} \end{aligned} \tag{86}$$

Pertanto

$$u_j^* - y_j = -f'(\xi), y(\xi))\frac{h^2}{2} = -y''(\xi)\frac{h^2}{2} \tag{87}$$

L'errore locale di troncamento viene definito come:

$$\tau_j = \frac{|u_j^* - y_j|}{h} = f'(\xi), y(\xi))\frac{h}{2} \tag{88}$$

Quale è il significato?

$$\tau_j = \frac{|u_j^* - y_j|}{h} = \frac{|y_{j-1} + f(x_{j-1}, y_{j-1})h - y_j|}{h}$$
$$= |f(x_{j-1}, y_{j-1}) - \frac{y_j - y_{j-1}}{h}| = |y'(x_{j-1}) - \frac{y_j - y_{j-1}}{h}| \quad (89)$$

Quindi l'errore locale di troncamento rappresenza la differenza tra la derivata esatta ($y'(x_{j-1})$) e quella approssimata calcolata dallo scherma numerico ($\frac{y_j - y_{j-1}}{h}$).
In generale:
PROBLEMA DIFFERENZIALE:

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x), x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad (90)$$

PROBLEMA NUMERICO:

$$\begin{cases} Du(x, y, h) = \Phi(x, u, h) \\ u(a) = y_a \end{cases} \quad (91)$$

$$\tau(h) = Du(x, y, h) - \Phi(x, u, h) \quad (92)$$

Nel caso di Eulero in avanti

$$Du(x, y, h) = \frac{y(x + h) - y(x)}{h} \quad (93)$$
$$\tau(h) = \frac{y(x + h) - y(x)}{h} - \Phi(x, u, h) \quad (94)$$

6.2 Consistenza degli schemi numerici un passo

Definizione: uno schema si dice consistente se quando il passo di discretizzazione tende a zero ($h \to 0$) Anche l'errore di troncamento tende a zero (($\tau(h) \to 0$).
Esempio. Eulero in avanti

$$\tau(h) = Du(x, y, h) - \Phi(x, u, h) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h} - f(x_j, y_j) =$$
$$= \frac{y'(x_j, y_j)h + y''(x_j, y_j)\frac{h^2}{2} + O(h^3)}{h} - f(x_j, y_j) \quad (95)$$

Chiaramente $y'(x_j, y_j) = f(x_j, y_j)$, perciò

$$\tau(h) = y''(x_j, y_j)\frac{h}{2} + O(h^2) = O(h) \quad (96)$$

Quindi lo schema numerico Eulero in avanti è consistente di ORDINE 1.
Esempio. Punto Medio

$$\tau(h) = Du(x, y, h) - \Phi(x, u, h) = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} - f(x_j, y_j) \tag{97}$$

Sviluppando in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + y_j' h + y_j'' \frac{h^2}{2} + y_j''' \frac{h^3}{3!} + O(h^4) \\ y_{j-1} &= y_j - y_j' h + y_j'' \frac{h^2}{2} - y_j''' \frac{h^3}{3!} + O(h^4) \\ y_{j+1} - yj - 1 &= 2hy_j' - \frac{h^3}{3} y_j''' + O(h^4) \end{aligned} \tag{98}$$

Quindi:

$$\tau(h) = y_j' - f(x_j, y_j) - y_j''' \frac{h^2}{6} + O(h^3) = O(h^2) \tag{99}$$

Quindi lo schema numerico del punto medio è consistente di ORDINE 2.
Esempio. Eulero all'indietro

$$\tau(h) = Du(x, y, h) - \Phi(x, u, h) = \frac{y_j - y_j - 1}{h} - f(x_j, y_j) = \tag{100}$$

Sviluppando in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} y_{j-1} &= y_j - y_j' h + y_j'' \frac{h^2}{2} - y_j''' \frac{h^3}{3!} + O(h^4) \\ y_j - y_{j-1} &= y_j' h - y_j'' \frac{h^2}{2} + O(h^2) \end{aligned} \tag{101}$$

Quindi:

$$\tau(h) = y_j' - f(x_j, y_j) - y_j'' \frac{h}{2} + O(h^2) = O(h) \tag{102}$$

Quindi lo schema numerico Eulero all'indietro è consistente di ORDINE 1.

6.3 Stabilità di uno schema numerico

Uno schema numerico è detto stabile se per l'errore globale vale la proprietà

$$e(h) \leq C\tau(h) \tag{103}$$

Introduciamo due concetti importanti:

- La ZERO STABILITÀ studia il comportamento di uno schema numerico agli errori iniziali. Supponiamo che la successione u_j sia la soluzione numerica al problema differenziale. Supponiamo di perturbare la condizione iniziale di una quantità ϵ e che la successione v_j sia la soluzione numerica al nuovo problema differenziale (perturbato). Uno schema numerico è detto zero stabile se:

$$|u_j - v_j| \leq C\epsilon \ \forall j \tag{104}$$

- La STABILITÀ ASSOLUTA studia il comportamento di uno schema numerico per un particolare problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x), \ \lambda < 0, \ x \geq x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{105}$$

  Uno schema numerico è assolutamente stabile se:

$$\lim_{x_j \to \infty} u(x_j) = \lim_{x_j \to \infty} y(x_j) = 0 \tag{106}$$

Esempio. Eulero in avanti

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + h\lambda u_0 = u_0(1 + h\lambda) \\ u_j &= u_{j-1} + h\lambda u_j = u_j(1 + h\lambda) \end{aligned} \tag{107}$$

Il metodo è stabile se la serie tende a 0 per $x_j \to \infty$, quindi se $|1 + h\lambda| < 1$, che significa ($\lambda < 0$):

$$\begin{aligned} 1 + h\lambda &> -1 \\ h &< \frac{2}{\lambda} \end{aligned} \tag{108}$$

Posso anche studiare la stabilità di un metodo numerico nel piano complezzo $z = h\lambda$. La condizione di stabilità diventa:

$$|1 + z| < 1 \tag{109}$$

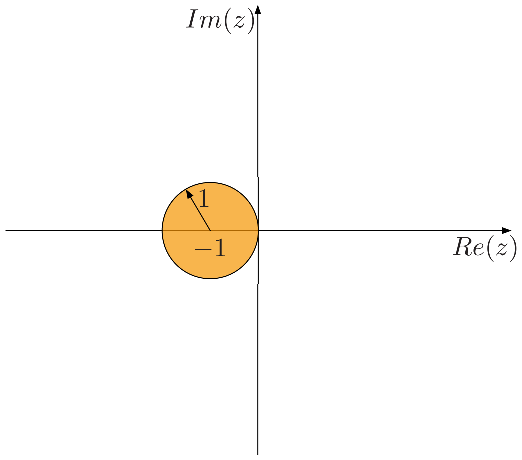

Figure 6: Regione di stabilità del metodo Eulero in avanti

6.4 Metodi di RUNGE-KUTTA

Si tratta di metodi espliciti ad un passo, con un elevato grado di accuratezza.

Riprendiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x), x); \text{ dove } x \in [a, b] \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{110}$$

Cerchiamo una soluzione numerica nella forma:

$$u_{j+1} = u_j + h\Phi(x, u, h) \tag{111}$$

Scrivo $\Phi(x, u, h)$ nel seguente modo:

$$\Phi(x, u, h) = a_1 f(x_j, u_j) + a_2 f(x_j + \overline{\Delta x}, u_j + \overline{\Delta u}) = a_1 k_1 + a_2 k_2 \tag{112}$$

Scrivo:

$$\begin{cases} \overline{\Delta x} = b_2 h \\ \overline{\Delta u} = b_2 h k_1 = b_2 h f(x_j, u_j) \end{cases} \tag{113}$$

Quindi:

$$\Phi(x, u, h) = a_1 f(x_j, u_j) + a_2 f(x_j + b_2 h, u_j + b_2 h f(x_j, y_j)) \tag{114}$$

Cosa deve accadere perchè il metodo sia consistente?

$$\frac{y_{j+1} - yj}{h} = a_1 f(x_j) + a_2 f(x_j + b_2 h, u_j + b_2 h f(x_j, u_j)) \tag{115}$$

dove:

$$\frac{y_{j+1} - yj}{h} = y'(x_j)\frac{h}{=} f(x_j) + f'(x_j)\frac{h}{2} + f''(x_j)\frac{h^2}{3!} + O(h^3) \tag{116}$$

$$f(x_j + b_2 h, u_j + b_2 h f(x_j, u_j)) = f(x_j) + b_2 h f'(x_j) + \frac{(b_2 h)^2}{2} f''(x_j) + O(h^3) \tag{117}$$

Pertanto:

$$f(x_j) + f'(x_j)\frac{h}{2} + f''(x_j)\frac{h^2}{3!} + O(h^3) = (a_1 + a_2) f(x_j) + a_2 b_2 h f'(x_j) + a_2 \frac{(b_2 h)^2}{2} f''(x_j) + O(h^3) \tag{118}$$

Da questo ricavo che affinchè il metodo sia consistente ($\tau(h) \to 0$ quando $h \to 0$)

$$a_1 + a_2 = 1; \tag{119}$$

Per esempio Eulero Esplicito ($a_1 = 1$, $a_2 = 0$) è consistente del primo ordine. Se invece voglio che il metodo sia del secondo ordine:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1; \\ a_2 b_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{120}$$

6.4.1 Metodo di Heun

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 = 1 \end{cases} \tag{121}$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}(f(x_j, y_j) + f(xj = h, y_j + h f(x_j, y_j)) \tag{122}$$

6.4.2 RK2

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 b_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{123}$$

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_j, y_j)) \tag{124}$$

6.4.3 Espressione generale

In generale un metodo RK viene scritto nel modo seguente:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{125}$$

dove

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j \tag{126}$$

I coefficienti vengono solitamente scritti in forma di tabella:

$$\begin{array}{c|cccc|} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}$$

Per l'<u>RK2</u>:

$$\begin{array}{c|cc|} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)) \tag{127}$$

Per l'<u>RK4</u>:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i+1}^{4} b_i k_i \tag{128}$$

$$\begin{array}{c|cccc|}
0 & 0 & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

dove:

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{i+1}^{4} a_{ij} k_j) \tag{129}$$

Quindi:

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4) \tag{130}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \tag{131}$$

6.5 Metodi MULTI-STEP

In questo caso l'ordine di convergenza elevato viene ottenuto utilizzando più punti precedenti a quello attuale. Si possono ottenere a partire dalla soluzione integrale il problema di Cauchy:

$$u_{j+r} - u_j = \int_{x_j}^{x_{x+r}} f(x,u)dx \tag{132}$$

La $f(x,u)$ può essere scritta come un polinomio di grado r $P_r(x,u)$ Il caso più semplice si ha se $r = 1$:

$$P_1(x,u) = [f(x_{j+1}, u_{j+1}) - f(x_j, u_j)] \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} + f(x_j, u_j) \tag{133}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}
u_{j+1} - u_j &= [f(x_{j+1}, u_{j+1}) - f(x_j, u_j)] \left.\frac{(x - x_j)^2}{2(x_{j+1} - x_j)}\right|_{x_j}^{x_{j+1}} + \\
&\cdots + f(x_j, u_j)(x)|_{x_j}^{x_{j+1}} = \\
&= [f(x_{j+1}, u_{j+1}) - f(x_j, u_j)] \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2(x_{j+1} - x_j)} + f(x_j, u_j)(x_{j+1} - x_j) = \\
&= [f(x_{j+1}, u_{j+1}) - f(x_j, u_j)] \frac{(x_{j+1} - x_j)}{2} + f(x_j, u_j)(x_{j+1} - x_j) = \\
&= [f(x_{j+1}, u_{j+1}) + f(x_j, u_j)] \frac{(x_{j+1} - x_j)}{2} = \\
&= [f(x_{j+1}, u_{j+1}) + f(x_j, u_j)] \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{134}$$

Ho quindi ottenuto il metodo dei trapezi.

I metodi multi-setp richiedono meno risorse di calcolo rispetto ai metodi RK ma più risorse di memoria.

L'espressione generale di un metodo multi-step è:

$$\sum_{k=0}^{r} a_k u_{j+k} = h \sum_{k=0}^{r} b_k f(x_{j+k}, u_{j+k}) \tag{135}$$

Nel metodo dei trapezi:

$$\begin{aligned}
r = 1;\ a_1 = 1,\ a_0 = -1 \\
b_1 = \frac{1}{2},\ b_0 = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{136}$$

Nel caso in cui $b_r = 0$ lo schema è esplicito. Inoltre solitamente si pone $a_r = 1$.

6.5.1 Metodi di Adam-Bashford

Si tratta di metodi espliciti ($b_r = 0$), in cui:

$$\begin{cases} a_r = 1 \\ a_{r-1} = -1 \\ a_k = 0, \text{ per } k = 0, \ldots, r-2 \end{cases} \tag{137}$$

<u>$r = 1$ (Eulero)</u>

$$u_{j+1} = u_j + hf(x_j, u_j) \tag{138}$$

<u>$r = 2$ (AB2)</u>

$$u_{j+2} = u_{j+1} + h\left(b_1 f(x_{j+1}, u_{j+1}) + b_0 f(x_j, y_j)\right) \tag{139}$$

$$b_1 = \frac{3}{2},\ b_0 = -\frac{1}{2} \tag{140}$$

<u>$r = 3$ (AB3)</u>

$$u_{j+3} = u_{j+2} + h\left(b_2 f(x_{j+2}, u_{j+2}) + b_1 f(x_{j+1}, u_{j+1}) + b_0 f(x_j, y_j)\right) \tag{141}$$

$$b_2 = \frac{23}{12},\ b_1 = -\frac{16}{12},\ b_0 = \frac{5}{12} \tag{142}$$

6.5.2 Consistenza

Riprendiamo l'espressione generale di un metodo multi-step:

$$\sum_{k=0}^{r} a_k u_{j+k} = h \sum_{k=0}^{r} b_k f(x_{j+k}, u_{j+k}) \tag{143}$$

L'errore locale di troncamento è:

$$\tau_h = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{r} a_k y_{j+k} - \sum_{k=0}^{r} b_k f(x_{j+k}, u_{j+k}) \tag{144}$$

Scriviamo:

$$y_{j+k} = y_j + y'_j(kh) + y''_j\frac{(kh)^2}{2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} y_j^i \frac{(kh)^i}{i!} \tag{145}$$

$$f(x_{j+k}, y_{j+k}) = y'_{j+k} = y'_j + y''_j(kh) + y'''_j\frac{(kh)^2}{2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} y_j^{i+1} \frac{(kh)^i}{i!} \tag{146}$$

Quindi:

$$\tau_h = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{r} a_k \sum_{i=0}^{\infty} y_j^i \frac{(kh)^i}{i!} + \sum_{k=0}^{r} b_k \sum_{i=0}^{\infty} y_j^{i+1} \frac{(kh)^i}{i!} \tag{147}$$

Riordinando:

$$\begin{aligned}
\tau_h &= \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\right)\frac{1}{h}y_j + \\
\ldots &+ \left(\sum_{k=0}^{r} k a_k - \sum_{k=0}^{r} b_k\right) y'_j + \\
\ldots &+ \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{k^2 h}{2} a_k - \sum_{k=0}^{r} b_k(kh)\right) y''_j + \\
\ldots &+ \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{k^3 h^2}{3!} a_k - \sum_{k=0}^{r} b_k\frac{(kh)^2}{2}\right) y'''_j + \cdots = \\
&= \left(\sum_{k=0}^{r} a_k\right)\frac{1}{h}y_j + \sum_{i=1}^{\infty} y_j^i \sum_{k=0}^{r}\left(\frac{k^j h^{j-1}}{j!}a_k - \frac{(kh)^{j-1}}{(j-1)!}b_k\right) =
\end{aligned} \tag{148}$$

Quindi affinchè lo schema numerico sia consistende devo avere:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{r} a_k = 0 \\ \sum_{k=0}^{r} (k a_k - b_k) = 0 \end{cases} \tag{149}$$

<u>Eulero Esplicito</u> ($r = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = -1$, $b_1 = 0$, $b_0 = 1$)

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{r} a_k = (-1) + (+1) = 0 \\ \sum_{k=0}^{r} (k a_k - b_k) = \sum_{k=0}^{r} (k a_k) - \sum_{k=0}^{r} b_k = 0(-1) + 1(+1) - ((+1) + 0) = 0 \end{cases} \tag{150}$$

<u>AB2</u> Se voglio uno schema del secondo ordine devo imporre anche (oltre alle condizioni

necessarie per la consistenza) che i termini proporzionali a h si annullino:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{r} a_k = 0 \\ \sum_{k=0}^{r} (ka_k - b_k) = 0 \\ \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k^2}{2}a_k - kb_k\right) = \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k^2}{2}a_k\right) - \sum_{k=0}^{r} (kb_k) = 0 \end{cases} \tag{151}$$

Visto che $r = 2$, a_0=0, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ e b_2=0:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -1 + 1 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - b_0 - b_1 = -1 + 2 - b_0 - b_1 = 0 \\ \frac{1}{2}a_1 + 2a_2 - b_1 = -\frac{1}{2} + 2 - b_1 = 0 \end{cases} \tag{152}$$

da cui posso ricavare

$$\begin{cases} a_2 = 1,\ a_1 = -1,\ a_0 = 0 \\ b_2 = 0,\ b_1 = \frac{3}{2},\ b_0 = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{153}$$

AB3 Se voglio uno schema del terzo ordine devo imporre anche (oltre alle condizioni necessarie per AB2) che i termini proporzionali a h^2 si annullino:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{r} a_k = 0 \\ \sum_{k=0}^{r} (ka_k - b_k) = 0 \\ \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k^2}{2}a_k - kb_k\right) = \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k^2}{2}a_k\right) - \sum_{k=0}^{r} (kb_k) = 0 \\ \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k^3}{3!}a_k - \frac{k^2}{2}b_k\right) = \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k^3}{3!}a_k\right) - \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k^2}{2}b_k\right) = 0 \end{cases} \tag{154}$$

Visto che $r = 3$, a_0=0, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ e b_3=0:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 0 + 0 - 1 + 1 = 0 \\ 2a_2 + 3a_3 - b_0 - b_1 - b_2 = -2 + 3 - b_0 - b_1 - b_2 = 0 \\ 2a_2 + \frac{9}{2}a_3 - b_1 - 2b_2 = -2 + \frac{9}{2} - b_1 - 2b_2 = 0 \\ \frac{4}{3}a_2 + \frac{9}{2}a_3 - \frac{1}{2}b_1 - 2b_2 - \frac{9}{2}b_3 = -\frac{4}{3} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2}b_1 - 2b_2 = 0 \end{cases} \tag{155}$$

da cui posso ricavare

$$\begin{cases} a_3 = 1,\ a_2 = -1,\ a_1 = 0,\ a_0 = 0 \\ b_3 = 0,\ b_2 = \frac{23}{12},\ b_1 = -\frac{16}{12},\ b_0 = \frac{5}{12} \end{cases} \tag{156}$$

6.5.3 Stabilità

Studiamo la zero stabilità a partire dal problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{157}$$

La soluzione esatta è $y = cost = y_0$, mentre per quella numerica devo risolvere:

$$\sum_{k=0}^{r} a_k u_{j+k} = 0 \tag{158}$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $u_j = \xi^j$:

$$\sum_{k=0}^{r} a_k \xi^k = 0 \tag{159}$$

Devo perciò trovare le radici del polinomio caratteristico:

$$\rho(\xi) = \sum_{k=0}^{r} a_k \xi^k \tag{160}$$

Una volta trovate le radici, la soluzione u_r sarà:

$$u_r = \sum_{j=1}^{r} c_j \xi^r \tag{161}$$

Dove i coefficienti possono essere ottenuti da:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{r} c_j \xi_j^0 = u_0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r} c_j \xi_j^{r-1} = u_{r-1} \end{cases} \tag{162}$$

La condizione necessaria (e sufficiente) affinchè la soluzione sia stabile è che:

$$|\xi_j| \leq 1 \ \forall j \tag{163}$$

Consideriamo ora la <u>stabilità assoluta</u> a partire dal problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, \ \lambda < 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{164}$$

La soluzione esatta in questo caso è $y(x) = y_0 e^{\lambda} x$ mentre per quella numerica devo risolvere:

$$\sum_{k=0}^{r} a_k u_{j+k} = h\lambda \sum_{k=0}^{r} b_k u_{j+k} \tag{165}$$

In questo caso il polinomio caratteristico diventa:

$$\pi(\xi) = \sum_{k=0}^{r} a_k \xi^k - h\lambda \sum_{k=0}^{r} b_k \xi^k = \rho(\xi) - z\sigma(\xi) \tag{166}$$

Nel caso di Eulero esplicito ($r = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = -1$, $b_1 = 0$, $b_0 = 1$)

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= -1 + \xi \\ \sigma(\xi) &= 1 \\ \pi(\xi) &= 1 + \xi - z \end{aligned} \tag{167}$$

Il polimomio caratteristico ammette una sola radice:

$$|\xi_1| = |z + 1| \leq 1 \tag{168}$$

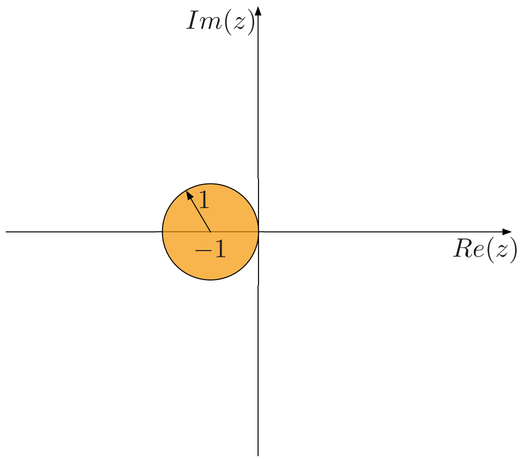

Figure 7: Regione di stabilità del metodo Eulero in avanti

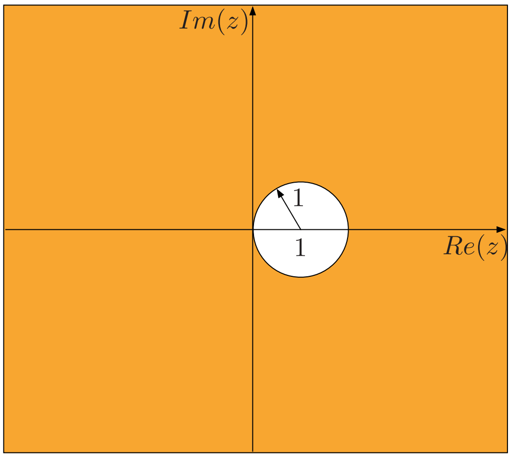

Figure 8: Regione di stabilità del metodo Eulero implicito

Nel caso di Eulero implicito ($r = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = -1$, $b_1 = 1$, $b_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= -1 + \xi \\ \sigma(\xi) &= \xi \\ \pi(\xi) &= 1 + \xi - z\xi \end{aligned} \tag{169}$$

Il polimomio caratteristico ammette una sola radice:

$$|\xi_1| = |\frac{1}{1-z}| \leq 1 \rightarrow |z-1| \geq 1 \tag{170}$$

Nel caso del Metodo dei trapezi ($r = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = -1$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} \rho(\xi) &= -1 + \xi \\ \sigma(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi \\ \pi(\xi) &= 1 + \xi - \frac{1}{2}z(1+\xi) \end{aligned} \tag{171}$$

Il polimomio caratteristico ammette una sola radice:

$$|\xi_1| = |\frac{1+z/2}{1-z/2}| \leq 1 \tag{172}$$

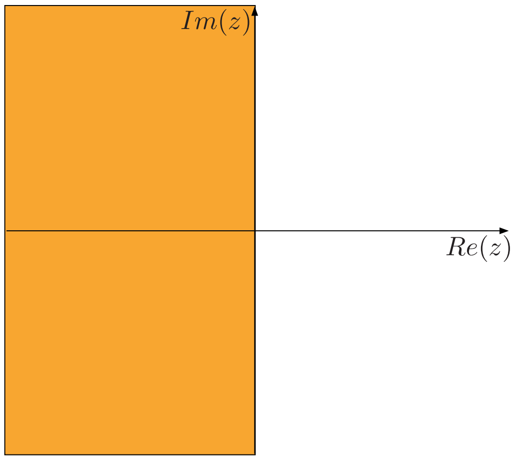

Figure 9: Regione di stabilità del metodo dei trapezi

7 Problemi con valori al contorno

Consideriamo un'equazione lineare del secondo ordine:

$$\begin{cases} y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = q(x),\ x \in [a, b] \\ + \text{ condizioni al contorno (Dirichlet o Neumann)} \end{cases} \tag{173}$$

Discretizziamo la variabile indipendente (x):

$$\begin{cases} x_j = a + jh, \text{ per } j = 0, \dots, N \\ h = \Delta x = \frac{b-a}{N} \end{cases} \tag{174}$$

Approssimiamo le derivate tramite delle differenze centrate (del secondo ordine):

$$\begin{aligned} y''(x) &\simeq \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h} \\ y'(x) &\simeq \frac{y_{j+1} - yj - 1}{2h} \end{aligned} \tag{175}$$

Sostituendo:

$$\frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h} + f_j \frac{y_{j+1} - yj - 1}{2h} + g_j y_j = q_j \tag{176}$$

Riordinando:

$$(\frac{1}{h^2} - \frac{f_j}{2h})y_{j-1} + (g_j - \frac{2}{h^2})y_j + (\frac{1}{h^2} + \frac{f_j}{2h})y_{j+1} = q_j \tag{177}$$

Se ho delle condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} y(a) = y_a \to y_0 = y_a \\ y(b) = y_a \to y_N = y_b \end{cases} \tag{178}$$

Ottengo il seguente sistema matriciale:

$$\begin{bmatrix} g_j - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{f_j}{2h} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{h^2} - \frac{f_j}{2h} & g_j - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{f_j}{2h} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{h^2} - \frac{f_j}{2h} & g_j - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{f_j}{2h} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\frac{1}{h^2} - \frac{f_j}{2h})y_a \\ 0 \\ \vdots \\ -(\frac{1}{h^2} + \frac{f_j}{2h})y_b \end{bmatrix} \tag{179}$$

E se invece avessi una condizione al contorno di Neumann in b? In tal caso dovrei scrivere l'equazione 177 anche per il punto N (incognito):

$$(\frac{1}{h^2} - \frac{f_N}{2h})y_{N-1} + (g_N - \frac{2}{h^2})y_N + (\frac{1}{h^2} + \frac{f_N}{2h})y_{N+1} = q_N \tag{180}$$

Il punto $N+1$ rappresenta un punto aggiuntivo rispetto alla discretizzazione vista precedentemente (ghost point), che elimino dall'equazione precedente imponendo la condizione al contorno di Neuman:

$$y'(b) = \sigma \to \frac{y_{N+1} - yN - 1}{2h} = \sigma \to y_{N+1} = y_N = 2\sigma h \tag{181}$$

Pertanto l'equazione precedente diventa:

$$(\frac{1}{h^2} - \frac{f_N}{2h} + \frac{1}{h^2} + \frac{f_N}{2h})y_{N-1} + (g_N - \frac{2}{h^2}) = q_N - (\frac{1}{h^2} + \frac{f_N}{2h})2\sigma h \tag{182}$$

$$(\frac{2}{h^2})y_{N-1} + (g_N - \frac{2}{h^2}) = q_N - (\frac{1}{h^2} + \frac{f_N}{2h})2\sigma h \tag{183}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} g_j - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{f_j}{2h} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{h^2} - \frac{f_j}{2h} & g_j - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{f_j}{2h} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{h^2} - \frac{f_j}{2h} & g_j - \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} + \frac{f_j}{2h} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{2}{h^2} & g_N - \frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ q_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\frac{1}{h^2} - \frac{f_j}{2h})y_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -(\frac{1}{h^2} + \frac{f_N}{2h})2\sigma h \end{bmatrix} \tag{184}$$

E se invece avessi

$$\begin{cases} y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = q(x),\ x \in [a,b] \\ y(a) = y_a;\ y'(a) = \sigma \text{ (condizioni al contorno)} \end{cases} \tag{185}$$

In questo caso posso sostituire

$$w(x) = y'(x) \tag{186}$$

E l'equazione 185 diventa:

$$\begin{cases} w'(x) + f(x)w(x) + g(x)y(x) = q(x) \\ y'(x) = w(x),\ x \in [a,b] \\ y(a) = y_a;\ w(a) = \sigma \text{ (condizioni al contorno)} \end{cases} \tag{187}$$

Questo è un sistema di equazioni del primo ordine che posso risolvere con i metodi noti.

8 Esercizi

Esercizio 1

Calcolare $y'(x)$ di $y(x) = sin(x)$ usando i seguenti metodi

1. Forward Euler
2. Backward Euler
3. Leapfrog (Punto Medio)
4. Schema Centrato del quarto ordine

Calcolare gli errori di troncamento e l'ordine di convergenza (ordine di discretizzazione) dei vari schemi.

Esercizio 2

Risolvere:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t),\ \lambda = 3,\ t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione esatta è $y(t) = e^{\lambda t}$

Risolvere con i seguenti approcci:

1. Forward Euler

$$u_{j+1} = u_j + \Delta t(\lambda u_j)$$

2. RK2

$$u_{j+1/2} = u_j + \frac{\Delta t}{2}(\lambda u_j)$$
$$u_{j+1} = u_j + \Delta t(\lambda u_{j+1/2})$$

3. AB2

$$u_{j+1} = u_j + \Delta t\lambda(\frac{3}{2}u_j - \frac{1}{2}u_{j-1})$$

Calcolare l'errore e l'ordine di convergenza del metodo.

Esercizio 3

$$\begin{cases} y''(t) + f(t)y'(t) + g(t)y(t) = q(t) \\ f(t) = 0.5,\ g(t) = 1,\ q(t) = 1,\ t \in [0, 30] \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione esatta è:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4g}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}}{2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{15}{16}} i = \alpha \pm \beta i$$
$$y(t) = e^{\alpha t} \left(c_1 cos(\beta t) + c_2 sin(\beta t)\right) + q$$

$$\begin{cases} c_1 + q = y(0) \\ \alpha c_1 + \beta c_2 = y'(0) \end{cases}$$

L'equazione che risolvo è

$$\begin{cases} v' = q - fv - gy \\ y' = v \end{cases}$$

Esercizio 4

$$\begin{cases} y''(x) - y = x,\ x \in [0, 1] \\ y(0) = \alpha,\ y(1) = \beta \end{cases}$$

La soluzione esatta è ($\lambda = \pm 1$):

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ c_1 e + c_2 e^{-1} - 1 = \beta \end{cases}$$

Esercizio 5

$$\begin{cases} y''(x) - y = x,\ x \in [0,1] \\ y'(0) = \sigma,\ y(1) = \beta \end{cases}$$

La soluzione esatta è ($\lambda = \pm 1$):

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = \sigma + 1 \\ c_1 e + c_2 e^{-1} - 1 = \beta \end{cases}$$