Università degli Studi di Cagliari - Facoltà di Ingegneria-Architettura

Corsi di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

CORSO DI TEORIA DELLE STRUTTURE

A.A. 2021-2022

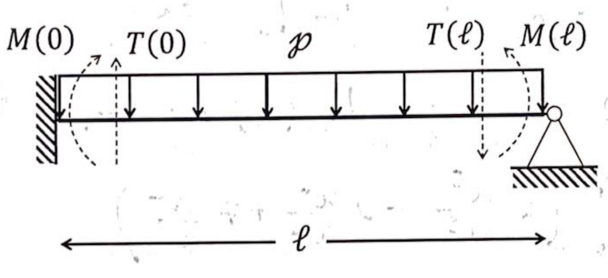
Prova scritta del 12.01.2022

Nota: I risultati numerici (<u>in forma frazionaria o con 3 cifre decimali</u>) vanno riportati su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti. Si prega di scrivere a penna.

Allievo:... Matricola:.......

Esercizio n. 1 (8 punti)

Risolvere con il metodo della linea elastica, scritta come equazione differenziale del IV ordine, la trave non deformabile a taglio indicata in Figura, valutando le quantità indicate.



c.c in $x = 0$ = $v(0)=0$; $v'(0)=0$; c.c in $x = \ell$ = $v(\ell)=0$; $v''(\ell)=0$ $[M(\ell)=0]$;

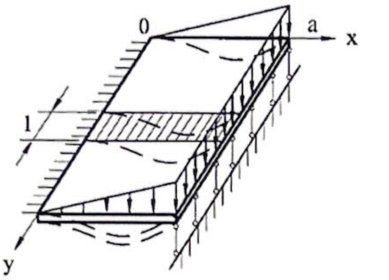
$v(x) = \frac{p x^4}{24EJ} - \frac{5p\ell}{48EJ}x^3 + \frac{p\ell^2}{16EJ}x^2$; $v'(x) = \frac{p x^3}{6EJ} - \frac{5p\ell}{16EJ}x^2 + \frac{p\ell^2}{8EJ}x$;

$M(0) = -\frac{p\ell^2}{8}$; $T(0) = \frac{5p\ell}{8}$;

$M(\ell) = 0$; $T(\ell) = -\frac{3}{8}p\ell$;

Esercizio n. 2 (8 punti)

Data la piastra rettangolare indeformabile al taglio in Figura, determinare la soluzione sotto carico lineare $p(x) = p_0 \frac{x}{a}$.



La piastra è incastrata per $x = 0$ e appoggiata per $x = a$. Considerando tale piastra infinitamente estesa lungo la direzione y, si ottiene la seguente equazione per la deformata (ciò equivale a considerare la striscia di profondità unitaria indicata in Figura)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{D}$$

Determinare le condizioni al contorno e calcolare la deformata e i momenti.

c.c 1 = $w(0) = 0$; $\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0$;

c.c 2 = $w(a) = 0$; $M_x(a) = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=a} = 0$;

$w(x) = \frac{p_0 a^4}{240 D}\left(2\frac{x^5}{a^5} - 9\frac{x^3}{a^3} + 7\frac{x^2}{a^2}\right)$;

$M_x = -\frac{p_0 a^2}{120}\left(20\frac{x^3}{a^3} - 27\frac{x}{a} + 7\right)$;

$M_y = \nu M_x$;

$M_{xy} = 0$;

Esercizio n. 3 (8 punti)

Data una piastra circolare di raggio $r=2R$ con bordo *incastrato*, determinare la soluzione sotto carico uniformemente distribuito p_0. È noto che l'integrale generale è dato in questo caso da:

$$w(r) = A_1\, r^2 \ln r + A_2\, r^2 + A_3 \ln r + A_4 + p_0\, r^4/(64\, D),$$

dove D è la rigidezza flssionale della piastra e r la coordinata radiale. Indicare le condizioni al contorno da applicare e cercare di ottenere la soluzione, trovando il valore dello spostamento $w(0)$ al centro.

c.c 1 = $w(r=2R)=0$;

c.c 2 = $\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=2R}=0$;

c.c 3 = $\lim_{r\to 0} w(r)=0 \Rightarrow A_3=0$;

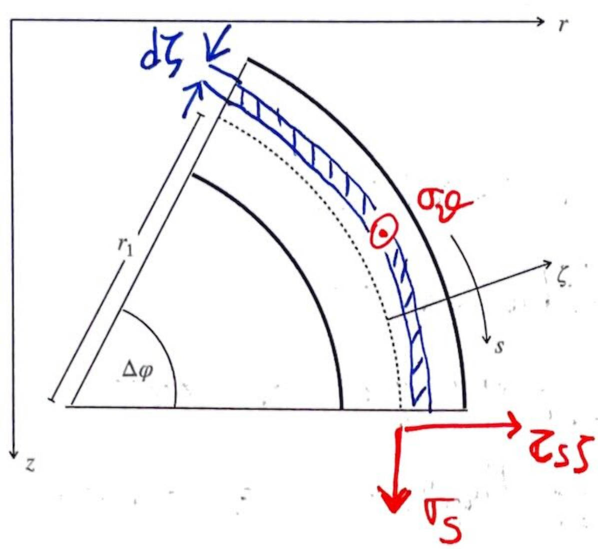
c.c 4 = $\lim_{r\to 0} M_r(r)=0 \Rightarrow A_1=0$;

$w(r)$ = $\frac{p_0}{64D} r^4 - \frac{p_0 R^2}{8D} r^2 + \frac{p_0 R^4}{4D}$;

$w(0)$ = $A_4 = \frac{p_0 R^4}{4D}$;

Esercizio n. 4 (6 punti)

Per un guscio di rivoluzione, se si considerano carichi assialsimmetrici, le componenti del tensore degli sforzi che contribuiscono alle risultanti di sforzo sono: σ_s, σ_ϑ e $\tau_{s\zeta}$. Disegnare sul piano meridiano tali componenti di sforzo e scrivere le risultanti indicate di seguito specificando le aree su cui sono calcolate.



$N_\vartheta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\vartheta \left(1 + \frac{\zeta}{r_1}\right) d\zeta$ Area : $r_1 \Delta\varphi \, d\zeta$;

$M_\vartheta = \int_{-t/2}^{t/2} \zeta \sigma_\vartheta \left(1 + \frac{\zeta}{r_1}\right) d\zeta$ Area : $r_1 \Delta\varphi \, d\zeta$;

E1

CONDIZIONI AL CONTORNO

$$v^{IV}(x) = \frac{p}{EJ}$$

① $v(0) = 0$

② $v'(0) = 0$

③ $v(l) = 0$

$M(l) = 0$

$\Downarrow$

④ $v''(l) = 0$

INTEGRO L'EQUAZIONE

$$v'''(x) = \frac{p x}{EJ} + C_1$$

$$v''(x) = \frac{p x^2}{2EJ} + C_1 x + C_2$$

$$v'(x) = \frac{p x^3}{6EJ} + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$v(x) = \frac{p x^4}{24EJ} + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

DETERMINO LE COSTANTI D'INTEGRAZIONE

① $v(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_4 = 0}$

② $v'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = 0}$

③ $v(l) = 0 \Rightarrow \frac{pl^4}{24EJ} + \frac{C_1 l^3}{6} + \frac{C_2 l^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{pl^2}{12EJ} + \frac{C_1 l}{3} + C_2 = 0$

④ $v''(l) = 0 \Rightarrow \frac{pl^2}{2EJ} + C_1 l + C_2 = 0$

QUINDI

$$\begin{cases} \frac{pl^2}{12EJ} + \frac{C_1 l}{3} + C_2 = 0 \\ \frac{pl^2}{2EJ} + C_1 l + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{pl^2}{12EJ} - \frac{C_1 l}{3} \\ \frac{pl^2}{2EJ} + C_1 l - \frac{pl^2}{12EJ} - \frac{C_1 l}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{5pl^2}{12EJ} + \frac{2}{3} C_1 l = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{2\cancel{l}} \cdot \frac{5pl^{\cancel{2}}}{\cancel{12}_{4}EJ} = -\frac{5pl}{8EJ}$$

$$\boxed{e_1 = -\frac{5pl}{8EJ}}$$

$$e_2 = -\frac{pl^2}{12EJ} - \frac{e_1 l}{3} = -\frac{pl^2}{12EJ} + \frac{5pl^2}{24EJ} = \frac{\cancel{3}^{1}pl^2}{\cancel{24}_{8}EJ}$$

$$\boxed{e_2 = \frac{pl^2}{8EJ}}$$

QUINDI LA DEFORMATA È

$$\boxed{v(x) = \frac{px^4}{24EJ} - \frac{5pl}{48EJ}x^3 + \frac{pl^2}{16EJ}x^2}$$

E LA ROTAZIONE

$$\boxed{v'(x) = \frac{px^3}{6EJ} - \frac{5pl}{16EJ}x^2 + \frac{pl^2}{8EJ}x}$$

SCRIVO ANCHE DERIVATA SECONDA E TERZA PER CALCOLARE MOMENTO E TAGLIO

$$v''(x) = \frac{px^2}{2EJ} - \frac{5pl}{8EJ}x + \frac{pl^2}{8EJ}$$

$$v'''(x) = \frac{px}{EJ} - \frac{5pl}{8EJ}$$

QUINDI

$$M(x) = -EJv''(x) = -\frac{px^2}{2} + \frac{5pl}{8}x - \frac{pl^2}{8}$$

$$T(x) = -EJv'''(x) = -px + \frac{5pl}{8}$$

$$M(0) = -\frac{pl^2}{8}, \quad M(l) = -\frac{pl^2}{2} + \frac{5pl^2}{8} - \frac{pl^2}{8} = \frac{-4+5-1}{8}pl^2$$

$$M(l) = 0$$

$$T(0) = \frac{5pl}{8}, \quad T(l) = -pl + \frac{5pl}{8} = \frac{-8+5}{8}pl = -\frac{3}{8}pl$$

E 2

Il problema non dipende da y ed è quindi ridotto, per quanto riguarda l'integrazione dell'equazione differenziale, a quello di una trave di Eulero-Bernoulli.

CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad w(0) = 0 \\ &(2)\quad \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0 \end{aligned}\right\} \text{incastro} \qquad \left.\begin{aligned} &(3)\quad w(a) = 0 \\ &(4)\quad M_x(a) = 0 \end{aligned}\right\} \text{appoggio}$$

$$\Downarrow$$

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial^2 w}{dx^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{d^2 w}{dx^2}\right|_{x=a} = 0$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{D}$$

$$p(x) = p_0 \frac{x}{a}$$

INTEGRO L'EQUAZIONE

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p_0}{aD} x$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{p_0}{2aD} x^2 + C_1$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{p_0}{6aD} x^3 + C_1 x + C_2$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{p_0}{24aD} x^4 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$w(x) = \frac{p_0}{120aD} x^5 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

DETERMINO LE COSTANTI

(1) $w(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_4 = 0}$

(2) $\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = 0}$

③ $w(a)=0 \Rightarrow \frac{p_0 a^{\cancel{5}4}}{120\cancel{a}D}+\frac{c_1 a^3}{6}+\frac{c_2 a^2}{2}=0$

~~④~~

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{p_0 a^2}{60D}+\frac{c_1 a}{3}+c_2=0}$$

④ $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=e}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{p_0 a^3}{6aD}+c_1 a+c_2=0}$

$$\begin{cases}\frac{p_0 a^2}{60D}+\frac{c_1 a}{3}+c_2=0\\ \frac{p_0 a^3}{6aD}+c_1 a+c_2=0\end{cases};\quad \begin{cases}c_2=-\left(\frac{p_0 a^2}{60D}+\frac{c_1 a}{3}\right)\\ \frac{p_0 a^{\cancel{3}2}}{6\cancel{a}D}+c_1 a-\frac{p_0 a^2}{60D}-\frac{c_1 a}{3}=0\end{cases}$$

$$\frac{\overset{3}{9}a^2 p_0}{\underset{20}{\cancel{60}D}}+\frac{2a}{3}c_1=0 \Rightarrow \boxed{c_1=\frac{3}{2\cancel{a}}\cdot\frac{3a^{\cancel{2}}p_0}{20D}=-\frac{9ap_0}{40D}}$$

$$\boxed{c_2=-\frac{p_0 a^2}{60D}+\frac{a}{3}\cdot\frac{9a}{40D}p_0==\frac{-2+9}{120D}p_0a^2=\frac{7a^2p_0}{120D}}$$

QUINDI LA DEFORMATA E'

$$w(x)=\frac{p_0 x^5}{120aD}-\frac{3}{80}\frac{p_0 a}{D}x^3+\frac{7p_0a^2}{240D}x^2$$

$$\boxed{=\frac{p_0 a^4}{240D}\left(2\frac{x^5}{a^5}-9\frac{x^3}{a^3}+7\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

CALCOLO DEI MOMENTI

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-D\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{p_0a^2}{120}\left(20\frac{x^3}{a^3}-27\frac{x}{a}+7\right)$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=-\nu D\frac{d^2w}{\partial x^2}=\nu M_x$$

$$M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$$

E3

CONDIZIONI AL CONTORNO

(1) $w(r = 2R) = 0$

(2) $\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=2R} = 0$

CONDIZIONI AGGIUNTIVE DA INCLUDERE PER ELIMINARE LE DIVERGENZE in $r=0$

(3) $\lim_{r \to 0} w(r) = 0 \Rightarrow \boxed{A_3 = 0}$

(4) $\lim_{r \to 0} M_r(r) = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = 0}$

DETERMINO A_2 E A_4

(1) $w(r = 2R) = A_2 \, 4R^2 + A_4 + \frac{p_0 \cancel{16}^{1} R^4}{\cancel{64}_{4} D} = 0$

(2) $\frac{dw}{dr} = 2A_2 r + \frac{\cancel{4}^{1} p_0 r^3}{\cancel{64}_{16} D}$

$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=2R} = 2A_2 \cdot 2R + \frac{p_0 \, 8R^3}{16D} = 0$

$$\boxed{A_2 = -\frac{1}{4\cancel{R}} \cdot \frac{p_0 \cancel{8}^{1} \cancel{R^3}^{2}}{\cancel{16}_{2} D} = -\frac{p_0 R^2}{8D}}$$

$A_4 = -\frac{p_0 R^4}{4D} - 4R^2 A_2$

$= -\frac{p_0 R^4}{4D} + \cancel{4}^{1} R^2 \cdot \frac{p_0 R^2}{\cancel{8}_{2} D} = \frac{-1+2}{4D} p_0 R^4 = \boxed{\frac{p_0 R^4}{4D} = A_4}$

QUINDI LA DEFORMATA E'

$$\boxed{w(r) = -\frac{p_0 R^2}{8D} r^2 + \frac{p_0 R^4}{4D} + \frac{p_0}{64D} r^4} \; ; \; \boxed{w(0) = \frac{p_0 R^4}{4D}}$$