Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Equazioni differenziali

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

MA 21 DIC 2021

LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI COSTITUISCONO UNO DEI SETTORI PIÙ VASTI DI TUTTA LA MATEMATICA E RIGUARDANO ANCHE LA FISICA, L'INGEGNERIA, LA BIOLOGIA, L'ECONOMIA, ECCETERA. ESEMPIO CLASSICO: LA SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA NEWTONIANA:

$$\bar{F}(t, \bar{z}(t), \bar{z}'(t)) = m\, \bar{z}''(t)$$

DOVE $\bar{z}(t)$ È UNA FUNZIONE INCOGNITA CHE DÀ LA POSIZIONE DI UN PUNTO MATERIALE ALL'ISTANTE t.

IL SETTORE È TALMENTE VASTO CHE UNA CLASSIFICAZIONE ESAUSTIVA È IMPENSABILE.

TERMINOLOGIA DI BASE: UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE È UN'EQUAZIONE DEL TIPO

$$F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

DOVE $y(x)$ È LA FUNZIONE INCOGNITA, DERIVABILE n VOLTE, CON $n \geq 1$ DETTO ORDINE DELL'EQUAZIONE. SI DISTINGUE TRA LE EQUAZIONI LINEARI

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$$

E LE ALTRE. ESEMPI (29/11): $y' = y$ E $y'' = -y$ SONO EQUAZIONI LINEARI

$$\left(y^{(0)}(x) - y^{(1)}(x) = 0, \quad y^{(0)}(x) + y^{(2)}(x) = 0 \right)$$

MENTRE $y' = 1 + y^2$ NON È LINEARE. LE EQUAZIONI LINEARI CON $f(x)$ IDENTICAMENTE NULLA SI DICONO OMOGENEE.

MA L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PIÙ SEMPLICE È $y' = 0$ LE CUI SOLUZIONI SONO LE COSTANTI (2/12). L'INSIEME DELLE SOLUZIONI SI SCRIVE $y(x) = C$ E SI CHIAMA INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE $y' = 0$.

UN ESEMPIO MENO IMMEDIATO È $y' = f(x)$ IL CUI INTEGRALE GENERALE È $y(x) = F(x) + C$ DOVE $F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$, AMMESSO CHE NE ESISTA UNA. AD ESEMPIO,

SE $f(x) = H(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

L'EQUAZIONE $y' = f(x)$ NON HA SOLUZIONI IN NESSUN INTORNO DELL'ORIGINE.

INFATTI OGNI EVENTUALE SOLUZIONE $y(x)$ DEVE ESSERE CONTINUA E AVERE LA FORMA $y(x) = C$ SE $x \in (-\infty, 0)$ E $y(x) = x + q$ SE $x \in (1, +\infty)$. QUINDI $C = \lim_{x \to 0^-} y(x) = \lim_{x \to 0^+} y(x) = q$.

LE UNICHE POSSIBILITÀ SONO LE $y(x) = \begin{cases} x + q, & x \geq 0 \\ q, & x < 0 \end{cases}$ TUTTAVIA

$y'(0^-) = 0 \neq y'(0^+) = 1$, QUINDI $y(x)$ NON È DERIVABILE PER $x = 0$.

CI LIMITIAMO ALLE EQUAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI $a_k(x)$ E TERMINE NOTO $f(x)$ CONTINUI.

SAPPIAMO CHE $y(x) = e^x$ È UNA SOLUZIONE DI $y' = y$. CERCHIAMO LE ALTRE. UNA È LA SOLUZIONE BANALE $y(x) \equiv 0$. PENSIAMO AD UNA SOLUZIONE $y(x)$ TALE CHE $y(x_0) \neq 0$ IN UN $x_0 \in \mathbb{R}$, E QUINDI $y(x) \neq 0$ IN UN INTORNO I DI x_0. L'EQUAZIONE DIVENTA

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = 1$$

E CIOÈ $\frac{d}{dx} \log |y(x)| = 1$

QUINDI $\log |y(x)| = x + C$

DA CUI $|y(x)| = e^x \cdot e^C = k e^x$, $k \in \mathbb{R}^+$, E PERCIÒ $y(x) = \pm k e^x$ (SI NOTI CHE $y(x)$ MANTIENE UNO STESSO SEGNO NELL'INTERVALLO I). IN CONCLUSIONE, L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE $y' = y$ SI PUÒ SCRIVERE $y(x) = k e^x$ CON $k \in \mathbb{R}$.

EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

HANNO LA FORMA $y'(x) = a(x)\, g(y(x))$ COME, AD ESEMPIO, $y' = y$ DOVE $a(x) \equiv 1$ E $g(y) = y$ MA ANCHE $y' = a(x)\, y$. L'EQUAZIONE $y' = 1 + y^2$, PUR NON ESSENDO LINEARE, È A VARIABILI SEPARABILI ($a(x) \equiv 1$, $g(y) = 1 + y^2$). SE $a(x)$ E $g(y)$ SONO FUNZIONI CONTINUE, LE SOLUZIONI SI POSSONO OTTENERE COME SEGUE.

1. SOLUZIONI BANALI: SE IL NUMERO y_0 È UNO ZERO DELLA FUNZIONE g, CIOÈ SE $g(y_0) = 0$, ALLORA LA FUNZIONE $y(x) \equiv y_0$ SODDISFA L'EQUAZIONE $y'(x) = a(x)\, g(y(x))$.

ESEMPI: L'EQUAZIONE $y' = y$ HA LA SOLUZIONE BANALE $y(x) \equiv 0$. L'EQUAZIONE $y' = 1 + y^2$ NON HA SOLUZIONI BANALI. L'EQUAZIONE DELLA LOGISTICA $y'(x) = y(x)\,(N - y(x))$, A VARIABILI SEPARABILI ($a(x) \equiv 1$, $g(y) = (N-y)\,y$) HA $y(x) \equiv 0$ E $y(x) \equiv N$.

ME 22 DIC 2021

② PENSIAMO ADESSO A UN'EVENTUALE SOLUZIONE $y(x)$ TALE CHE $g(y(x_0)) \neq 0$ IN UN CERTO PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$. RISULTA $g(y(x)) \neq 0$ IN UN INTORNO I DI x_0 E POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = a(x)$$

(SEPARAZIONE DELLE VARIABILI)

QUINDI $\displaystyle\int \frac{y'(x)\,dx}{g(y(x))} = \int a(x)\,dx =$

$= A(x) + C$ DOVE $A(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $a(x)$. L'INTEGRALE AL PRIMO MEMBRO, POSTO $t = y(x)$,

DIVENTA $\displaystyle\int \frac{dt}{g(t)} = G(t) + C$

DOVE $G(t)$ È UNA PRIMITIVA DI $\dfrac{1}{g(t)}$.

QUINDI LE EVENTUALI SOLUZIONI NON BANALI SODDISFANO L'UGUAGLIANZA

$$G(y(x)) = A(x) + C$$

DA CUI $y(x) = G^{-1}(A(x) + C)$

(LA $G(t)$ È INVERTIBILE PERCHÉ $G'(t) = \frac{1}{g(t)}$ NON CAMBIA SEGNO IN I).

ESERCIZIO: TROVARE L'INTEGRALE GENERALE DI $y' = (N - y)y$, CON $N \in \mathbb{R}^+$

ESEMPIO: TROVIAMO L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE $y' = 1 + y^2$.

NON ESSENDOCI SOLUZIONI BANALI, SEPARIAMO LE VARIABILI E OTTENIAMO $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx = x + C$

E SICCOME $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y + C$

POSSIAMO SCRIVERE $\operatorname{arctg} y(x) =$

$= x + C$ DA CUI RICAVIAMO $y(x)$

$= \operatorname{tg}(x + C)$. SI VEDE SUBITO, DERIVANDO, CHE $y'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x + C)$

$= 1 + (y(x))^2$.

OSSERVAZIONE FONDAMENTALE: L'INSIEME DI TUTTE LE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE OMOGENEA

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$$

È UNO SPAZIO VETTORIALE. DIMOSTRAZIONE: PRENDERE DUE SOLUZIONI $y_1(x)$ E $y_2(x)$, PRENDERE DUE COEFFICIENTI $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, E VERIFICARE (PER SOSTITUZIONE) CHE LA FUNZIONE $h(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ SODDISFA L'EQUAZIONE.

INOLTRE, SE I COEFFICIENTI $a_k(x)$ SONO FUNZIONI CONTINUE, E SE $a_n(x) \neq 0$, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA DIMENSIONE DI TALE SPAZIO COINCIDE CON L'ORDINE n DELL'EQUAZIONE (ANALISI MATEMATICA 3)

ESEMPIO: LE FUNZIONI $y(x) = k e^x$, $k \in \mathbb{R}$, SOLUZIONI DI $y' = y$, COSTITUISCONO UNO SPAZIO VETTORIALE LA CUI BASE HA UN SOLO ELEMENTO: AD ESEMPIO, LA FUNZIONE $y(x) = e^x$.

ESEMPIO: L'EQUAZIONE $y' = 1 + y^2$ NON È LINEARE, E IL TEOREMA NON SI APPLICA.

ESEMPIO: L'EQUAZIONE $y'' = -y$ SODDISFA LE IPOTESI CON $n = 2$.

ME 22 DIC 2021

OSSERVAZIONE: L'IPOTESI $a_n(x) \neq 0$ SERVE PER SCRIVERE L'EQUAZIONE IN FORMA NORMALE, CIOÈ NELLA FORMA

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$$

INFATTI L'EQUAZIONE

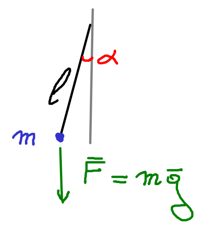
$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$$

DIVENTA

$$y^{(n)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)}\, y^{(k)}(x)$$

LA FORMA NORMALE È ESSENZIALE NEL TEOREMA DI ESISTENZA DI CAUCHY.

SULLA BASE DI QUESTI RISULTATI POSSIAMO SCRIVERE L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE $y'' = -y$, E, PIÙ IN GENERALE, DELL'EQUAZIONE $y'' = -\omega^2 y$ CON $\omega > 0$, DETTA EQUAZIONE DEI MOTI ARMONICI O DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI, CUI SI È CONDOTTI DALLA MODELLIZZAZIONE MATEMATICA DEL PENDOLO SEMPLICE.



LA SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA, $\bar{F} = m\bar{a}$ SI TRADUCE IN UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL TIPO $\alpha''(t) = -\operatorname{sen} \alpha(t)$ NELL'INCOGNITA $\alpha(t)$, RISOLTA DA JACOBI NELL'OTTOCENTO, LA QUALE SI APPROSSIMA CON $\alpha'' = -\alpha$ PER PICCOLI VALORI DI α.

ME 22 DIC 2021

SICCOME $y(x) = \operatorname{sen} x$ E $y(x) = \cos x$ SONO DUE SOLUZIONI DI $y'' = -y$ LINEARMENTE INDIPENDENTI, L'INTEGRALE GENERALE DOVRÀ AVERE LA FORMA $y(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$.

SIMILMENTE, L'INTEGRALE GENERALE DI $y'' = -\omega^2 y$, CON $\omega > 0$ È $y(x) = A \cos \omega x + B \operatorname{sen} \omega x$.

DUE DOMANDE: 1 DATA L'EQUAZIONE $a y'' + b y' + c y = 0$, CON $a \neq 0$, COME TROVO UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI?

2 AMMESSO DI CONOSCERE L'INTEGRALE GENERALE DI $a y'' + b y' + c y = 0$, COME RISOLVO L'EQUAZIONE NON OMOGENEA $a y'' + b y' + c y = f(x)$?

ALLA PRIMA DOMANDA HA RISPOSTO EULERO, MOSTRANDO CHE LE FUNZIONI $y(x) = e^{\lambda x}$ SODDISFANO $a y'' + b y' + c y = 0$ SE E SOLO SE IL PARAMETRO $\lambda \in \mathbb{C}$ SODDISFA L'EQUAZIONE $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ (EQUAZIONE CARATTERISTICA) LA QUALE HA DUE SOLUZIONI λ_1, λ_2. SE $\lambda_1 \neq \lambda_2$, OTTENGO LA BASE $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. SE $\lambda_1 = \lambda_2$ UNA BASE È $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$.

PER QUANTO RIGUARDA L'EQUAZIONE LINEARE NON OMOGENEA

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$$

È NOTEVOLE IL FATTO CHE DA UNA SINGOLA SOLUZIONE $z(x)$ SI ESPRIMONO TUTTE LE ALTRE TRAMITE LA FORMULA

$$y(x) = z(x) + \sum_{j=1}^{n} A_j\, y_j(x)$$

DOVE $y_1(x), \dots, y_n(x)$ È UNA BASE DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = 0$

MOTIVO: SE PRENDO DUE SOLUZIONI $y(x)$, $z(x)$ DELL'EQUAZIONE COMPLETA, LA DIFFERENZA $y(x) - z(x)$ SODDISFA

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \left(y(x) - z(x) \right)^{(k)} = 0$$

INFINE, UN METODO PRATICO PER TROVARE UNA SOLUZIONE $z(x)$ NEL CASO IN CUI $f(x)$ SIA UN POLINOMIO, OPPURE UNA FUNZIONE CIRCOLARE, O UN'ESPONENZIALE, CONSISTE NEL CERCARE $z(x)$ DELLO STESSO TIPO DI $f(x)$ (METODO DI SOMIGLIANZA).

ESERCIZIO: RISOLVERE $y'' + y = 1$ CERCANDO $z(x)$ DELLA FORMA $z(x) = C$.

ESERCIZIO: RISOLVERE $y'' + y = \operatorname{sen} 2x$ CERCANDO $z(x) = A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$.