ANALISI MATEMATICA 2
Successioni e serie di funzioni

A.A. 2021/2022. Corso di Laurea in Fisica

1) Studiare la convergenza (puntuale ed uniforme) delle seguenti successioni

$$(a) f_n(x) = \frac{x^2}{n^2 + x^4}, \qquad (b) f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}, \qquad (c) f_n(x) = \arctan \frac{nx^2}{n^2 x + 1}, x \geq 0$$

SOLUZIONE:
(a) Puntualmente ed uniformemente in $\mathbb{R}$ a $f(x) = 0$
(b) Puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Uniforme in $[a, \infty)$ con $a > 0$
(c) Puntualmente in $\mathbb{R}$ a $f(x) = 1$. Uniformemente in $(-\infty, -a] \cup [b, \infty)$, $a, b > 0$

2) Studiare la convergenza specificata delle seguenti serie

$$(a)\text{Puntuale} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n}, \qquad (b)\text{Puntuale} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{n}, \qquad (c)\text{Puntuale} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\mathrm{e}^{nx}},$$

$$(d)\text{Totale, Uniforme, Puntuale} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, \qquad (e)\text{Totale, Uniforme, Puntuale} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{n^3}.$$

SOLUZIONE:
(a) conv. punt. in $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
(b) conv. punt. in $(-\infty, 0)$, conv. tot. (e unif.) in $[a, b]$, $-\infty < a < b < 0$
opzionale: somma $S(x) = -\ln(1 - \mathrm{e}^x)$ se $x < 0$
(c) conv. punt. in $(0, +\infty)$, conv. tot. (e unif.) in $[a, b]$, $0 < a < b < +\infty$
opzionale: somma $S(x) = -\ln(1 - \mathrm{e}^{-x})$ se $x > 0$
(d) conv. tot. (e quindi unif. e punt.) in $\mathbb{R}$
(e) conv. punt. in $(-1, \infty)$, conv. tot. (e unif.) in $[a, b]$, $-1 < a < b < +\infty$

3) Studiare convergenza puntuale e uniforme della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right).$$

SOLUZIONE: serie telescopica: conv. unif. e punt. in $[-1, 1]$, somma $S(x) = \frac{x^2}{2}$.

4) Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}, \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(1+n)}, \qquad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) x^n,$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad (f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+3}} (x-4)^n, \qquad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}} x^n.$$

SOLUZIONE:
(a) conv. punt. in $(-2, 2)$, conv. tot. e unif. in $[-r, r]$, $r \in (0, 2)$

opzionale: somma $S(x) = \frac{2}{2-x}$

(b) conv. punt. in $[-2, 0)$, conv. unif. in $[-2, b]$, $b < 0$, conv. tot. in $[-1-r, -1+r]$, $r \in (0, 1)$

(c) conv. punt. in $[-1, 1)$, conv. unif. in $[-1, b]$, $b < 1$, conv. tot. in $[-r, r]$, $r \in (0, 1)$

(d) conv. punt. e unif. in $[-1, 1]$, conv. tot. in $[-r, r]$, $r \in (0, 1)$

(e) conv. punt. in $x = 0$

(f) conv. punt. in $\left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$, conv. unif. in $\left[\frac{7}{2}, b\right]$, $b < \frac{9}{2}$, conv. tot. in $[4-r, 4+r]$, $r \in (0, \frac{1}{2})$

(g) conv. punt. in $(-1, 1]$, conv. unif. in $[a, 1]$, $a > -1$, conv. tot. in $[-r, r]$, $r \in (0, 1)$