Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Calcolo integrale

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

VE 10 DIC 2021

LA TEORIA DELLA MISURA STUDIA L'ESTENSIONE DELLE FIGURE GEOMETRICHE. USANDO LA GEOMETRIA ANALITICA. DATO UN INSIEME $E \subset \mathbb{R}^2$, ISPIRANDOMI AD ARCHIMEDE PRENDO I RETTANGOLI $I \subset E$, CON $I = (a,b) \times (c,d)$.

SE $I_1, \dots, I_n \subset E$ CON $I_k \cap I_j = \emptyset$ PER $k \neq j$, STIMO PER DIFETTO L'ESTENSIONE DI E CON $\sum_{k=1}^{n} |I_k|$, DOVE $|I| = (b-a)(d-c)$. SIMILMENTE, SE $E \subset \bigcup_{h=1}^{n} I_h$ LA STIMO PER ECCESSO CON $\sum_{k=1}^{n} |I_h|$. SORPRENDENTEMENTE, LE DUE STIME NON CONDUCONO ALLO STESSO LIMITE: « L'AREA NON ESISTE ». L'AREA SI DEVE DEFINIRE, E LA DEFINIZIONE SI APPLICA A MOLTE FIGURE, MA NON A TUTTE.

IL CONTROESEMPIO PIÙ TIPICO È IL PETTINE DI DIRICHLET: CONSIDERIAMO LA FUNZIONE DI DIRICHLET $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ DATA DA
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
E INDICHIAMO CON $E \subset \mathbb{R}^2$ IL SOTTOGRAFICO DI f, CIOÈ L'INSIEME
$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [0, f(x)] \}$$
QUESTO E NON CONTIENE RETTANGOLI I APERTI (NON VUOTI) QUINDI LA STIMA PER DIFETTO VALE ZERO.

MENTRE INVECE QUALUNQUE RETTANGOLO I SODDISFACENTE $E \subset I$ CONTIENE IL QUADRATO $[0,1] \times [0,1]$ QUINDI $|I| \geq 1$: ECCO QUINDI CHE LA STIMA PER DIFETTO E QUELLA PER ECCESSO NON CONDUCONO ALLA STESSA CONCLUSIONE. SI DICE CHE L'INSIEME E NON È MISURABILE SECONDO PEANO-JORDAN. LA TEORIA DELLA MISURA È STRETTAMENTE LEGATA A QUELLA DELL'INTEGRAZIONE NEL SENSO CHE, DATA UNA $f : [a,b] \to [0, +\infty)$, L'INTEGRALE DI RIEMANN $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ ESPRIME LA MISURA DI PEANO-JORDAN DEL SOTTOGRAFICO DI f, CHE È L'INSIEME $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)] \}$.

QUESTA È L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELL'INTEGRALE.

NE SEGUE CHE LA FUNZIONE DI DIRICHLET NON È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN.

L'INTEGRABILITÀ SECONDO RIEMANN SI PUÒ DEFINIRE COME SEGUE. DATA UNA $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, PRENDO UNA PARTIZIONE, O DECOMPOSIZIONE, DELL'INTERVALLO $[a,b]$ IN n INTERVALLI $I_h = [x_{h-1}, x_h]$, $h = 1, \dots, n$, $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$.

VE 10 DIC 2021

OSSERVAZIONE: LE LUNGHEZZE $|I_k| = x_k - x_{k-1}$ POSSONO ESSERE DISEGUALI, OPPURE TUTTE UGUALI A $\frac{b-a}{n}$.

SI DEFINISCE AMPIEZZA DELLA PARTIZIONE, O NORMA DELLA DECOMPOSIZIONE, LA QUANTITA' $\max_{k=1,\dots,n} |I_k|$.

PER PROSEGUIRE, PRENDIAMO UN PUNTO A PIACERE $\tilde{x}_k \in I_k$ E CONSIDERIAMO LA SOMMA DI CAUCHY – RIEMANN

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\,|I_k|.$$

SE QUESTA AMMETTE LIMITE FINITO ℓ AL TENDERE A ZERO DELL'AMPIEZZA DELLA PARTIZIONE, E IL LIMITE È INDIPENDENTE DALLA SCELTA DEI PUNTI $\tilde{x}_k$, SI DICE CHE f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN, E SI PONE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ell.$$

LA DEFINIZIONE SI PUÒ APPLICARE PER STIMARE NUMERICAMENTE L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE INTEGRABILE. RARAMENTE SI PUÒ CALCOLARE IL LIMITE ℓ A MANO.

ESEMPIO: LE FUNZIONI $f(x) = c$ SONO INTEGRABILI, E SI HA $\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$.

INFATTI, PER QUALUNQUE DECOMPOSIZIONE $\mathcal{D}$ SI HA $f(\tilde{x}_k) = c$ E QUINDI

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\,|I_k| = c \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = c\,(x_n - x_0) = c\,(b-a)$$

OSSERVAZIONE: LA DEFINIZIONE DELLA MISURA DI PEANO-JORDAN È TALE CHE LA MISURA DELLE FIGURE DELL'ANTICHITÀ È QUELLO CHE GLI ANTICHI CHIAMAVANO AREA.

ESERCIZI: 1. TROVARE LA MISURA DELL'INSIEME $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1 \}$. 2. TROVARE LA MISURA DELL'INSIEME $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \}$. 3. SFRUTTANDO L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA, CALCOLARE

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

CERCHIAMO DI APPLICARE LA DEFINIZIONE PER CALCOLARE $\int_0^1 x\,dx$. PRENDIAMO UNA PARTIZIONE EQUISPAZIATA $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$, CIOÈ $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = 1$. PRENDIAMO $\tilde{x}_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, \dots, n$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \le \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k\,|I_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$$

ORA $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to \frac{1}{2}$

E SIMILMENTE $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \to \frac{1}{2}$

SI PUÒ PENSARE DI PROCEDERE SEMPRE MEDIANTE STIME: PRENDO $f:[a,b]\to[m,M]$, PRENDO $\mathcal{D}$ CON $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

CONSIDERO LA SOMMA SUPERIORE $S=\sum_{k=1}^{n}|I_k|\sup_{I_k}f \geq \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)|I_k|$

E DEFINISCO L'INTEGRALE SUPERIORE

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{D}} S.$$

SIMILMENTE, LA SOMMA INFERIORE È

$s=\sum_{k=1}^{n}|I_k|\inf_{I_k}f \leq \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)|I_k|$

E L'INTEGRALE INFERIORE

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{D}} s$$

SE RISULTA $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

SI DICE CHE f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN E SI PONE

$$\int_a^b f(x)\,dx := \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

QUESTA IMPOSTAZIONE, ATTRIBUITA A GASTON DARBOUX, EQUIVALE ALLA PRECEDENTE. PROBLEMA: DIMOSTRARE CHE LA LIMITATEZZA DI f È CONDIZIONE NECESSARIA PER L'ESISTENZA DEL LIMITE FINITO ℓ DI PRIMA.

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'INTEGRABILITÀ

1. SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È MONOTONA, ALLORA È INTEGRABILE. DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO f CRESCENTE E VERIFICHIAMO CHE $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

BASTA VERIFICARE CHE PER OGNI $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ ESISTE UNA DECOMPOSIZIONE TALE CHE $S-s<\varepsilon$. SI HA CHE $S-s=$

$$\sum_{k=1}^{n}|I_k|\left(\sup_{I_k}f-\inf_{I_k}f\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|I_k|\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right).$$

PRENDENDO UNA PARTIZIONE EQUISPAZIATA ABBIAMO $|I_k|=\frac{b-a}{n}$ E QUINDI $S-s=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)=$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(x_n)-f(x_0)\right)=\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

DUNQUE $S-s\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

LU 13 DIC 2021

2. SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ È CONTINUA, ALLORA È INTEGRABILE. PER LA DIMOSTRAZIONE CI SERVIAMO DEL TEOREMA DI HEINE – CANTOR: OGNI $f: S\to\mathbb{R}$ CONTINUA SU DI UN INSIEME COMPATTO $S\subset\mathbb{R}$ RISULTA UNIFORMEMENTE CONTINUA, CIOÈ PER OGNI $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ ESISTE $\delta\in\mathbb{R}^+$ TALE CHE SE PRENDO $x,y\in S$ CON $|x-y|<\delta$ TROVO $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

DIMOSTRIAMO IL TEOREMA DI HEINE-CANTOR (CONTRONOMINALE): SE f NON È UNIFORMEMENTE CONTINUA SU S COMPATTO, ALLORA ESISTE ALMENO UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ $c\in S$. SE f NON È UNIFORMEMENTE CONTINUA, ESISTE $\varepsilon_0\in\mathbb{R}^+$ TALE CHE PER OGNI $\delta_n=\frac{1}{n}$ ESISTONO $x_n, y_n\in S$ TALI CHE

$$-\frac{1}{n}<x_n-y_n<\frac{1}{n}$$

MA $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon_0$.

PER LA COMPATTEZZA DI S, ESISTONO $x_{n_k}\to l_1\in S$ E $y_{n_k}\to l_2\in S$ E, PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, $l_1=l_2$ E POSSIAMO PORRE $c:=l_1=l_2$ IL QUALE È UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ IN QUANTO $f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\not\to 0$.

PER VERIFICARE L'INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE, PRENDIAMO $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ E TROVIAMO UNA PARTIZIONE TALE CHE $S-s<\varepsilon$. ESSENDO f CONTINUA UNIFORMEMENTE, ESISTE $\delta\in\mathbb{R}^+$ TALE CHE SE $|x-y|<\delta$ RISULTA $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, QUINDI, SE $|I_k|<\delta$, SI HA $\max\limits_{I_k} f-\min\limits_{I_k} f<\varepsilon$. BASTA PRENDERE UNA PARTIZIONE EQUISPAZIATA CON $|I_k|=\frac{b-a}{n}<\delta$, CIOÈ $n>\frac{b-a}{\delta}$ PER OTTENERE

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}|I_k|\left(\max_{I_k} f-\min_{I_k} f\right)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\max_{I_k} f-\min_{I_k} f\right)$$

$$<\frac{b-a}{n}\varepsilon n=(b-a)\varepsilon.$$

LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

LU 13 DIC 2021

LE FUNZIONI CONTINUE, OLTRE AD ESSERE INTEGRABILI, SONO TALI CHE ESISTE ALMENO UN PUNTO $c \in (a,b)$ TALE CHE $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE. SI HA, INFATTI, $(b-a)\min_{[a,b]} f \leq$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)|I_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |I_k| \max_{[a,b]} f =$$

$$= \left(\max_{[a,b]} f\right)\sum_{k=1}^{n}|I_k| = (b-a)\max_{[a,b]} f.$$

QUINDI, PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO,

$$(b-a)\min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\max_{[a,b]} f$$

MA ALLORA $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right]$

E LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI. IL NUMERO

$$-\!\!\!\!\!\!\int_a^b f(x)\,dx := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{SI CHIAMA}$$

MEDIA INTEGRALE DI f SULL'INTERVALLO $[a,b]$.

CON UN RAGIONAMENTO SIMILE SI DIMOSTRA IL TEOREMA DEL CONFRONTO PER GLI INTEGRALI, OVVERO LA MONOTONIA DELL'OPERATORE DI INTEGRAZIONE RISPETTO ALLA FUNZIONE INTEGRANDA: SE f E g SONO INTEGRABILI SU $[a,b]$ CON $f(x) \leq g(x)$ PER OGNI x, ALLORA $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

INFATTI PER OGNI PARTIZIONE $\mathcal{D}$ ED OGNI SCELTA DEI PUNTI $\tilde{x}_k$ SI HA $\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)|I_k| \leq$

$\leq \sum_{k=1}^{n} g(\tilde{x}_k)|I_k|$ E LA TESI SEGUE PASSANDO AL LIMITE.

APPLICAZIONE: $f(x) = e^{-x^2}$ È INTEGRABILE E PER OGNI $x > 0$ SI HA $\int_0^x e^{-t^2}\,dt \leq$

$\int_0^x 1\,dt = x$ E $\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geq \int_0^x e^{-x^2}\,dt$

$= x\,e^{-x^2}$. IN PARTICOLARE, PONENDO $f(x) = 0$ IN $[a,b]$ SEGUE CHE SE $g(x) \geq 0$ È INTEGRABILE, RISULTA

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b 0\,dx = 0\cdot(b-a) = 0$$

SI PUÒ DIMOSTRARE (PROBLEMA) CHE SE f È INTEGRABILE, ALLORA ANCHE $f^+(x)$, $f^-(x)$ E $|f(x)|$ SONO INTEGRABILI (CFR. 15 OTTOBRE). IN TAL CASO, DAL FATTO CHE $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

SEGUE CHE $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq$

$$\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ E}$$

QUINDI $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)

LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI INTEGRAZIONE

SE f, g SONO INTEGRABILI SU $[a,b]$ ALLORA, QUALUNQUE SIANO $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, LA FUNZIONE $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ È INTEGRABILE SU $[a,b]$ E RISULTA

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx =$$

$$= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

DIMOSTRAZIONE: $\sum_{k=1}^n h(\tilde{x}_k)|I_k| =$

$$\lambda \sum_{k=1}^n f(\tilde{x}_k)|I_k| + \mu \sum_{k=1}^n g(\tilde{x}_k)|I_k|$$

MA 14 DIC 2021

ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE: QUALUNQUE FUNZIONE $f: [a,b] \cup [b,c] \to \mathbb{R}$ È INTEGRABILE SU $[a,b]$ E SU $[b,c]$ SE E SOLO SE È INTEGRABILE SU $[a,c]$.

IN TAL CASO, RISULTA $\int_a^b f(x)\,dx +$

$$+ \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

PONENDO, PER DEFINIZIONE, $\int_a^a f(x)\,dx$

$:= 0$ E $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

L'UGUAGLIANZA CONTINUA A VALERE PER OGNI PERMUTAZIONE DEGLI ESTREMI $\{a, b, c\}$.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

DATA UNA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILE, E SCELTO $x_0 \in [a,b]$, LA FUNZIONE F DATA DA $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ È DERIVABILE IN OGNI PUNTO $x_1 \in [a,b]$ DOVE f È CONTINUA, E SI HA $F'(x_1) = f(x_1)$.

MA 14 DIC 2021

ESEMPIO: PRENDO $f(x) = c$ (COSTANTE). IN TAL CASO, $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = c\,(x - x_0)$. SI CONSTATA CHE $F'(x) = c$.

ESEMPIO: PRENDO $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ E $x_0 = 0$.

PER IL TEOREMA FONDAMENTALE, LA FUNZIONE

$F(x) = \operatorname{erf}(x) := \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\,dt$ È DERIVABILE IN OGNI PUNTO E SODDISFA $F'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

ESERCIZIO: STUDIARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $\operatorname{erf}(x)$ SAPENDO CHE $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$.

PROBLEMA: SE f È INTEGRABILE, QUALI SONO I PUNTI DI CONTINUITÀ DI $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$?

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: PRENDO UN PUNTO x_1 DOVE f È CONTINUA E CERCO IL LIMITE DI

$$\frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_1 + h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1 + h} f(t)\,dt \quad \text{PER L'ADDITIVITÀ.}$$

ESSENDO f CONTINUA IN x_1, PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ESISTE $\delta \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE

$$f(x_1) - \varepsilon \le f(t) \le f(x_1) + \varepsilon$$

PER OGNI $t \in (x_1 - \delta,\ x_1 + \delta)$.

QUINDI, SE $|h| < \delta$, PER LA MONOTONIA DELL'INTEGRALE SI HA

$$f(x_1) - \varepsilon = \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1 + h} \left(f(x_1) - \varepsilon \right) dt \le$$

$$\le \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1 + h} f(t)\,dt \le \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1 + h} \left(f(x_1) + \varepsilon \right) dt$$

$= f(x_1) + \varepsilon \quad (\text{SE } h \ge 0)$. SE $h < 0$ SI TROVA

$$f(x_1) - \varepsilon = -\frac{1}{h} \int_{x_1 + h}^{x_1} \left(f(x_1) - \varepsilon \right) dt \le$$

$$\le \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1 + h} f(t)\,dt = -\frac{1}{h} \int_{x_1 + h}^{x_1} f(t)\,dt \le$$

$$\le -\frac{1}{h} \int_{x_1 + h}^{x_1} \left(f(x_1) + \varepsilon \right) dt = f(x_1) + \varepsilon$$

E LA TESI SEGUE DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE.

CONSEGUENZA: SE f È CONTINUA IN TUTTO L'INTERVALLO $[a, b]$ ALLORA LA $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ SODDISFA $F' = f$ IN TUTTO $[a, b]$: F È UNA PRIMITIVA DI f.

DEFINIZIONE: UNA PRIMITIVA (O ANTIDERIVATA) DI f IN UN INTERVALLO I È UNA FUNZIONE G CHE SODDISFA $G' = f$ IN TUTTO L'INTERVALLO I.

OSSERVAZIONE: SE UNA F È DERIVABILE IN TUTTO UN INTERVALLO I, LA SUA DERIVATA $f = F'$ NON È DETTO CHE SIA INTEGRABILE! (VITO VOLTERRA, 1881)

TEOREMA: SE F E G SONO PRIMITIVE DELLA STESSA f SULLO STESSO INTERVALLO I, ALLORA $\frac{d}{dx}\left(F(x)-G(x)\right) =$

$$= F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

QUINDI (2 DICEMBRE) $F-G$ È COSTANTE.

CONSEGUENZA: SE f HA UNA PRIMITIVA F SU DI UN INTERVALLO I, L'INSIEME DI TUTTE LE PRIMITIVE È $\{G : I \to \mathbb{R} :$

$$G(x) = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}\}.$$

QUESTO INSIEME SI CHIAMA INTEGRALE INDEFINITO DI f E SI DENOTA CON

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

FRA L'INTEGRALE DEFINITO E QUELLO INDEFINITO SUSSISTE UNA NOTEVOLE RELAZIONE, DETTA TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE, O TEOREMA DI VALUTAZIONE: SE f È INTEGRABILE SU $[a,b]$ E AMMETTE PRIMITIVA F, ALLORA

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ESEMPIO: LA FUNZIONE COSTANTE $f(t) = c$ HA LA PRIMITIVA $F(x) = c\,(x - x_0)$, E SI CONSTATA CHE $\int_a^b c\,dt = F(b) - F(a)$

$$= c\,(b - x_0) - c\,(a - x_0) = c\,(b-a).$$

AVVERTENZA: L'UGUAGLIANZA PRECEDENTE VIENE SPESSO, A TORTO, CONSIDERATA COME LA DEFINIZIONE DELL'INTEGRALE:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

LEGGENDO « FONDAMENTI PER LA TEORICA DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE » DI ULISSE DINI SI APPRENDE CHE, NELL'OTTOCENTO, ERA PROPRIO QUELLA LA DEFINIZIONE.

SVOLGIAMO LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI VALUTAZIONE. LA TESI SEGUE DAL FATTO CHE PER OGNI DECOMPOSIZIONE DELL'INTERVALLO $[a,b]$ ESISTONO PUNTI $\tilde{x}_k$ TALI CHE $\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\,|I_k| = F(b) - F(a)$.

L'ESISTENZA DI TALI PUNTI SI DIMOSTRA APPLICANDO IL TEOREMA DI LAGRANGE ALLA F NEGLI INTERVALLI $I_k = [x_{k-1}, x_k]$: ESISTE $c \in (x_{k-1}, x_k)$ TALE CHE

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c)\cdot(x_k - x_{k-1})$$

PRENDENDO $\tilde{x}_k = c$ POSSIAMO SCRIVERE

$$f(\tilde{x}_k)\,|I_k| = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

PER OGNI $k = 1, \dots, n$. SOMMANDO SU k SI OTTIENE $\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{x}_k)\,|I_k| =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right) =$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

SEMPLICI APPLICAZIONI (INTEGRALI IMMEDIATI)

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

IN GENERALE, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA $\displaystyle\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$

E, PER LA LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI INTEGRAZIONE, $\displaystyle\int_a^b \sum_{k=0}^n a_k x^k\,dx =$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k\,dx = \sum_{k=0}^n a_k \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

SIMILMENTE, PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ SI PUÒ SCRIVERE $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$

IN PARTICOLARE, $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

DA CUI $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left(b^{3/2} - a^{3/2}\right)$ SE $a,b \in [0,+\infty)$. SIMILMENTE, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} =$

$= -\frac{1}{x} + C$. QUINDI $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}.$

L'INTEGRALE $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ HA L'INTEGRANDA INDEFINITA NEL PUNTO $x=0$. PONIAMO ALLORA

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{SE } x \neq 0 \\ y_0, & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

L'INTEGRALE $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ NON È BEN DEFINITO PERCHÉ LA FUNZIONE INTEGRANDA NON È LIMITATA. SI PUÒ, PERÒ, PROCEDERE COME SEGUE.

GI 16 DIC 2021

INTEGRALE IMPROPRIO O GENERALIZZATO

CONSIDERIAMO $f:(a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ INTEGRABILE SU $[c,b]$ PER OGNI $c \in (a,b)$.

ESEMPIO: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ È INTEGRABILE SU $[c,1]$ PER OGNI $c \in (0,1)$.

SE ESISTE IL LIMITE $\displaystyle\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx = L$

SI DEFINISCE $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := L$. SE $L \in \mathbb{R}$

LA f SI DICE SOMMABILE IN SENSO IMPROPRIO.

ESEMPIO: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^2} =$

$= \displaystyle\lim_{c\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{c}\right) = +\infty.$

ESEMPIO: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

QUINDI $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx =$

$= -\displaystyle\lim_{c\to 0^+} \log c = +\infty.$

UNA FUNZIONE SOMMABILE IN SENSO IMPROPRIO. SAPPIAMO CHE $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$

$= 2\sqrt{x} + C$, QUINDI $\displaystyle\int_c^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$

$= 2\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)$ PER OGNI $b,c \in \mathbb{R}^+$.

INOLTRE $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{b}$, IN SENSO IMPROPRIO, PER OGNI $b \in \mathbb{R}^+$.

GI 16 DIC 2021

PER ANDARE AL DI LÀ DEGLI INTEGRALI IMMEDIATI, RIVESTONO FONDAMENTALE IMPORTANZA LE REGOLE DI INTEGRAZIONE PER PARTI E PER SOSTITUZIONE.

$$\boxed{\text{REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI}}$$

DAL CALCOLO DIFFERENZIALE SAPPIAMO CHE SE f E g SONO DERIVABILI IN UN INTERVALLO, SI HA $\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. QUINDI $f(x)g(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

MA ALLORA $\int\left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx$

$= f(x)g(x) + C$

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE INDEFINITO:

SE $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ E $\int g(x)\,dx = G(x) + C$, ALLORA, PRESI $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ E POSTO $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$

RISULTA $\int h(x)\,dx = \lambda F(x) + \mu G(x) + C$.

DIMOSTRAZIONE: DERIVARE IL SECONDO MEMBRO.

TORNANDO ALLA REGOLA DI INTEGRAZIONE PER PARTI, SE $f'(x)g(x)$ E $f(x)g'(x)$ AMMETTONO PRIMITIVA, PER LINEARITÀ SI PUÒ DEDURRE CHE

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$

ESEMPI TIPICI: $x^n \operatorname{sen} x$, $x^n \cos x$, $x^n e^x$.

$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$

$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$. VERIFICA:

$\frac{d}{dx}\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x\right) = -\cos x +$

$+ x \operatorname{sen} x + \cos x = x \operatorname{sen} x$.

ESPEDIENTE: POSTO $f(x) = x$, LA REGOLA DIVENTA $\boxed{\int g(x)\,dx = x g(x) - \int x g'(x)\,dx.}$

ESEMPIO: $\int \log x\,dx = x\log x - \int dx$

$= x\log x - x + C$.

VE 17 DIC 2021

ESEMPIO: $\int\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} +$

$-\int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} +$

$-\int\sqrt{1-x^2}\,dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ QUINDI

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C$$

ESEMPIO: $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x +$

$-\int e^x \cos x\,dx$, MA ANCHE: $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx$, QUINDI

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x\,\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2} + C$$

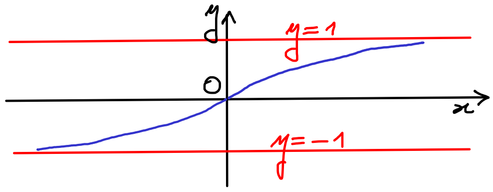
$$\int e^x \cos x\,dx = e^x\,\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2} + C$$

VE 17 DIC 2021

IL GRAFICO DELLA FUNZIONE DEGLI ERRORI $\mathrm{erf}(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\, dt$ SI TRACCIA IMMEDIATAMENTE SAPENDO CHE $\frac{d}{dx}\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ E CHE $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{erf}(x) = 1$. SICCOME LA FUNZIONE È DISPARI IN QUANTO $\mathrm{erf}(-x)$

$$= \int_0^{-x} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\, dt = -\int_{-x}^{0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\, dt$$

$= -\mathrm{erf}(x)$, IL GRAFICO È IL SEGUENTE:



ATTENZIONE: LA FUNZIONE DEGLI ERRORI NON È COMPOSTA DA e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, x^α E LE LORO FUNZIONI INVERSE, E LE LORO COMBINAZIONI LINEARI, I LORO PRODOTTI E RAPPORTI, COSÌ COME LA FUNZIONE $\log x$ NON È UNA FUNZIONE RAZIONALE (BENCHÉ $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$).

ALTRI CASI ANALOGHI SONO, AD ESEMPIO,

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx, \quad \int e^{x^2}\, dx, \quad \int \operatorname{sen}(x^2)\, dx$$

UNA PRIMITIVA DELLA FUNZIONE e^{x^2} È LA FUNZIONE $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, i\, \mathrm{erf}(ix)$

COSÌ COME UNA PRIMITIVA DI $\frac{1}{x}$ È

$$G(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{PER } x \in (0, +\infty).$$

REGOLA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

EFFETTUANDO LA SOSTITUZIONE $x = \operatorname{sen}\alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, SI OTTIENE $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ $= \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}\, \cos\alpha\, d\alpha$ IN QUANTO $\frac{dx}{d\alpha} = \cos\alpha$, E QUINDI $= \int \cos^2\alpha\, d\alpha =$

$$= \int \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\, d\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

IN GENERALE, SE $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ E PONIAMO $x = g(\alpha)$, OTTENIAMO

$$\left(\int f(x)\, dx\right)_{x=g(\alpha)} = F(g(\alpha)) + C.$$

SE g È DERIVABILE, $\frac{d}{d\alpha} F(g(\alpha)) = f(g(\alpha))\, g'(\alpha)$ E PERCIÒ

$$\int f(g(\alpha))\, g'(\alpha)\, d\alpha = F(g(\alpha)) + C$$

DUNQUE

$$\boxed{\left(\int f(x)\, dx\right)_{x=g(\alpha)} = \int f(g(\alpha))\, g'(\alpha)\, d\alpha}$$

IN PARTICOLARE, POSTO $f(x) = \frac{1}{x}$ SI TROVA

$$\int \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}\, d\alpha = \int \frac{dx}{x} = \log|g(\alpha)| + C$$

ESEMPIO: $\int \operatorname{tg}\alpha \, d\alpha = -\int \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} d\alpha =$
$= -\log|\cos\alpha| + C$

ESEMPIO: $\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1/x}{\log x} dx$
$= \log|\log x| + C$

PSEUDOESEMPIO: $\int \sqrt{3-2x}\, dx =$
$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right) + C$
AVENDO POSTO $3-2x = t$, DA CUI
$-2\,dx = dt$, DUNQUE $\int \sqrt{3-2x}\,dx$
$= -\frac{1}{3}(3-2x)^{3/2} + C$. A QUESTO
RISULTATO SI ARRIVA DIRETTAMENTE.

ESEMPIO: $\int \cos^3 x\, dx = \int (\cos^2 x)\cos x\, dx$
$= \int \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx =$
$= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

IN GENERALE, POSTO $f(x) = x^\beta$, $\beta \neq -1$, IN
$$\left(\int f(x)\,dx\right)_{x=g(\alpha)} = \int f(g(\alpha))\, g'(\alpha)\, d\alpha$$
OTTENIAMO $\int (g(\alpha))^\beta g'(\alpha)\, d\alpha =$
$$= \int x^\beta\, dx = \frac{(g(\alpha))^{\beta+1}}{\beta+1} + C$$

VE 17 DIC 2021

ESEMPIO: $\int \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \int \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} d\alpha$

QUINDI, POSTO $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$, OTTENIAMO
$\alpha = 2\operatorname{arctg} t$ DA CUI $d\alpha = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ E
$$\int \frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} d\alpha = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2\,dt}{1+t^2} =$$
$= \log\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| + C$

OSSERVAZIONE: $ax^2 + bx + c =$
$= (\sqrt{a}\,x)^2 + 2\frac{b\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}x + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 +$
$+ c - \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 +$
$+ c - \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$ SE $a \in (0,+\infty)$

QUINDI $t^2 + A$ ESSENDO $t = \sqrt{a}\,x +$
$+ \frac{b}{2\sqrt{a}}$ E $A = c - \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$

ESEMPIO: $\int \sqrt{2-x^2}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$

QUINDI, POSTO $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$, $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}$, OTTENIAMO

$= 2\int \sqrt{1-t^2}\, dt$ E SI PROSEGUE COME
PRIMA.

ALLA LUCE DELL'OSSERVAZIONE PRECEDENTE, RIVESTONO PARTICOLARE IMPORTANZA GLI INTEGRALI

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C \quad (29/11)$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \operatorname{sett\,senh} t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \operatorname{sett\,cosh} t + C$$

PER $t \in (1, +\infty)$. ESERCIZIO: CHE SUCCEDE SE $t \in (-\infty, -1)$?

LA FUNZIONE $y = \operatorname{sett\,senh} t$ È LA FUNZIONE INVERSA DI $t = \operatorname{senh} y$ (2/11).

LA FUNZIONE $y = \operatorname{sett\,cosh} t$ È LA FUNZIONE INVERSA DELLA RESTRIZIONE DI $t = \cosh y$ AI VALORI $y \in [0, +\infty)$.

PER LA REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE INVERSA (29/11), SI TROVA

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sett\,senh} t = \frac{1}{\frac{d}{dy}\operatorname{senh} y} = \frac{1}{\cosh y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\frac{d}{dt} \operatorname{sett\,cosh} t =$

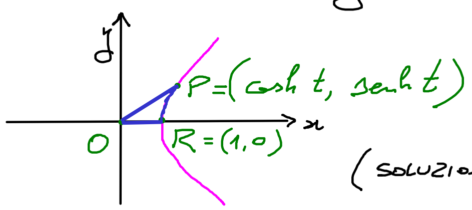
$= \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ PER OGNI $t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

LU 20 DIC 2021

ESERCIZIO: ESPRIMERE ELEMENTARMENTE LE FUNZIONI $y = \operatorname{sett\,senh} t$ E $\operatorname{sett\,cosh} t$.

SUGGERIMENTO: MOLTIPLICARE PER $2e^y$ L'UGUAGLIANZA $t = \dfrac{e^y \mp e^{-y}}{2}$ E RISOLVERE L'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO NELL'INCOGNITA $x = e^y$ (PAG. 270).

ESERCIZIO: PRENDERE $t \in \mathbb{R}$ ED I PUNTI $P = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$ E $R = (1, 0)$. CALCOLARE L'AREA DELLA FIGURA PIANA (SETTORE IPERBOLICO) DELIMITATA DAI SEGMENTI OP, OR E DALL'ARCO PR DELL'IPERBOLE $x^2 - y^2 = 1$ (18/11)



(SOLUZIONE: $A = \frac{1}{2}|t|$, CFR. 23/11)

LU 20 DIC 2021

INTEGRAZIONE DI UNA f PARI O DISPARI SULL'INTERVALLO $[-z, z]$, $z \in \mathbb{R}^+$

SE f È INTEGRABILE E PARI, ALLORA

$$\int_{-z}^{z} f(x)\,dx = \int_{-z}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{z} f(x)\,dx =$$

$$= -\int_{z}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{z} f(x)\,dx =$$

$$= 2\int_{0}^{z} f(x)\,dx$$

SE f È INTEGRABILE E DISPARI, ALLORA

$$\int_{-z}^{z} f(x)\,dx = \int_{-z}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{z} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{z}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{z} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{z} f(-x)\,dx + \int_{0}^{z} f(x)\,dx = 0$$

ESEMPIO: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^{2k} \operatorname{sen} x\,dx = 0$

PER OGNI $k \in \mathbb{N}$.

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

L'INTEGRALE $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, CON $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ E $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ SI PUÒ SVOLGERE ELEMENTARMENTE CON UN METODO DOVUTO A CHARLES HERMITE, CHE PERÒ RICHIEDE LA FATTORIZZAZIONE DI $Q(x)$. IN SINTESI, L'INTEGRALE SI RICONDUCE AD UNA SOMMA DI INTEGRALI ELEMENTARI, DEL TIPO

$\int x^k\,dx$ CON $k \in \mathbb{Z}$ OPPURE $\int \frac{dx}{1+x^2}$

O ANCHE $\int \frac{P(x)}{(1+x^2)^m}\,dx$.

ESEMPIO: $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

$\Delta = 1 > 0$, $x_{1,2} = 2, 3$,

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\left(\frac{1}{(x^2-5x+6)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-2)^2}\right)$$

$$\frac{(A+B)x-3A-2B}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 3A+2B = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{A\,dx}{x-2} + \int \frac{B}{x-3}\,dx = A\log|x-2| +$$

$$+ B\log|x-3| + C$$

 LU 20 DIC 2021

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \log(1+x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{x-2} + C$$

$$\int \frac{1}{(x+5)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+5)^2} + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{1+x^2} + C$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot x}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

QUINDI
$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \operatorname{arctg} x +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + C$$

INTEGRALI GENERALIZZATI E SERIE

DATA $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, SE f È INTEGRABILE IN $[a, b]$ PER OGNI $b \in (a, +\infty)$, E SE ESISTE IL $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)\,dt = L$, FINITO O INFINITO, SI DEFINISCE

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt := L.$$

ESEMPI:
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1}$$

PER $\alpha > 1$ ESERCIZIO: $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$

TEOREMA DEL CONFRONTO: SE $0 \le f(x) \le g(x)$ IN $[a, +\infty)$ ED f, g SONO INTEGRABILI IN $[a, b]$ PER OGNI $b \in (a, +\infty)$, ALLORA GLI INTEGRALI $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ E $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ESISTONO, E

$$0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

ESERCIZIO: DIMOSTRARLO

VERIFICHIAMO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ SE $\alpha \in (1, +\infty)$. SCRIVIAMO $S_n =$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dx \leq$$

$$\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$< 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

E LA TESI SEGUE.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO, SE f È INTEGRABILE SU $[c, a]$ PER OGNI $c \in (-\infty, a)$, E SE ESISTE IL LIMITE $\lim_{c \to -\infty} \int_c^a f(t)\,dt = L$, FINITO O INFINITO, SI DEFINISCE

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = L.$$

INFINE, SE ESISTONO I DUE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt \quad \text{E} \quad \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

(E NON SONO INFINITI E DISCORDI)

SI DEFINISCE $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt :=$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(t) = e^{-t^2}$ È SOMMABILE SULL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$.

PER VERIFICARLO, APPLICHIAMO IL TEOREMA DEL CONFRONTO: INNANZITUTTO, ESSENDO $f(t) \geq 0$ PER OGNI t, LA FUNZIONE $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ È CRESCENTE IN QUANTO $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ PER OGNI x. D'ALTRO CANTO, SE $x_1 < x_2$ ALLORA $F(x_2) = \int_0^{x_2} e^{-t^2}\,dt$

$$= \int_0^{x_1} e^{-t^2}\,dt + \int_{x_1}^{x_2} e^{-t^2}\,dt \geq F(x_1).$$

MA 21 DIC 2021

MA ALLORA IL LIMITE $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$ ESISTE, FINITO O INFINITO, ED È POSITIVO.

SI HA, INOLTRE: $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = = -e^{-t} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$.

QUINDI $F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq$
$\leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} dt \leq$
$\leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \frac{1}{e} < +\infty$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. QUINDI $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \in (0, +\infty)$

E DI CONSEGUENZA $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt =$
$= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \in (0, +\infty)$ E PERCIÒ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \in (0, +\infty).$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

NEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ SI UTILIZZA LA DENSITÀ NORMALE $g(x) =$
$= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$ DOVE $\mu \in \mathbb{R}$ E $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

ESERCIZIO: $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$.

ESERCIZIO: CALCOLARE L'INTEGRALE INDEFINITO $\int \operatorname{sen} \omega t \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt$

CON $\omega, T \neq 0$ E $\omega \neq \pm \frac{2\pi}{T}$.

SUGGERIMENTO: FORMULE DI WERNER (29 OTTOBRE).