ANALISI MATEMATICA 2
Curve, superfici e calcolo vettoriale

A.A. 2021/2022. Corso di Laurea in Fisica

1) Calcolare la lunghezza della catenaria che ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cosh(t) \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]$$

<u>SOLUZIONE</u>: $\mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

2) Calcolare la lunghezza della curva γ che ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 3(t + \sin(t)) \\ y = \frac{12}{5}(2 + \cos(t)) \\ z = \frac{9}{5}(2 + \cos(t)) \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

<u>SOLUZIONE</u>: $6\sqrt{2}$

3) Sia γ la detta cardioide parametrizzata da

$$\begin{cases} x = 2(1 + \cos(t))\cos(t) \\ y = 2(1 + \cos(t))\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Verificare che la parametrizzazione è regolare tranne che per un valore di t e scrivere il versore tangente da essa indotto. Inoltre, calcolare

$$\int_\gamma y\, ds.$$

<u>SOLUZIONE</u>: La parametrizzazione è regolare per ogni $t \neq \pi$.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos(t)}}\,(-\sin(2t) - \sin(t), \cos(2t) + \cos(t))$$

$$\int_\gamma y\, ds = 0.$$

4) Sia γ la curva di parametrizzazione

$$\begin{cases} x = t \\ y = \ln(t) \end{cases} \qquad t \in [1, \mathrm{e}]$$

Calcolare

$$\int_\gamma x^2\, ds.$$

<u>SOLUZIONE</u>: $\dfrac{1}{3}\left[(\mathrm{e}^2 - 1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]$

5) Calcolare l'area della superficie Σ (detta toro) che ha parametrizzazione

$$\begin{cases} x = (R + r\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ y = (R + r\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ z = r\sin(\varphi) \end{cases} \qquad \theta, \varphi \in [0, 2\pi], \quad R > r$$

SOLUZIONE: $4\pi^2 rR$

6) Calcolare l'area della superficie Σ di equazione cartesiana $xy = z$ che si proietta sul cerchio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

SOLUZIONE: $\dfrac{14\pi}{3}$

7) Sia Σ la parte di paraboloide ellittico parametrizzata da

$$\begin{cases} x = 3t\cos(\theta) \\ y = 3t\sin(\theta) \\ z = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

Verificare che la parametrizzazione è regolare tranne che per un valore di t e scrivere il versore normale da essa indotto. Inoltre, calcolare

$$\iint_\Sigma z \, d\sigma.$$

SOLUZIONE: La parametrizzazione è regolare per ogni $t \neq 0$.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 9}}(-2t\cos(\theta), -2t\sin(\theta), 3)$$

$$\iint_\Sigma z \, d\sigma = \frac{3\pi}{10}\left[3^4 - 13^{3/2}\right].$$

8) Determinare il parametro k in modo che il lavoro eseguito della forza

$$F(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - x^2)$$

nello spostamento lungo l'arco di parabola $y^2 = 2kx$ congiungente l'origine con il punto $P = \left(\frac{k}{2}, k\right)$ valga $\frac{9}{5}$.
SOLUZIONE: $k = 2$

9) Usando il Teorema di Green, calcolare il lavoro compiuto dalla forza

$$F(x, y) = (xy, x^4 y)$$

nello spostamento lungo l'arco chiuso Γ, percorso in senso antiorario, unione di Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 espressi in coordinate cartesiane rispettivamente da $x = y^2$, $y = 1$, $x^2 + y^2 = 5$, $y = 0$, $(x, y \geq 0)$.
SOLUZIONE: $\dfrac{47}{6}$

10) Usando il Teorema di Stokes, calcolare la circuitazione del campo

$$F(x, y, z) = (x, y, xy)$$

lungo il bordo della superficie Σ, intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e del paraboloide $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, orientata in modo che il versore normale punti nella direzione opposta all'asse z.
<u>SOLUZIONE</u>: $-\dfrac{10}{9}\pi$

11) Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} x^3 e^z dS$$

dove S è la porzione di superficie del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, limitata dal piano $z = 0$ e $z = h$ $(h > 0)$ e contenuta nel semispazio $x \geq 0$.
<u>SOLUZIONE</u>: $\dfrac{4}{3} r^4 (e^h - 1)$

12) Verificare che il campo di forze

$$F(x, y, z) = (e^{yz}, xze^{yz} + y, xye^{yz} + 3z^2)$$

è conservativo in $\mathbb{R}^3$. Calcolare, quindi l'integrale curvilineo lungo la curva $\gamma(t) = \left(1 - \cos t, \sin(2t), \frac{2t}{2+\sin(2t)}\right)$, con $t \in [0, 1000\pi]$.
<u>SOLUZIONE</u>: $10^9 \pi^3$

13) Calcolare l'integrale curvilineo del campo

$$F(x, y, z) = (1, 0, y)$$

lungo $\partial\Sigma$ dove Σ è la superficie di equazione cartesiana $z = x + 3\sin(x^2 - y^2)$, con (x, y) tali che $x^2 + y^2 \leq 1$, la cui normale è orientata concordemente all'asse z.
<u>SOLUZIONE</u>: $-\pi$