Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Calcolo differenziale

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

MA 23 NOV 2021

IL CALCOLO DIFFERENZIALE FU SVILUPPATO NEL SEICENTO DA NEWTON E DA ALTRI MATEMATICI PER VARI SCOPI:

- FORMULAZIONE MATEMATICA DELLA FISICA (PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA: NEWTON, 1687) ESEMPIO:
  $\bar{F} = \dot{\bar{p}}$, DOVE $\dot{\bar{p}}$ È LA FLUSSIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO $\bar{p} = m\bar{v}$. IN COMBINAZIONE CON $|\bar{F}| = G\,\frac{m_1 m_2}{d^2}$, CONSENTÌ DI DEDURRE E DARE FONDAMENTO ALLE LEGGI DI KEPLERO SUL MOTO DEI PIANETI

- GLI ALBORI DELL'EPIDEMIOLOGIA: PREVEDERE L'EVOLUZIONE DEL CONTAGIO (BERNOULLI)

- NUOVO METODO PER LA DETERMINAZIONE DEI MASSIMI E DEI MINIMI DI UNA FUNZIONE (NON BANALE) E ANCHE PER TROVARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI UNA FUNZIONE DATA (NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS ITEMQUE TANGENTIBUS: LEIBNIZ, 1684)

- LA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA INVERSO DELLE TANGENTI (EQUAZIONI DIFFERENZIALI)

OGGI SI PONE ALLA BASE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE LA DEFINIZIONE DELLA DERIVATA DATA DA CAUCHY NELL'OTTOCENTO. SEGUENDO IL TESTO, CONSIDERIAMO UNA $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ ED UN PUNTO $x_0 \in S \cap DS$. SE ESISTE FINITO IL $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ LA FUNZIONE f SI DICE DERIVABILE NEL PUNTO x_0 ED IL VALORE DEL LIMITE SI CHIAMA DERIVATA DI f NEL PUNTO x_0 E SI PUÒ INDICARE CON

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ESEMPIO: SE $f(x) = mx + q$, $S = \mathbb{R} = DS$, SI TROVA $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$ PER OGNI $x \neq x_0$ E QUINDI $f'(x_0) = m$.

ESEMPIO: SE $f(x) = x^2$, $S = \mathbb{R} = DS$, SI TROVA $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x + x_0$ PER OGNI $x \neq x_0$ E QUINDI $f'(x_0) = 2x_0$.

ESEMPIO: SE $f(x) = \sqrt{x}$, $S = [0, +\infty) = DS$, TENENDO PRESENTE CHE $(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}) = x - x_0$, SI TROVA $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$ PER OGNI $x, x_0 \in [0, +\infty)$ CON $x \neq x_0$. QUINDI, ESSENDO $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$, CONCLUDIAMO CHE $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ SE $x_0 \in (0, +\infty)$.

INVECE, SE $x_0 = 0$, SI TROVA

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

QUINDI $\sqrt{x}$ NON È DERIVABILE NELL'ORIGINE.

MA 23 NOV 2021

PONENDO $h = x - x_0$, IL $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

SI PUÒ EQUIVALENTEMENTE SCRIVERE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

ESEMPIO: POSTO $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $S = \mathbb{R} = DS$, SI TROVA COL BINOMIO DI NEWTON

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k}$$

$$= \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x_0^{n-k}$$

SICCOME $\lim_{h \to 0} h^{k-1} = 0$ PERCHÉ LIMITE DI UN PRODOTTO, SI CONCLUDE CHE

$$f'(x_0) = \binom{n}{1} x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}.$$

SI PUÒ PENSARE AD $f'(x_0)$ COME AD UNA FUNZIONE DEL PUNTO x_0, LA FUNZIONE DERIVATA DALLA f (CAUCHY). TALE FUNZIONE, OLTRE CHE CON f' (LAGRANGE) SI PUÒ INDICARE ANCHE CON $\dot{f}$ (NEWTON), $\frac{df}{dx}$ (LEIBNIZ), Df (EULERO), $f^{(1)}(x)$.

SE $f'(x)$ È DERIVABILE A SUA VOLTA, SI PONE $\left(f'(x)\right)' = f''(x) = f^{(2)}(x)$ (DERIVATA SECONDA DI f). SIMILMENTE SI POSSONO DEFINIRE $f^{(k)}(x)$ PER OGNI $k \in \mathbb{N}$ CON LA CONVENZIONE CHE $f^{(0)} = f$.

DERIVATE PARZIALI: DATA UNA $f(x,y,z)$, SI POSSONO DEFINIRE LE DERIVATE PARZIALI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$$

ECCETERA. ESEMPIO: SE $f(x,y) = xy$ ALLORA $\frac{\partial f}{\partial x} = y$.

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI:

$$\bar{F}(t) = \left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right) \in \mathbb{R}$$

SI DEFINISCE $\bar{F}'(t) = \left(x'(t),\ y'(t),\ z'(t)\right)$

OPPURE $\bar{F}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\bar{F}(t) - \bar{F}(t_0)}{t - t_0}$

DERIVATE NOTEVOLI: CI SONO ALCUNI CASI IN CUI SI PUÒ APPLICARE LA DEFINIZIONE. ABBIAMO GIÀ VISTO CHE $\frac{d}{dx}(mx+q) = m$, IL CHE IMPLICA $\frac{dq}{dx} = 0$. PROBLEMA: TROVARE TUTTE LE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TALI CHE $f'(x) = 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. ABBIAMO ANCHE VISTO CHE $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ E $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

PONIAMO ADESSO $f(x) = \log|x|$ PER $x \neq 0$ E VERIFICHIAMO CHE $f'(x) = \frac{1}{x}$. FISSATO $x_0 \neq 0$ SI TROVA $\frac{\log|x| - \log|x_0|}{x - x_0} =$

$$= \frac{x_0}{x - x_0} \frac{1}{x_0} \log \frac{x}{x_0} \quad \text{PER OGNI } x \in \mathbb{R}$$

TALE CHE $|x - x_0| < |x_0|$.

MA 23 NOV 2021

Posto $t = \frac{x_0}{x-x_0}$, da cui $\frac{1}{t} = \frac{x}{x_0} - 1$,

possiamo scrivere $\frac{x_0}{x-x_0}\,\frac{1}{x_0}\log\frac{x}{x_0} =$

$= \frac{1}{x_0}\, t \log\left(1+\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{x_0}\cdot\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t.$

Sapendo che $\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, la tesi segue dalla continuità di $\log x$.

Resta da verificare che $\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$. Per studiare il caso $t\to+\infty$ osserviamo che $[t] \le t < [t]+1$, quindi

$$\left(1+\frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]} \le \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \le \left(1+\frac{1}{[t]}\right)^{[t]+1}.$$

Sappiamo che $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \longrightarrow e$, e vediamo che $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n =$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \longrightarrow e,$$

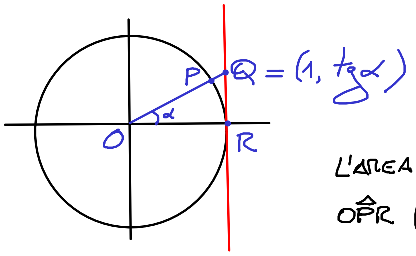
quindi la tesi segue per confronto. Infine, il caso $t\to-\infty$ si può studiare ponendo $s=-t$ e quindi cercando il limite

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = \lim_{s\to+\infty}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-s}$$

(esercizio)

Verifichiamo ora che $\frac{d}{d\alpha}\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$. Iniziamo con il caso particolare $\alpha_0 = 0$, cioè verifichiamo che $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$. Ricordiamo che $|\operatorname{sen}\alpha| \le |\alpha|$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, quindi $\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right| \le 1$ per ogni $\alpha\neq 0$. In particolare $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = \left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right| \le 1$ per $\alpha\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$. Procuriamoci una stima per difetto. L'area A del settore circolare di apertura α si ricava dalla proporzione

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{2\pi}, \quad \text{quindi} \quad A = \frac{1}{2}\alpha r^2$$



L'area del triangolo $O\hat{P}R$ $\left(\frac{1}{2}|\operatorname{sen}\alpha|\right)$ è minore di quella del settore $A = \frac{1}{2}|\alpha|$, la quale a sua volta è minore di quella del triangolo $O\hat{R}Q$

GI 25 NOV 2021

quindi $|\alpha| \le |\operatorname{tg}\alpha| = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\cos\alpha}$ per $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. In conclusione:

$$\cos\alpha \le \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \le 1$$

per $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$. Siccome $\cos\alpha$ è una funzione continua, $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$ e la tesi segue dal teorema del confronto.

GI 25 NOV 2021

IN GENERALE, SI HA CHE $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0}$

$$= \left(\cos \frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \xrightarrow[x \to x_0]{} \cos x_0$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE. SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE $\dfrac{d}{d\alpha} \cos \alpha = -\operatorname{sen} \alpha$.

INFATTI $\dfrac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} =$

$$= -\left(\operatorname{sen} \frac{x + x_0}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \longrightarrow -\operatorname{sen} x_0.$$

VERIFICHIAMO ORA CHE $\dfrac{d}{dx} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x^2}$ PER $x \neq 0$, E, PIÙ IN GENERALE,

$\dfrac{d}{dx} x^{-n} = -n x^{-n-1}$ PER OGNI $n \in \mathbb{Z}^+$.

SI TROVA: $\dfrac{x^{-n} - x_0^{-n}}{x - x_0} =$

$$= \frac{1}{x^n x_0^n} \, \frac{x_0^n - x^n}{x - x_0} \longrightarrow \frac{-n x_0^{n-1}}{x_0^{2n}} =$$

$= -n x_0^{-n-1}$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

LE IMPLICAZIONI DELLA DERIVABILITÀ:

1) LA DIFFERENZIABILITÀ (L'APPROSSIMABILITÀ DI $f(x)$ CON UN POLINOMIO DI PRIMO GRADO);

2) LA DETERMINAZIONE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$ NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$.

SUPPONIAMO CHE $f : S \to \mathbb{R}$ SIA DERIVABILE IN UN PUNTO $x_0 \in S \cap DS$. ALLORA

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = o(1) \text{ PER } x \to x_0.$$

IL SIMBOLO DI LANDAU o (o PICCOLO)

SI PUÒ SCRIVERE $f(x) = o(g(x))$ PER DIRE CHE $\dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 0$. SI DEVE PRECISARE A COSA TENDE x. ESEMPIO: $\operatorname{sen} x = o(x)$ PER $x \to \pm\infty$ PERCHÉ $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

MA NON PER $x \to 0$ PERCHÉ $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

PIÙ IN GENERALE, SI PUÒ SCRIVERE $f(x) = o(g(x))$ PER $x \to x_0$ SE PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ RISULTA $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ IN UN OPPORTUNO INTORNO $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}^+$.

DI CONSEGUENZA, $g(x) = o(1)$ SIGNIFICA $\dfrac{g(x)}{1} = g(x) \longrightarrow 0$. DUNQUE

$o(1)$ DENOTA UNA QUALUNQUE FUNZIONE $g(x)$ INFINITESIMA, CIOÈ TALE CHE $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

ESEMPIO: $\operatorname{sen} x = o(1)$ PER $x \to 0$.

GI 25 NOV 2021

DALL'UGUAGLIANZA

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = o(1)$$

SI RICAVA

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(1)(x-x_0)$$
$$= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

DA CUI SI RICAVA $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

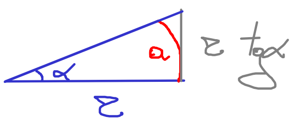
LA DERIVABILITÀ IMPLICA LA CONTINUITÀ.

INOLTRE, POSTO $y(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,

SI VEDE CHE

$$\frac{f(x)-y(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$$
$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

RILEGGIAMO A QUESTO PROPOSITO LA FREQUENTE SOSTITUZIONE DELL'ARCO a CON IL SEGMENTO DI TANGENTE:



$a = \alpha\varepsilon$

LA DIFFERENZA

$$\varepsilon\, tg\,\alpha - \alpha\varepsilon \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$$

VA CONFRONTATA CON $a = \alpha\varepsilon$

$$\frac{\varepsilon\, tg\,\alpha - \alpha\varepsilon}{\alpha\varepsilon} = \frac{tg\,\alpha}{\alpha} - 1 =$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} - 1 \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$$

ESERCIZIO: PRENDERE $\varepsilon = 6.000$ km, $a =$ 5000 STADI EGIZI, CALCOLARE $\varepsilon\, tg\,\alpha - \alpha\varepsilon$

ESERCIZIO: PRENDERE $\varepsilon = 6.000$ km, $d = \varepsilon\, tg\,\alpha = 10$ m, CALCOLARE $\varepsilon\, tg\,\alpha - \alpha\varepsilon$

IN CONCLUSIONE, LA RETTA DI EQUAZIONE

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

SI CHIAMA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$. INOLTRE, L'APPLICAZIONE LINEARE

$$L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$h \mapsto f'(x_0)h$$

SI CHIAMA DIFFERENZIALE DI f NEL PUNTO x_0 E SI INDICA CON df, O ANCHE CON $df(h)$ OPPURE $L(h)$. ABBIAMO VISTO CHE

$$\frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

OVVERO $f(x)-f(x_0) = L(x-x_0) + o(x-x_0)$

VE 26 NOV 2021

NE SEGUE L'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DELLA DERIVATA: $f'(x_0)$ È IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$.

VE 26 NOV 2021

REGOLE DI DERIVAZIONE

ATTENZIONE: IL NOME "REGOLE" NON SIGNIFICA CHE SIA OBBLIGATORIO USARLE!

(1) REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA SOMMA E DELLA DIFFERENZA, O, PIÙ IN GENERALE, LA LINEARITÀ DELL'OPERATORE DI DERIVAZIONE: DATE $f, g: S \to \mathbb{R}$ DERIVABILI NEL PUNTO $x_0 \in S \cap DS$, E DUE SCALARI $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (LAMBDA E MI), LA FUNZIONE $h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ È DERIVABILE NEL PUNTO x_0 E RISULTA $h'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.

CONSEGUENZA: $\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

DIMOSTRAZIONE: POSSIAMO APPLICARE L'ALGEBRA DEI LIMITI. INFATTI

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

(2) REGOLA DI DERIVAZIONE DEL PRODOTTO: $h(x) = f(x) g(x)$ È DERIVABILE, E SI HA

$$h'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

OSSERVAZIONE: IN GENERALE SI HA $h'(x_0) \neq f'(x_0) g'(x_0)$ COME SI VEDE PONENDO $f(x) = g(x) = x$ COSICCHÉ $f'(x) \cdot g'(x) = 1$ MENTRE $h'(x) = (x^2)' = 2x$.

DIMOSTRAZIONE: $\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

E LA TESI SEGUE PER LA CONTINUITÀ DI g.

(3) REGOLA DI DERIVAZIONE DEL RAPPORTO (RICHIEDE $g(x_0) \neq 0$): $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ È DERIVABILE, E $h'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

APPLICAZIONE: $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\operatorname{sen} x)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x) \cos x + (\operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

VE 26 NOV 2021

DIMOSTRAZIONE DELLA REGOLA DI DERIVAZIONE DEL RAPPORTO: $\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=$

$$=\frac{1}{x-x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)=$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\,\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$$

E LA TESI SEGUE.

NON SUSSISTE OBBLIGO DI UTILIZZO! ESEMPIO:

$$\frac{d}{dx}\frac{\log x}{x}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\log x\right)=-\frac{\log x}{x^2}+\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{1-\log x}{x^2}.$$

(4) REGOLA DI DERIVAZIONE DELLA FUNZIONE COMPOSTA $f(g(x))$ DI DUE FUNZIONI $y=g(x)$, DERIVABILE IN UN PUNTO x_0, E $t=f(y)$ DOVE $f:\mathrm{Im}\,g\longrightarrow\mathbb{R}$ È DERIVABILE NEL PUNTO $y_0=g(x_0)$. SI INTENDE CHE $y_0\in D\,\mathrm{Im}\,g$. LA FUNZIONE $h(x)=f(g(x))$ È DERIVABILE NEL PUNTO x_0 E $h'(x_0)=f'(y_0)\cdot g'(x_0)=$ $=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$. NELLA NOTAZIONE DI LEIBNIZ: $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dt}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$ È COME SE SI SEMPLIFICASSE dy COME NEL CALCOLO LETTERALE.

LA REGOLA SI ESTENDE ALLA FUNZIONE COMPOSTA $f_1\circ f_2\circ\dots\circ f_n$. ESEMPIO:

$$\frac{d}{dx}f\Big(g\big(h(x)\big)\Big)=f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big)\cdot g'\big(h(x)\big)\cdot h'(x)$$

PERCIÒ IN INGLESE SI CHIAMA THE CHAIN RULE (REGOLA DELLA CATENA)

ESEMPIO: $h(x)=\dfrac{1}{\log x}$ SI PUÒ VEDERE COME COMPOSTA DI $t=\dfrac{1}{y}$ E DI $y=\log x$

PERCIÒ $\dfrac{d}{dx}h(x)=-\dfrac{1}{y^2}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1}{x\log^2 x}$

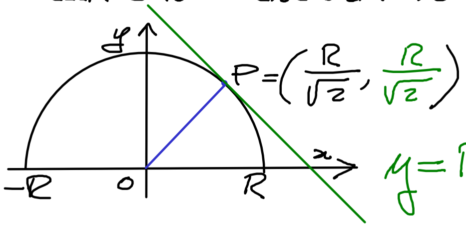
ESEMPIO: $\sqrt{R^2-x^2}=f(g(x))$

DOVE $f(t)=\sqrt{t}$, $g(x)=R^2-x^2$

QUINDI $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ E $g'(x)=-2x$

DA CUI $\dfrac{d}{dx}\sqrt{R^2-x^2}=\dfrac{-2x}{2\sqrt{t}}=$

$=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. NOTARE CHE $y=\sqrt{R^2-x^2}$ RAPPRESENTA LA METÀ SUPERIORE $(y\geq 0)$ DELLA CIRCONFERENZA $x^2+y^2=R^2$



$y=R\sqrt{2}-x$

$$\left.\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right|_{x=\frac{R}{\sqrt{2}}}=\frac{-R/\sqrt{2}}{\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}}}=-1$$

$$y=\sqrt{R^2-x_0^2}-(x-x_0)$$

$$=\frac{R}{\sqrt{2}}-x+\frac{R}{\sqrt{2}}=R\sqrt{2}-x$$

VE 26 NOV 2021

PER LA DIMOSTRAZIONE, SFRUTTIAMO IL FATTO CHE $f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0)$

E SOSTITUIAMO $y = g(x)$, $y_0 = g(x_0)$:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x-x_0} = f'(y_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} +$$

$$+ \frac{o(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$

E LA TESI SEGUE SE VERIFICHIAMO CHE $\dfrac{o(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

PER DEFINIZIONE DI O PICCOLO, PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ RISULTA $|o(g(x)-g(x_0))| \le$ (*) CONTINUITÀ DI g

$\le \varepsilon\, |g(x)-g(x_0)|$ IN $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$

MA $g(x)-g(x_0) = g'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0)$

QUINDI $$\frac{|o(g(x)-g(x_0))|}{|x-x_0|} \le \varepsilon\, |g'(x_0)| + \varepsilon \left|\frac{o(x-x_0)}{x-x_0}\right|$$ E LA TESI SEGUE PER L'ARBITRARIETÀ DI ε.

LU 29 NOV 2021

PRIMA DI PROSEGUIRE, OSSERVIAMO CHE SE $f: S \to \mathbb{R}$ È INIETTIVA E DERIVABILE, LA FUNZIONE INVERSA g PUÒ ESSERE DISCONTINUA, COME AD ESEMPIO ACCADE CON $f(x) = x^2$ SUL DOMINIO $S = (\mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}^+$, LA CUI DERIVATA È $f'(x) = 2x$ E LA CUI INVERSA È LA $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ DATA DA

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{SE } \sqrt{y} \in \mathbb{Q} \\ -\sqrt{y}, & \text{SE } \sqrt{y} \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

LA QUALE È DISCONTINUA.

CONSIDERIAMO ALLORA UNA $f: I \to \mathbb{R}$ STRETTAMENTE MONOTONA SULL'INTERVALLO I. ALLORA LA FUNZIONE INVERSA g È CONTINUA NEL SUO DOMINIO $f(I)$.

(5) SE f È DERIVABILE IN $x_0 \in I$ E SE $f'(x_0) \neq 0$, ALLORA g È DERIVABILE NEL PUNTO $y_0 = f(x_0)$ E $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

ESEMPIO: LA FUNZIONE INVERSA DI $f(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, È $g(y) = \frac{1}{m}y$.

PER LA DIMOSTRAZIONE, DOBBIAMO CALCOLARE IL $\displaystyle\lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$.

SFRUTTIAMO LA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA FRA I E $J = f(I)$ DATA DA $y = f(x)$ OVVERO $x = g(y)$. QUINDI

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$

Per ipotesi sappiamo che, preso $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, risulta $\left| \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0 - \tau, x_0 + \tau) \cap I \setminus \{x_0\}$ con $\tau \in \mathbb{R}^+$ opportuno. Ma essendo g continua, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $|g(y) - g(y_0)| < \tau$ per ogni $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap J$. Quindi per ogni $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap J \setminus \{y_0\}$ si ha

$$\left| \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| =$$

$$= \left| \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon$$

e la tesi segue dalla definizione di limite.

Applicazioni:

Posto $f(x) = \log x$ per $x \in I = \mathbb{R}^+$ si ha $g(y) = e^y$ per $y \in J = f(I) = \mathbb{R}$. Essendo $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} > 0$, possiamo scrivere $\frac{d}{dy} e^y = \frac{1}{f'(x)} = x = e^y$. Di conseguenza, $\frac{d}{dx} \operatorname{senh} x =$

$$= \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \left(\frac{1}{2} e^x\right)' - \left(\frac{1}{2} e^{-x}\right)'$$

$$= \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^t \cdot (-1) = \cosh x$$

Inoltre $\frac{d}{dx} \cosh x = \frac{d}{dx} \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

Consideriamo ora $x^\alpha = e^t$, $t = \alpha \log x$. Si trova: $\frac{d}{dx} x^\alpha = e^t \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Cosa succede nel punto $x_0 = 0$? Se $\alpha < 0$ la funzione $f(x) = x^\alpha$ non è definita nel punto $x_0 = 0$. Se, invece, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si trova $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{\alpha - 1}$ quindi se $\alpha \in (1, +\infty)$ risulta $f'(0^+) = 0$, se $\alpha = 1$, invece, risulta $f'(0^+) = 1$.

A questo proposito osserviamo che la funzione continua $f(x) = |x|$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+ \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}.$$

Nel punto $x_0 = 0$ si trova $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{|x|}{x} = \pm 1$. Si parla di punto angoloso quando f è continua in x_0 e $\mathbb{R} \ni f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+) \in \mathbb{R}$. Se, invece, $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ si parla di flesso a tangente verticale come per $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nell'origine.

LU 29 NOV 2021

SE, INFINE, I LIMITI $\lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ SONO INFINITI E DIVERSI FRA LORO, SI PARLA DI CUSPIDE COME PER LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{|x|}$ NEL PUNTO $x_0 = 0$. NOTA: IN TUTTI QUESTI CASI SI SUPPONE f CONTINUA IN x_0.

CONSIDERIAMO ADESSO LA FUNZIONE $h(x) = (f(x))^{g(x)}$ CON f, g DERIVABILI E $f(x) > 0$. SI HA $h(x) = e^t$, $t = g(x) \cdot \log f(x)$ E QUINDI $h'(x) = \frac{d}{dx}(f(x))^{g(x)} = e^t \cdot \left(g'(x) \log f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right) =$

$$= (f(x))^{g(x)} \left(g'(x) \log f(x) + \frac{f'(x) g(x)}{f(x)} \right)$$

DERIVATE DELLE FUNZIONI CIRCOLARI INVERSE

POSTO $f(\alpha) = \operatorname{sen} \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ SI HA $f'(\alpha) = \cos \alpha > 0$ E QUINDI

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{f'(\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

DA CUI $\frac{d}{dy} \operatorname{arcsen} y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1, 1)$

SIMILMENTE SI TROVA $\frac{d}{dx} \arccos x$.

OSSERVAZIONE: POSTO $x = \cos \beta$, $\beta \in [0, \pi]$ SI HA $x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. QUI $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. DA $x = \cos \beta$ SI RICAVA $\beta = \arccos x$ MA $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ E $\alpha = \operatorname{arcsen} x$ QUINDI $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. DA QUI SI RICAVA

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

CONSIDERIAMO $f(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. SI HA $f'(\alpha) = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \geq 1 > 0$.

QUINDI $\frac{d}{dy} \operatorname{arctg} y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1+y^2}$.

OSSERVAZIONI (EQUAZIONI DIFFERENZIALI)

1. LA DERIVATA DI $f(x) = e^x$ È $f'(x) = e^x$ QUINDI, PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, SI HA $f(x) = f'(x)$, O, PIÙ BREVEMENTE, $y' = y$.
2. LA DERIVATA SECONDA DI $f(x) = \operatorname{sen} x$ È $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, QUINDI, PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ SI HA $f''(x) = -f(x)$, O, PIÙ BREVEMENTE, $y'' = -y$.
3. SIMILMENTE, SAPENDO CHE $\frac{d}{d\alpha} \operatorname{tg} \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, POSSIAMO SCRIVERE $y' = 1 + y^2$.

PROBLEMA: CI SONO ALTRE FUNZIONI CHE SODDISFANO LE STESSE RELAZIONI?

USO DELLA DERIVATA PER LA DETERMINAZIONE DEI MASSIMI E DEI MINIMI (NON BANALI) DI UNA FUNZIONE.

TEOREMA: SE UNA $f: S \to \mathbb{R}$ ASSUME IL MASSIMO O IL MINIMO IN UN PUNTO x_0 TALE CHE $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset S$, E SE ESISTE $f'(x_0)$, ALLORA $f'(x_0)=0$.

NELLA DIMOSTRAZIONE CHE SEGUE, VERIFICHIAMO L'ENUNCIATO CONTRONOMINALE: SE $f'(x_0) \neq 0$ ALLORA x_0 NON È NÉ UN PUNTO DI MASSIMO, NÉ UN PUNTO DI MINIMO.

SI RAMMENTI (25-26 OTTOBRE) CHE x_0 È UN PUNTO DI $\substack{\text{MASS}\\\text{MIN}}$IMO SE

$$f(x_0) - f(x) \gtrless 0 \text{ PER OGNI } x \in S.$$

DIMOSTRAZIONE: POICHÉ f È DERIVABILE NEL PUNTO x_0, E POICHÉ $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset S$, RISULTA $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \gtrless 0$ PER OGNI $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset S$ PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO, ESSENDO $f'(x_0) \gtrless 0$. MA ALLORA, PER LA REGOLA DEI SEGNI, IL NUMERATORE $f(x)-f(x_0)$ CAMBIA SEGNO QUANDO x PASSA DA DESTRA A SINISTRA DI x_0, AFFINCHÉ IL RAPPORTO CON $x-x_0$ MANTENGA LO STESSO SEGNO. CIÒ ESCLUDE CHE x_0 SIA UN MASSIMO O UN MINIMO.

UN'ESTENSIONE DEL TEOREMA: LO STESSO RAGIONAMENTO MOSTRA CHE $f(x)-f(x_0)$ CAMBIA SEGNO IN QUALUNQUE INTORNO COMPLETO $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ DI x_0. QUINDI ESCLUDE CHE RISULTI $f(x)-f(x_0) \geq 0$ IN TUTTO UN INTORNO $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. SIMILMENTE, ESCLUDE CHE RISULTI $f(x)-f(x_0) \leq 0$ IN $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$.

DUNQUE: SE LA RESTRIZIONE DI f ALL'INTERVALLO $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ASSUME IL MASSIMO O IL MINIMO NEL PUNTO x_0, ALLORA $f'(x_0)=0$. QUANDO LA RESTRIZIONE DI $f: S \to \mathbb{R}$ AD UN INTORNO $S \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, CON $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, AMMETTE MASSIMO O MINIMO, CON x_0 PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO, SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO RELATIVO DELLA FUNZIONE $f: S \to \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE: I PUNTI $x \in S$ TALI CHE $f'(x)$ (ESISTE E) VALE ZERO SI DICONO PUNTI CRITICI O PUNTI STAZIONARI DELLA FUNZIONE f.

QUINDI: I PUNTI DI MASSIMO RELATIVO E QUELLI DI MINIMO RELATIVO, SE SONO INTERNI, E SE ESISTE f', SONO ANCHE PUNTI CRITICI.

MA 30 NOV 2021

FRAINTENDIMENTO: I MASSIMI E I MINIMI SONO I PUNTI DOVE f' SI ANNULLA

FAKE

ESEMPIO: IL PUNTO $x_0 = 0$ È UN MINIMO DI $f(x) = \sqrt{x}$ MA NON È UN PUNTO CRITICO PERCHÉ f NON È DERIVABILE IN x_0.

IDEM PER $f(x) = |x|$.

ESEMPIO: IL PUNTO $x_0 = 0$ È UN PUNTO CRITICO PER $f(x) = x^3$ IN QUANTO $f'(x) = 3x^2$ MA NON È UN PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO RELATIVO PERCHÉ $f(x)$ CAMBIA SEGNO IN QUALUNQUE INTERVALLO DELLA FORMA $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ $f: S \to \mathbb{R}$ ABBIA SIA IL MASSIMO CHE IL MINIMO È DATA DAL TEOREMA DI WEIERSTRASS: SE $S \neq \emptyset$ È COMPATTO, ED f È CONTINUA, ALLORA AMMETTE MASSIMO E MINIMO.

DIMOSTRAZIONE: CHIAMIAMO « SUCCESSIONE MASSIMIZZANTE » UNA QUALUNQUE SUCCESSIONE $a_n \in S$ TALE CHE $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \sup f$. VERIFICHIAMONE L'ESISTENZA.

1. SE $\sup f = +\infty$ ALLORA OGNI $n \in \mathbb{N}$ NON È UN MAGGIORANTE, QUINDI ESISTE UN $a_n \in S$ TALE CHE $f(a_n) > n$.
DUNQUE $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = +\infty = \sup f$.

2. SE $\sup f \in \mathbb{R}$ ALLORA NESSUN NUMERO $(\sup f) - \frac{1}{n}$ È UN MAGGIORANTE E QUINDI ESISTE $a_n \in S$ TALE CHE
$$(\sup f) - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq \sup f,$$
E DAL TEOREMA DEL CONFRONTO SEGUE CHE
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \sup f.$$

ESSENDO S COMPATTO PER IPOTESI, ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE (a_{n_k}) CONVERGENTE AD UN $x_0 \in S$.

A) SE x_0 È UN PUNTO ISOLATO, SI HA $a_{n_k} = x_0$ DEFINITIVAMENTE, MA ALLORA $f(a_{n_k})$ È DEFINITIVAMENTE COSTANTE, QUINDI $\lim_{k\to+\infty} f(a_{n_k}) = f(x_0)$.

D'ALTRO CANTO, $\lim_{k\to+\infty} f(a_{n_k}) = \sup f$ PER IL LEMMA 1b DEL 12 NOVEMBRE.

QUINDI $f(x_0) = \sup f$ E DI CONSEGUENZA $f(x_0) = \max f$.

B) SE $x_0 \in DS$, LA CONTINUITÀ DI f DICE CHE $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

MA ALLORA $\lim_{k\to+\infty} f(a_{n_k}) = f(x_0)$ PER IL LEMMA 1 DEL 05/11.

D'ALTRO CANTO, $\lim_{k\to+\infty} f(a_{n_k}) = \sup f$

QUINDI $f(x_0) = \sup f$ E LA TESI SEGUE COME PRIMA.

GI 2 DIC 2021

UN ESEMPIO ESPLICITO:

LA FUNZIONE $f(x) = (\arcsin x)^2$

È CONTINUA PERCHÉ COMPOSTA DI

$y = \arcsin x$ E DI $t = y^2$, ED IL

SUO DOMINIO $S = [-1, 1]$ È COMPATTO PER IL TEOREMA DI HEINE-BOREL.

SICCOME $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ PER

OGNI $x \in S$, CON $\arcsin x = \pm \frac{\pi}{2}$

PER $x = \pm 1$, E $\arcsin 0 = 0$,

SI HA $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi^2}{4}$ PER $x \in S$,

QUINDI $f(0) = 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi^2}{4} = f(\pm 1)$

PER OGNI $x \in S$. IN CONCLUSIONE,

$\min f = 0$, $\max f = \frac{\pi^2}{4}$, I PUNTI $x_0 = 1$, $x_2 = -1$ SONO PUNTI DI MASSIMO ED

IL PUNTO $x_1 = 0$ È UN PUNTO DI MINIMO.

LA SUCCESSIONE $a_n = (-1)^n$ È UNA SUCCESSIONE MASSIMIZZANTE PERCHÉ

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi^2}{4} = \sup f.$$

POSTO $n_k = 2k$, LA SOTTOSUCCESSIONE

$a_{n_k} = (-1)^{n_k} = 1$ RISULTA CONVERGENTE,

E IL SUO LIMITE È IL PUNTO DI MASSIMO

$x_0 = 1$.

ESERCIZIO: TRACCIARE IL GRAFICO DI $f(x)$.

TEOREMA DI LAGRANGE (TEOREMA DEL VALOR MEDIO) PAG 248

CONSIDERIAMO UNA f DERIVABILE IN UN INTERVALLO APERTO I AVENTE PER ESTREMI DUE PUNTI $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x$, E (ALMENO) CONTINUA AGLI ESTREMI.

ALLORA ESISTE (ALMENO) UN PUNTO c INTERNO ALL'INTERVALLO I TALE CHE

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

OVVERO, EQUIVALENTEMENTE,

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0).$$

LA TESI COSTITUISCE LA BASE DELL'INDUZIONE $(n=0)$ PER DIMOSTRARE CHE

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

ESEMPIO: $f(x) = (\arcsin x)^2$, $x_0 = -1$,

$x = 1$, $f(x_0) = \frac{\pi^2}{4} = f(x)$, $I = (-1, 1)$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 = f'(c) \quad \text{CON } c = 0.$$

INFATTI: $f'(x) = 2y \cdot \frac{dy}{dx} =$

$$= \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in I$$

E QUINDI $f'(0) = 0$.

GI 2 DIC 2021

INCIDENTALMENTE, OSSERVIAMO CHE S È UN INSIEME SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE, E $f: S \to \mathbb{R}$ È PARI, ALLORA LA DERIVATA $f'(x)$, SE ESISTE, È DISPARI.

INFATTI, ESSENDO $f(x) = f(-x)$ IN S, LE DERIVATE DEL PRIMO E DEL SECONDO MEMBRO (SE ESISTONO) SONO UGUALI: DUNQUE

$$f'(x) = -f'(-x)$$

SIMILMENTE, POTETE VERIFICARE CHE:

1) LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE DISPARI È UNA FUNZIONE PARI;

2) IL QUADRATO DI UNA FUNZIONE DISPARI È UNA FUNZIONE PARI;

3) SE $f(x)$ È DISPARI E $g(y)$ È PARI, ALLORA $g(f(x))$ È PARI.

COROLLARIO DEL TEOREMA DI LAGRANGE:

CONSIDERIAMO UNA f DERIVABILE IN UN INTERVALLO APERTO I AVENTE PER ESTREMI DUE PUNTI $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x$, E (ALMENO) CONTINUA AGLI ESTREMI. SE $f(x) = f(x_0)$ ALLORA ESISTE (ALMENO) UN PUNTO $c \in I$ DOVE $f'(c) = 0$ (TEOREMA DI ROLLE).

OSSERVAZIONE: SE f È COSTANTE, TUTTI I PUNTI $c \in I$ SODDISFANO $f'(c) = 0$.

SE $f(x) = mx + q$, TUTTI I PUNTI c SODDISFANO $f'(c) = m$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI LAGRANGE:

PER EVITARE CONFUSIONE, PONIAMO $I = (a, b)$ E USIAMO x COME VARIABILE INDIPENDENTE. SI STUDIA LA FUNZIONE AUSILIARIA

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

OPPURE $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}\, x$.

PER L'IPOTESI SU f ED I TEOREMI SULLA CONTINUITÀ, LE FUNZIONI g, h SONO CONTINUE IN $S = [a, b]$, QUINDI AMMETTONO MASSIMO E MINIMO PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS. INOLTRE $g(a) = g(b)$ E $h(a) = h(b) = 0$. INFATTI

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) - f(a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a) - f(a) = 0.$$

1. SE $\min h = \max h$ ALLORA h È COSTANTE, QUINDI $h' = 0$ IN I. D'ALTRO CANTO IL CALCOLO DIFFERENZIALE IMPLICA CHE $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ IN I. MA ALLORA $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ IN I, QUINDI LA TESI VALE CON QUALUNQUE PUNTO $c \in I$.

2. SE $\min h < \max h$, ALLORA, ESSENDO $h(a) = h(b)$ NON È POSSIBILE CHE I PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO SIANO IN $\{a, b\}$, MA NECESSARIAMENTE, ALMENO UNO È INTERNO AD I. LO CHIAMO c E POSSO SCRIVERE $h'(c) = 0$ E LA TESI SEGUE.

GI 2 DIC 2021

VE 3 DIC 2021

RELAZIONE FRA DERIVATA E MONOTONIA

PREMESSA: SE $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ È CRESCENTE / DECRESCENTE, ALLORA $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ / ≤ 0

QUINDI LA DERIVATA $f'(x_0)$, SE ESISTE, SODDISFA $f'(x_0) \geq 0$ / ≤ 0 PER LA PERMANENZA DEL SEGNO.

VICEVERSA: PRENDO $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ DERIVABILE E SODDISFACENTE $f'(c) \geq 0$ / $= 0$ / > 0 PER OGNI $c \in (a,b)$. PRENDO DUE PUNTI $x_0, x \in (a,b)$ CON $x - x_0 > 0$ E, PER IL TEOREMA DI LAGRANGE, POSSO SCRIVERE $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x-x_0)$ CON UN $c \in (x_0, x) \subset (a,b)$ QUINDI $f'(c) \geq 0$ / $= 0$ / > 0 E PERCIÒ $f(x) \geq f(x_0)$ / $= f(x_0)$ / $> f(x_0)$. PER L'ARBITRARIETÀ DI x, x_0 SI CONCLUDE CHE f È CRESCENTE / COSTANTE / STRETTAMENTE CRESCENTE.

ESEMPIO: $f(x) = x^3$ SODDISFA $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ IN TUTTO $\mathbb{R}$, ED È STRETTAMENTE CRESCENTE.

VE 3 DIC 2021

CONSEGUENZA:

SE f È DERIVABILE IN $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, ALMENO CONTINUA NEL PUNTO x_0 E SE $f' \leq 0$ / ≥ 0 IN (a, x_0) E $f' \geq 0$ / ≤ 0 IN (x_0, b) ALLORA PER OGNI $x \neq x_0$ SI HA $f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0) \geq 0$ / ≤ 0

QUINDI x_0 È UN PUNTO DI MINIMO / MASSIMO

OSSERVAZIONE: LO STESSO RAGIONAMENTO VALE ANCHE SE f NON È DEFINITA IN (a, x_0) O IN (x_0, b).

ESEMPIO: $f(x) = \arcsin x$ È DERIVABILE IN $(-1,1)$ CON $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ ED È CONTINUA IN $x_0 = -1$, QUINDI PER OGNI $x \in (-1, 1]$ ESISTE $c \in (-1, x) \subset (-1, 1)$ TALE CHE $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > 0$. MA ALLORA x_0 È UN PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO.

ALTRA CONSEGUENZA

SE f È DERIVABILE IN (x_0, b) E ALMENO CONTINUA IN x_0, SE ESISTE IL $\lim_{c \to x_0^+} f'(c) = L$, FINITO O INFINITO, ALLORA $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO $L = +\infty$. ALLORA PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE $\delta \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE $f'(c) > M$ PER OGNI $c \in (x_0, x_0 + \delta)$. MA ALLORA PER OGNI $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ SI HA $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$ CON UN $c \in (x_0, x) \subset (x_0, x_0 + \delta)$ QUINDI $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > M$ E LA TESI SEGUE DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE.

PROBLEMA: SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

DEFINITA PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

1. STABILIRE IN QUALI PUNTI ESISTE $f'(x)$
2. TROVARE IL SEGNO DI $f'(0)$
3. STABILIRE SE ESISTE UN $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE f È MONOTONA NELL'INTERVALLO $(-\varepsilon, \varepsilon)$. SUGGERIMENTO: POSTO $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ CON $k \in \mathbb{Z}^+$, CALCOLARE $f'(x_k)$ E $f''(x_k)$.

VE 3 DIC 2021

$$\boxed{\text{IL TEOREMA DI CAUCHY, O TEOREMA GENERALIZZATO DEL VALOR MEDIO}}$$

SE f E g SONO DERIVABILI IN UN INTERVALLO APERTO I DI ESTREMI x_0, x CON $x_0 \neq x$ E ALMENO CONTINUE IN x_0 E x, E SE $g' \neq 0$ IN I ALLORA

$\left(g(x) - g(x_0) = g'(c)(x - x_0) \neq 0 \text{ E}\right)$

ESISTE ALMENO UN PUNTO $c \in I$ TALE CHE

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

OSSERVAZIONE: POSTO $g(t) = t$ SI HA $g'(t) = 1$ IN TUTTO I QUINDI ESISTE $c \in I$ TALE CHE

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(c)}{1} = f'(c)$$

DIMOSTRAZIONE: SI PROCEDE COME PER IL TEOREMA DI LAGRANGE, PONENDO $I = (a, b)$ E USANDO x COME VARIABILE INDIPENDENTE. LA FUNZIONE $h(x) =$

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right)$$

SODDISFA $h(a) = 0 = h(b)$ QUINDI ESISTE $c \in I$ TALE CHE $h'(c) = 0$, DUNQUE

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

DA CUI LA TESI.

VE 3 DIC 2021

FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE

DATA $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ DOTATA DELLE DERIVATE $f',\dots,f^{(n+1)}$ CON $n\in\mathbb{N}$, PER OGNI $x_0, x\in(a,b)$ CON $x_0\neq x$ ESISTE ALMENO UN PUNTO ξ (CSI) NELL'INTERVALLO (a,b) TALE CHE

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

APPLICAZIONI: PER OGNI $x\in\mathbb{R}$ SI HA:

$$e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$$\operatorname{sen} x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

VERIFICHIAMO INSIEME LA PRIMA UGUAGLIANZA, LE ALTRE COSTITUISCONO DEGLI ESERCIZI. PONIAMO $x_0=0$ E FISSIAMO $x\neq 0$. PER LA FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE, ESISTE $\xi\in(-|x|,|x|)\setminus\{0\}$ TALE CHE

$$f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

SICCOME $\left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

LA TESI SEGUE.

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE. PROCEDIAMO PER INDUZIONE. IL CASO $n=0$ SEGUE DAL TEOREMA DI LAGRANGE. SVOLGIAMO IL PASSO INDUTTIVO: SUPPONIAMO CHE SE UNA g È DERIVABILE n VOLTE, CON $n\in\mathbb{Z}^+$, IN TUTTO (a,b) ALLORA PER OGNI $c\in(a,b)$ ESISTE $\xi\in(a,b)$ TALE CHE $g(c)=$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}(x_0)}{j!}(c-x_0)^j+\frac{g^{(n)}(\xi)}{n!}(c-x_0)^n.$$

PRENDIAMO f DERIVABILE $n+1$ VOLTE E VERIFICHIAMO CHE ESISTE ξ TALE CHE

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

PER IL TEOREMA DI CAUCHY, ESISTE c TALE CHE

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}}=$$

$$=\frac{f'(c)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(c-x_0)^{k-1}}{(n+1)(c-x_0)^n}$$

CHE, POSTO $g=f'$, DIVENTA

$$=\frac{g(c)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}(x_0)}{j!}(c-x_0)^j}{(n+1)(c-x_0)^n}=$$

$$=\frac{g^{(n)}(\xi)}{(n+1)\,n!}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

LU 6 DIC 2021

REGOLA DI DE L'HÔPITAL

CONSIDERIAMO f, g DERIVABILI IN UN INTERVALLO APERTO I E INDICHIAMO CON x_0 UNO DEGLI ESTREMI. SUPPONIAMO CHE $g' \neq 0$ IN I.

SE $f, g \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, OPPURE $\to +\infty$

E SE $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, FINITO O INFINITO, ALLORA $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

ESEMPIO: $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}$.

ESEMPIO: $\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

ESEMPIO IMPROPRIO: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$. NOTA: SE $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ ALLORA, NEL PUNTO $x_0 = 0$ RISULTA $\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^0$ E CIOÈ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

ESEMPIO: $\lim_{x \to 0^+} x \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0$

DIMOSTRAZIONE DELLA REGOLA DI DE L'HÔPITAL. CONSIDERIAMO $L = +\infty$. PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE δ TALE CHE $\frac{f'(c)}{g'(c)} > M$ PER OGNI $c \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. POSTO $f(x_0) = g(x_0) = 0$, LE DUE FUNZIONI RISULTANO CONTINUE IN x_0, QUINDI PER IL TEOREMA DI CAUCHY

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} > M$$

PER OGNI $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. LA TESI SEGUE PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE. ESERCIZIO: SVOLGERE IL CASO $L < +\infty$. NEL CASO IN CUI $f, g \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ SUPPONIAMO, PER FISSARE LE IDEE, CHE x_0 SIA IL PRIMO ESTREMO E CHE $x_0 + \delta \in I$. ALLORA

$$M < \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0 + \delta)}{g(x) - g(x_0 + \delta)} \quad \text{QUINDI}$$

$$M < \frac{f(x)}{g(x)} \, \frac{1 - f(x_0+\delta)/f(x)}{1 - g(x_0+\delta)/g(x)} \quad \text{PER}$$

OGNI $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. MA SICCOME $f, g \xrightarrow[x \to x_0^+]{} +\infty$, LA SECONDA FRAZIONE TENDE A 1 QUINDI È MINORE DI 2 IN $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ CON $\varepsilon \in (0, \delta)$ E PERCIÒ $M < 2 \frac{f(x)}{g(x)}$ OVVERO $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{M}{2}$ IN $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. PER L'ARBITRARIETÀ DI M SI HA $\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$.

OSSERVAZIONE: SE $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ E $f, g \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ OPPURE $f, g \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$, ENTRAMBE DERIVABILI E CON $g' \neq 0$ IN $(a, +\infty)$, SE ESISTE $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, FINITO O INFINITO, ALLORA $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

INFATTI, POSTO $\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ (FI) E $\psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ (PSI) VOGLIAMO CALCOLARE $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}$ CON $\varphi, \psi \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$ OVVERO $\varphi, \psi \xrightarrow[t \to 0^+]{} \pm\infty$. INOLTRE

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = $$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \text{ ALLORA } L =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

ESEMPIO: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$.

ESEMPIO: IL $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2x + \operatorname{sen} x}$ NON SI OTTIENE COME SOPRA PERCHÉ IL LIMITE $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2 + \cos x}$ NON ESISTE. PERÒ SI VEDE CHE $\frac{x}{2x + \operatorname{sen} x} = \frac{1}{2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

LU 6 DIC 2021

LA REGOLA DI DE L'HÔPITAL INTERVIENE NEL PASSO INDUTTIVO DELLA DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI PEANO:

SIANO: $n \in \mathbb{Z}^+$, (a, b) UN INTERVALLO APERTO, $x_0 \in (a, b)$, E $f^{(0)}, \ldots, f^{(n-1)}$ UNA FUNZIONE E LE SUE DERIVATE IN (a, b).

SE ESISTE $f^{(n)}(x_0)$ ALLORA $f(x) =$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

CIOÈ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = 0.$$

LA BASE DELL'INDUZIONE È IL CASO $n = 1$: SE ESISTE $f'(x_0)$ ALLORA $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, COME SAPPIAMO DAL 25 NOVEMBRE. PASSO INDUTTIVO: SUPPONIAMO CHE SE ESISTONO $g^{(0)}, \ldots, g^{(n-1)}$ IN (a, b) E $g^{(n)}(x_0)$ SI ABBIA

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}{(x - x_0)^n} = 0.$$

PRENDIAMO $f^{(0)}, \ldots, f^{(n)}$ IN (a, b) ED $f^{(n+1)}(x_0)$ E CERCHIAMO IL LIMITE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j}{(x - x_0)^{n+1}}$$

CON LA REGOLA DI DE L'HÔPITAL. PONIAMO $g(x) = f'(x)$ E TROVIAMO

LU 6 DIC 2021

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\, j\,(x-x_0)^{j-1}}{(n+1)(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{g^{(j-1)}(x_0)}{(j-1)!}(x-x_0)^{j-1}}{(n+1)(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k}}{(n+1)(x-x_0)^n} = 0$$

PER L'IPOTESI INDUTTIVA. SI PUÒ DUNQUE APPLICARE LA REGOLA DI DE L'HÔPITAL E SI HA

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^{j}}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

APPLICAZIONE: CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN PUNTO $x_0 \in [a,b]$ SIA PUNTO DI MASSIMO/MINIMO RELATIVO PER UNA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ DERIVABILE IN $[a,b]$ È CHE $f'(x_0)=0$ E $f''(x_0)$ (ESISTA E) SIA NEGATIVA/POSITIVA.

DIMOSTRAZIONE: $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0) + o((x-x_0)^2)$ QUINDI

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} \to \frac{1}{2} f''(x_0) \lesseqgtr 0$$

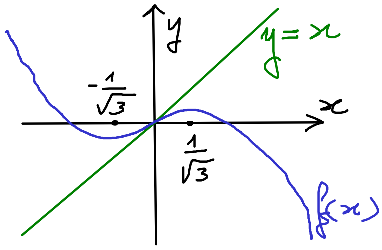
QUINDI $f(x) - f(x_0) \lesseqgtr 0$ IN UN INTORNO (BUCATO) DI x_0, IL QUALE QUINDI È UN MASSIMO/MINIMO RELATIVO.

MA 7 DIC 2021

ESEMPIO: $f(x) = x - x^3$ È DERIVABILE NELL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$ E SI HA $f'(x) = 1 - 3x^2$ QUINDI I PUNTI CRITICI SONO $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. LA DERIVATA SECONDA $f''(x) = -6x$ IN TALI PUNTI VALE $f''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \mp 2\sqrt{3}$.

QUINDI IL PUNTO $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ È UN MINIMO RELATIVO, IL PUNTO $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ È UN MASSIMO RELATIVO.

SI NOTI CHE $x^3 = o(x)$ PER $x \to 0$



$$\lim_{x\to\pm\infty} (x - x^3) = \mp\infty$$

UN'ALTRA CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÉ UN PUNTO $x_0 \in [a,b]$ SIA UN ESTREMO RELATIVO È CHE ESISTANO f', f'' IN UN INTORNO DI x_0 E SI ABBIA $f'(x_0) = 0$ E $f''(x) \gtreqless 0$ IN UN INTORNO DI x_0. IN TAL CASO, x_0 È UN PUNTO DI MINIMO/MASSIMO RELATIVO.

LA TESI SEGUE PONENDO $n=1$ NELLA FORMULA DI TAYLOR CON IL RESTO DI LAGRANGE:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-x_0)^2 \gtreqless 0$$

QUINDI x_0 È UN MINIMO/MASSIMO RELATIVO.

MA 7 DIC 2021

LA CONVESSITÀ DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE

DEFINIZIONE: UNA $f: I \to \mathbb{R}$ SI DICE CONVESSA / CONCAVA SE COMUNQUE SI PRENDANO TRE PUNTI $x_0 < x_1 < x_2$ RISULTA

$$f(x_1) \leq / \geq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}(x_1-x_0)+f(x_0)$$
$$= \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}(x_1-x_2)+f(x_2)$$

$g(x)$ È CONCAVA SE E SOLO SE $f(x) = -g(x)$ È CONVESSA.

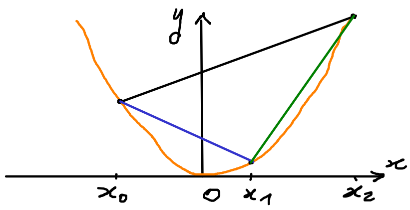
ESEMPIO: $f(x) = mx+q$ È CONVESSA E ANCHE CONCAVA.

ESEMPIO: $f(x) = x^2$ È CONVESSA. PER VEDERLO, RISCRIVIAMO LA DEFINIZIONE:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

SOSTITUENDO $f(x) = x^2$, LA PRIMA DISUGUAGLIANZA DIVENTA $\frac{x_1^2-x_0^2}{x_1-x_0} \leq \frac{x_2^2-x_0^2}{x_2-x_0}$

E CIOÈ $x_1+x_0 \leq x_2+x_0$ LA QUALE È VERA PERCHÉ $x_1 < x_2$.

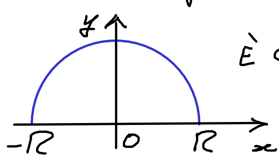


ESEMPIO: $f(x) = |x|$ È CONVESSA. PER VEDERLO, PRENDIAMO $x_0 < x_1 < x_2$ E DISTINGUIAMO DUE CASI: 1. SE $x_1 \geq 0$ ALLORA $x_2 > x_1 \geq 0$ E LA DISUGUAGLIANZA $\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ DIVENTA $\frac{x_2-|x_0|}{x_2-x_0} \leq 1$ E QUESTA EQUIVALE A $x_2-|x_0| \leq x_2-x_0$ E CIOÈ $x_0 \leq |x_0|$, E QUESTO È VERO.

2. SE $x_1 < 0$ VERIFICO CHE $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ (ESERCIZIO).

OSSERVAZIONE: LE FUNZIONI CONVESSE POSSONO ANCHE NON ESSERE DERIVABILI, PERÒ I LIMITI $\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ESISTONO, E HANNO UN VALORE FINITO SE x_0 È INTERNO.

ESEMPIO: $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$, $I = [-R, R]$



È CONCAVA E $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ PER $x \in (-R, R)$.

INOLTRE $\lim_{x\to(-R)^+} \frac{f(x)}{x+R} = +\infty$ E

$$\lim_{x\to R^-} \frac{f(x)}{x-R} = -\infty.$$

L'OSSERVAZIONE SI DIMOSTRA IN QUANTO LA DISUGUAGLIANZA $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ MOSTRA CHE LA FUNZIONE $g_0(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ SODDISFA $g_0(x_1) \leq g_0(x_2)$ PER OGNI $x_1 < x_2$ ALLA DESTRA DI x_0 QUINDI È MONOTONA.

MA 7 DIC 2021

SIMILMENTE, LA DISUGUAGLIANZA $\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ SI PUÒ RISCRIVERE $g_2(x_0) \leq g_2(x_1)$, DOVE $g_2(x) = \dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$, ESSENDO $x_0 < x_1 < x_2$.

DUNQUE IL $\lim_{x \to x_2^-} \dfrac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} > -\infty$ ESISTE, COME PURE ESISTE IL

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < +\infty \quad (13/11).$$

PER STUDIARE UN PUNTO INTERNO x_1, SCRIVIAMO $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ E DEDUCIAMO CHE $\lim_{x_0 \to x_1^-} \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(x_1^-) \leq$

$\leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = M$ E SIMILMENTE

$$f'(x_1^+) = \lim_{x_2 \to x_1^+} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq f'(x_1^-).$$

CONSEGUENZA: NEI PUNTI INTERNI, LE FUNZIONI CONVESSE SONO CONTINUE DA DESTRA E DA SINISTRA (SONO CONTINUE)

ESEMPIO: $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \pm 1 \\ 0, & x \in (-1,1) \end{cases}$

È CONVESSA, E DISCONTINUA NEGLI ESTREMI.

CONVESSITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

SE $f: I \to \mathbb{R}$ È DERIVABILE E CONVESSA, f' È CRESCENTE IN SENSO LATO. DIMOSTRAZIONE: SAPPIAMO CHE

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

QUINDI $f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0^+} \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$

E SIMILMENTE $\lim_{x_1 \to x_2^-} \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_2)$

$$\geq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \geq f'(x_0).$$

VALE IL VICEVERSA: SE f È DERIVABILE E f' È CRESCENTE IN SENSO LATO, ALLORA f È CONVESSA. DIMOSTRAZIONE (DEL CONTRONOMINALE): SE f NON È CONVESSA, ALLORA ESISTONO $x_0 < x_1 < x_2$ TALI CHE

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} > \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

MA ALLORA, PER IL TEOREMA DI LAGRANGE, ESISTONO $c_1 \in (x_0, x_1)$ E $c_2 \in (x_1, x_2)$ TALI CHE $f'(c_1) > f'(c_2)$ MA ALLORA f' NON È CRESCENTE.

GI 9 DIC 2021

DALLA PRECEDENTE DIMOSTRAZIONE SI EVINCE CHE, SE f È DERIVABILE E CONVESSA, RISULTA $f'(x_0) \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ E CIOÈ

$$f(x_2) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x_2-x_0) = y_0(x_2),$$

ESSENDO $y_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI f IN x_0.

SIMILMENTE, DA $f'(x_2) \ge \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$

SEGUE $f(x_0) \ge f(x_2) + f'(x_2)(x_0-x_2) = y_2(x_0)$ DOVE $y_2(x) = f(x_2) + f'(x_2)(x-x_2)$ È LA RETTA TANGENTE IN x_2: IL GRAFICO DELLE FUNZIONI CONVESSE E DERIVABILI NON PASSA AL DI SOTTO DI NESSUNA TANGENTE. VICEVERSA:

SE f È DERIVABILE MA NON CONVESSA, ALLORA ALMENO UNA PARTE DEL GRAFICO STA AL DI SOTTO DI QUALCHE TANGENTE: INFATTI, SE f NON È CONVESSA, ESISTONO $x_0 < x_1 < x_2$ TALI CHE

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} > \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

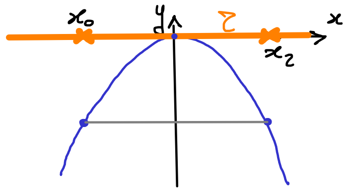
LA RETTA z TANGENTE NEL PUNTO x_1 HA EQUAZIONE $y(x) = m(x-x_1) + f(x_1)$ CON $m = f'(x_1)$. DICO CHE $y(x_0) > f(x_0)$, O ALMENO $y(x_2) > f(x_2)$, MA NON È POSSIBILE CHE $f(x_0) \ge y(x_0)$ E $f(x_2) \ge y(x_2)$.

INFATTI, SE $f(x_0) \ge y(x_0) = f(x_1) + f'(x_1)(x_0-x_1)$ ALLORA $m = f'(x_1) \ge$

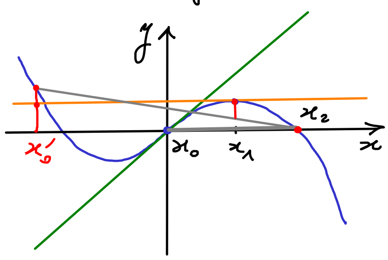
$$\ge \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

DUNQUE $f(x_2) < m(x_2-x_1) + f(x_1) = y(x_2)$.

ESEMPIO: $f(x) = -x^2$ NON È CONVESSA, PRENDO $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, TROVO $y(x) = 0$ PER OGNI x, E $f(x_0) < y(x_0)$ E $f(x_2) < y(x_2)$.



ESEMPIO: $f(x) = x - x^3$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = 1$, $f'(x) = 1 - 3x^2$, $f'(x_1) = 0 = m$, $y(x) = f(x_1) = 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$



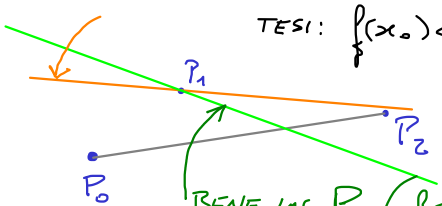
IN QUESTO CASO, $f(x_0) < y(x_0)$ E $f(x_2) < y(x_0)$.

MA $f(x_0') \ge y(x_0')$.

SITUAZIONE ASTRATTA:

BENE IN ENTRAMBI PUNTI

TESI: $f(x_0) < y(x_0)$ O ALMENO $f(x_2) < y(x_2)$



BENE IN P_0 $\left(f(x_0) < y(x_0)\right)$

MALE IN P_2

GI 9 DIC 2021

CONVESSITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI DUE VOLTE IN UN INTERVALLO I

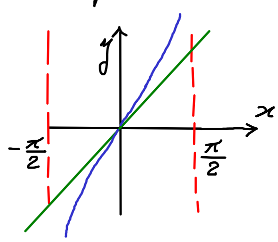
SAPPIAMO CHE $f: I \to \mathbb{R}$ È CONVESSA SE E SOLO SE f' È CRESCENTE IN SENSO LATO. MA SAPPIAMO ANCHE CHE f' È CRESCENTE IN SENSO LATO SE E SOLO SE $\frac{d}{dx} f' = f'' \geq 0$. DUNQUE: f È CONVESSA SE E SOLO SE $f'' \geq 0$ NELL'INTERVALLO I. PROBLEMA: TROVARE UNA FUNZIONE $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f''(x_0) > 0$ IN UN $x_0 \in (a,b)$ E NON CONVESSA IN NESSUN INTORNO $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

PUNTI DI FLESSO

SONO IN USO DEFINIZIONI NON EQUIVALENTI. PER IL TESTO, UN PUNTO x_0 È UN PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE SE f È CONTINUA IN UN INTORNO DI x_0, RISULTA $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ E f È CONVESSA A SINISTRA DI x_0 E CONCAVA A DESTRA, O VICEVERSA. ALTRIMENTI, SE ESISTE $f'(x_0)$, IL PUNTO x_0 È UN PUNTO DI FLESSO SE f È CONVESSA A SINISTRA DI x_0 E CONCAVA A DESTRA, O VICEVERSA. NE SEGUE CHE TUTTI I PUNTI $x_0 \in \mathbb{R}$ SONO FLESSI PER $f(x) = mx + q$. ALTRI RICHIEDONO CHE IL GRAFICO DI f ATTRAVERSI LA RETTA TANGENTE IN x_0.

CERTAMENTE, SE ESISTE f'' IN UN INTORNO DI x_0 E RISULTA $f''(x_0) = 0$, $f''(x) > 0$ ALLA SINISTRA DI x_0 E $f''(x) < 0$ ALLA DESTRA, O VICEVERSA, ALLORA x_0 È UN PUNTO DI FLESSO SECONDO TUTTE LE DEFINIZIONI.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = \operatorname{tg} x$ SODDISFA $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ E $f''(x) = 2(\operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ QUINDI: POSTO $x_0 = 0$ RISULTA $f''(x) > 0$ PER $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ E $f''(x) < 0$ PER $x \in (-\frac{\pi}{2}, x_0)$



ESERCIZIO: TRACCIARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $f(x) = e^{-x^2}$ DETERMINANDO ANCHE I PUNTI DI FLESSO.