

**Dettaglio delle attività svolte:**  
**ANALISI SUPERIORE 1 [SM/0104]**

**27/09/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:45

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Presentazione del corso e ripasso sui numeri complessi

**Descrizione attività:**

Presentazione del corso di Analisi Superiore 1: obiettivi, prerequisiti, metodi didattici, modalità di verifica dell'apprendimento, testi di riferimento, contenuti e informazioni varie.

Introduzione all'analisi complessa: richiami sul campo dei numeri complessi, sulle operazioni con i numeri complessi e sulle loro proprietà; il piano di Gauss; forma cartesiana, trigonometrica ed esponenziale di un numero complesso.

---

**29/09/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 09:00

**Ora fine:** 10:45

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Funzioni complesse di variabile complessa

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Richiami sulle serie di potenze in caso complesso e sulle proprietà della funzione somma. Funzioni analitiche in  $\mathbb{R}$  e criterio di analiticità. La funzione esponenziale complessa e il suo sviluppo in serie di potenze. Il piano complesso esteso. Intorno sferico di centro  $z_0$  e raggio  $r$  e topologia in  $\mathbb{C}$ . Funzioni di variabile reale a valori complessi e funzioni di variabile complessa a valori complessi; limiti di funzioni complesse: definizione ed esempio.

---

**30/09/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 09:15

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Funzioni olomorfe

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Funzioni limitate; funzioni continue. Limiti di funzioni complesse; esempi. Funzioni derivabili in senso complesso in punto; definizione di funzione olomorfa e di funzione intera; algebra delle derivate; derivata di funzione composta; derivata della funzione inversa; legame tra derivabilità in senso complesso e continuità; esempi. Funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  e funzioni  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  legame tra derivabilità della funzione e delle sue componenti.

---

**01/10/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:45

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Condizione di Cauchy-Riemann

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Differenziabilità in senso complesso di una funzione complessa e relazione con la derivabilità (c.d.).

Relazione tra derivabilità in senso complesso e differenziabilità (in senso reale) in due variabili e condizioni di Cauchy-Riemann (c.d.); esempi di funzioni derivabili e non; relazione tra il modulo di una funzione derivabile e il determinante jacobiano della funzione vettoriale ad essa associato; condizione necessaria affinché una funzione derivabile in un dominio sia costante (c.d.); esempio di utilizzo di questa proprietà; condizioni di olomorfia in coordinate polari.

---

**04/10/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:45

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

L'operatore di Cauchy-Riemann

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Polinomi complessi in  $x$  e  $y$  e polinomi in  $z$ ; l'operatore di Cauchy-Riemann e il suo utilizzo per la definizione di olomorfia di una funzione. Verifica della derivabilità di una funzione tramite le condizioni di C-R, e tramite l'operatore di Cauchy-Riemann; esempi.

Alcune particolari funzioni complesse: funzioni polinomiali e loro zeri; funzione esponenziale complessa, serie esponenziale e proprietà; funzioni trigonometriche e iperboliche complesse e loro proprietà. Proprietà delle funzioni trascendenti elementari: sviluppi in serie, relazioni fondamentali, non limitatezza.

---

**06/10/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 09:00

**Ora fine:** 10:45

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Funzioni polidrome

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Esempio di funzione derivabile in un punto ma non analitica in tale punto.

Periodicità e zeri delle funzioni trascendenti elementari.

Funzione determinazione principale della radice di  $z$  come inversa della funzione  $f(z)=z^2$  definita nel semipiano destro; funzione radice principale  $n$ -esima complessa. Funzioni polidrome e loro caratteristiche; confronto tra multifunzioni di variabile reale e multifunzioni di variabile complessa; determinazioni delle multifunzione radice  $n$ -esima complessa. Punto di diramazione della multifunzione radice quadrata e linea di diramazione; continuità delle determinazioni lungo il piano tagliato lungo una semiretta uscente dall'origine.

La multifunzione logaritmo complesso; la determinazione principale del logaritmo complesso come inversa dell'esponenziale con dominio ristretto, e sue proprietà.

---

**07/10/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 09:15

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Funzioni armoniche e curve nel piano complesso

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

La multifunzione  $z^w$ : casi particolari ed esempi.

Calcolo delle derivate del logaritmo complesso e della radice ennesima complessa utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari. Funzioni armoniche e loro legame con le funzioni olomorfe; esistenza dell'armonica coniugata di una funzione armonica in un aperto semplicemente connesso.

Curve nel piano complesso. Mappe conformi: funzioni olomorfe con derivata non nulla conservano gli angoli in ampiezza e in verso.

---

**08/10/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 11:00

**Ora fine:** 12:45

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Trasformazioni conformi

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Trasformazioni conformi; trasformazioni conformi viste come cambi di coordinate; risoluzione del problema di Dirichlet per il Laplaciano usando trasformazioni conformi; teorema della mappa di Riemann; trasformazione di rette verticali e orizzontali tramite trasformazioni conformi; linee di livello delle parti reale e immaginaria di una trasformazione conforme; esempi:  $f(z) = z^2$ . potenziale complesso e moto piano stazionario di un fluido incomprimibile e irrotazionale, linee equipotenziali e linee di corrente.

Analisi complessa in un'opera d'arte: La galleria di stampe di Escher.

---

**11/10/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:45

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Integrali curvilinei complessi e funzioni primitive

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

La mappa conforme  $f(z) = e^z$  e le immagini di rette orizzontali e verticali tramite tale trasformazione. Integrali di funzioni complesse lungo curve in  $\mathbb{C}$ ; proprietà dell'integrale: linearità rispetto alla funzione integranda, additività rispetto al cammino di integrazione, invarianza per curve equivalenti; disuguaglianza di Darboux; esempi.

Funzioni primitive; primitive in un dominio (c.d.); condizione necessaria per l'esistenza di una primitiva (c.d.); teorema fondamentale del calcolo integrale in  $\mathbb{C}$  (c.d.); legame degli integrali curvilinei di funzioni complesse con gli integrali curvilinei di forme differenziali lineari piane; condizione sufficiente per l'esistenza di primitive in un dominio semplicemente connesso; esempi; primitive globali e "locali"; differenza tra esistenza di primitive per funzioni reali di variabile reale e per funzioni complesse di variabile complessa.

---

**13/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Il Teorema di Morera e il Teorema di Cauchy

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Teorema di Morera con due dimostrazioni, una delle quali con la costruzione della primitiva.

Primo teorema di Cauchy con due tipologie di ipotesi (interno di curve chiuse contenuto nel dominio di olografia e domini semplicemente connessi). Prima formulazione del Teorema di Cauchy e dimostrazione con l'utilizzo del Teorema di Gauss-Green nel piano; forma complessa della formula di Gauss-Green; seconda formulazione in domini semplicemente connessi (c.d.). Teorema di Cauchy-Goursat (con ipotesi minime); domini regolari a un sol contorno e a più contorni; teorema di Cauchy per domini limitati "con buchi" (c.d.); teorema di Cauchy per curve omotope (c.d.) e sua utilità.

---

**14/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Formula integrale di Cauchy e analiticità delle funzioni ologorfe

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Secondo teorema di Cauchy e formula integrale; indice di avvolgimento di una curva chiusa rispetto a un punto; significato della formula integrale come formula di rappresentazione; formula della media; olografia della derivata di una funzione ologorfa (c.d.); regolarità delle funzioni ologorfe e confronto col comportamento delle funzioni reali di variabile reale; formula integrale di Cauchy per le derivate. Funzioni analitiche in campo complesso e analiticità delle funzioni ologorfe; confronto con le funzioni reali di variabile reale; sviluppi in serie notevoli in campo complesso; raggio di convergenza delle serie di potenze di funzioni intere; disuguaglianze di Cauchy per i coefficienti della serie di potenze di una funzione ologorfa; stime di Cauchy per le derivate.

---

**15/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Zeri di una funzione ologorfa e Principio di identità

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

il teorema di Liouville (c.d.) e dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra col suo utilizzo.

Proprietà delle funzioni analitiche: zeri di una funzione ologorfa; zeri di ordine finito e zeri di ordine infinito; una funzione ologorfa in un dominio ammette zeri di ordine infinito se e solo se è nulla in tale dominio (c.d.). L'insieme degli zeri di una funzione ologorfa non identicamente nulla è un insieme discreto e privo di punti di accumulazione appartenenti al dominio di olografia (c.d.); teorema degli zeri per una funzione ologorfa: l'ordine di uno zero di una funzione ologorfa è univocamente determinato; principio di identità delle funzioni ologorfe (varie sue formulazioni).

---

**18/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 16:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Principio di identità e prolungamento analitico

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Zeri di una funzione olomorfa; differenza tra gli zeri di funzioni complesse olomorfe e funzioni reali derivabili.

Utilizzo del principio di identità per dimostrare alcune identità algebriche che coinvolgono funzioni intere; le funzioni trascendenti elementari sono le uniche estensioni analitiche in  $\mathbb{C}$  delle "omonime" funzioni reali di variabile reale. Estensione analitica (o prolungamento analitico) di funzioni analitiche in senso reale; prolungamento analitico di funzioni analitiche in un aperto; procedimento di estensione analitica che "circonda" una singolarità isolata; barriera (o frontiera) naturale di singolarità: esempio. Funzioni analitiche espresse come somme di serie di potenze formalmente diverse, ma prolungamento analitico l'una dell'altra; multifunzioni analitiche e loro elementi analitici; sviluppi in serie di potenze di una funzione analitica  $f$ , che possono convergere in punti non appartenenti al dominio di olomorfia di  $f$ , o che convergono in punti interni al dominio, ma con somma diversa da  $f$ ; esempi.

---

**20/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Principio del massimo e serie di Laurent

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Principio del massimo modulo (c.d.) e suoi corollari (c.d.); diverse formulazioni di tale principio e osservazioni; disuguaglianze di Cauchy del massimo modulo.

Serie bilatere e loro convergenza in corone circolari; sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare (c.d.); univocità dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione; parte principale e parte regolare della serie; sviluppi in dischi bucati o in domini privati di un punto.

---

**21/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Classificazione delle singolarità isolate

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Calcolo dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione olomorfa in una corona circolare o in un disco bucato.

Punti regolari e punti singolari di una funzione; punti singolari isolati e punti singolari non isolati; esempi; classificazione delle singolarità isolate; esempi: classificazione del tipo di singolarità isolata tramite il comportamento della funzione "vicino" alla singolarità e tramite il suo sviluppo in serie di Laurent; punto singolare isolato all'infinito per le funzioni intere; funzioni meromorfe e loro continuità se considerate a valori nel piano complesso esteso. Una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  possiede al massimo un'infinità numerabile di poli (c.d.).

---

**22/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Funzioni razionali, zeri e poli all'infinito

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Teorema di Riemann sulle singolarità eliminabili; funzioni razionali; le funzioni razionali sono prive di singolarità essenziali (c.d.); ordine di una funzione razionale; funzioni razionali di ordine 1; zeri e poli di una funzione e del suo reciproco; una funzione non può essere limitata in modulo in un intorno di una singolarità isolata non eliminabile (c.d.); somma, prodotto e quoziente di funzioni meromorfe.

Regola di de l'Hospital per funzioni complesse (c.d.); comportamento di una funzione in un intorno di una singolarità isolata essenziale: Teorema di Casorati (c.d.).

Sviluppo in serie di Taylor e/o di Laurent di una funzione meromorfa, esempi.

**25/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 16:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Teorema dei residui

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Comportamento di una funzione in un intorno di una singolarità isolata essenziale: teorema di Picard; esempi.

Residuo di una funzione in un suo punto singolare isolato; calcolo dell'integrale curvilineo di una funzione lungo una curva chiusa che "circonda" la singolarità isolata; legame tra olomorfia di una funzione in un punto e residuo nullo in quel punto; teorema dei residui (c.d.); formula per il calcolo del residuo in un polo semplice e in un polo di ordine  $m$  (c.d.) ed esempi.

Residuo all'infinito; sviluppo in serie di Laurent di una funzione in un intorno di infinito, parte regolare e parte singolare; studio del residuo a infinito di  $f(z)$  col cambio di variabile  $z=1/\xi$ .

---

**27/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Residuo a infinito e indicatore logaritmico

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Residui al finito e all'infinito; esempi. Teorema dell'indicatore logaritmico (c.d.).

Motivazione del nome della formula dell'indicatore logaritmico o principio dell'argomento, e sue conseguenze: una funzione meromorfa con un numero finito di poli ha lo stesso numero di poli e di zeri; dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra con teorema dell'indicatore logaritmico.

Teorema di Rouché (c.d.) e conseguenza: un'altra dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra; esempio di utilizzo del teorema di Rouché per la localizzazione degli zeri di una funzione olomorfa.

---

**28/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Lemma di Jordan e calcolo di integrali con strumenti dell'analisi complessa

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Conseguenze del Teorema della somma dei residui: somma dei residui al finito nulli (e residuo a infinito nullo) per una funzione con un numero finito di punti singolari isolati con comportamento asintotico di  $|z|^{-m}$ ,  $m > 1$ , a infinito;Lemma di Jordan (c.d.). Calcolo di integrali in  $\mathbb{R}$  di funzioni prolungabili in  $\mathbb{C}$  con un numero finito di poli che non stiano sull'asse reale, infinitesime all'infinito; Lemma di Jordan del "piccolo" cerchio (c.d.) e calcolo di integrali generalizzati che richiedono di "aggirare" un polo semplice; integrali di tipo "trasformata di Fourier"; esempi.

---

**29/10/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 11:15**Ora fine:** 13:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Spazi normati di dimensione finita e infinita

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Spazi di Banach; proprietà della funzione norma; esempi:  $\mathbb{R}^N$  con la norma euclidea e con altre norme; lo spazio delle funzioni continue su un compatto con la norma lagrangiana; lo spazio delle funzioni limitate con la norma del sup; gli spazi di Lagrange;  $C[a,b]$  con la norma del max e con la norma integrale di ordine 1; completamento di uno spazio normato; norme equivalenti; norme equivalenti in uno spazio di dimensione finita (c.d.).

Gli integrali di Frésnel.

**03/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Operatori lineari limitati

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Uno spazio normato di dimensione finita è completo e suoi corollari per sottospazi di dimensione finita di spazi normati; lo spazio dei polinomi e il teorema di approssimazione di Weierstrass; definizione di spazio di Hilbert. La disuguaglianza di Young (c.d.); le disuguaglianze di Holder e di Minkowsky.

Operatori e funzionali lineari; esempi; operatori limitati; norma di un operatore (definizioni equivalenti); CNS affinché un operatore sia limitato è che trasformi insiemi limitati in insiemi limitati (c.d.); esempi; un operatore lineare  $A: X \rightarrow Y$  con  $X$  di dimensione finita è limitato (c.d.). Esempi di operatori non limitati.

---

**04/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Spazio degli operatori lineari continui; teorema di Helly-Hahn-Banach

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Operatori continui e uniformemente continui; un operatore lineare è limitato se e solo se è continuo (c.d.); lo spazio degli operatori lineari continui; lo spazio duale con la norma duale. Lo spazio degli operatori lineari continui da  $X$  in  $Y$  è di Banach se  $Y$  lo è (c.d.); operatore prodotto; operatori invertibili. Il Teorema di Helly-Hahn-Banach e suo corollario in uno spazio normato (c.d.).

---

**05/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Corollari del Teorema di Helly-Hahn-Banach e Teorema di Banach-Steinhaus

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Corollari del Teorema di Helly-Hahn-Banach: esistenza di un elemento del duale con norma uguale alla norma di un elemento dello spazio normato di partenza (c.d.); norma di un vettore in uno spazio normato come max della dualità, al variare degli elementi del duale di norma unitaria (c.d.); CNS di densità per un sottospazio di uno spazio normato.

Spazio biduale; iniezione canonica; spazio riflessivo.

Teorema di Banach-Steinhaus (c.d.) e corollario nel caso di una famiglia numerabile di operatori lineari continui (c.d.).

---

**08/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 16:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Topologie deboli

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Corollari del Teorema di Banach-Steinhaus (sottoinsieme limitato in uno spazio di Banach e nel suo duale) (c.d.).

Topologia iniziale e convergenza di successioni nella topologia iniziale. Topologia debole in uno spazio di Banach; convergenza debole e sue proprietà (c.d.).

Esercizi di analisi complessa.

**10/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Topologia debole\* e spazi riflessivi

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Topologia forte e topologia debole in uno spazio di Banach; convergenza forte e convergenza debole equivalenti in uno spazio di dimensione finita (c.d.); alcuni esempi in uno spazio di dimensione infinita (sfera unitaria, bolla chiusa unitaria, bolla unitaria); non metrizzabilità della topologia debole in uno spazio di dimensione infinita; continuità di operatori lineari tra spazi di Banach dotati di topologia forte e/o debole.

La topologia debole\* nel duale di uno spazio normato e sue proprietà (c.d.); confronto tra topologia forte, topologia debole e topologia debole\* su uno spazio duale; i teoremi di Riesz e di Banach-Alaoglu-Bourbaki; topologie coincidenti in spazi di dimensione finita. Spazi riflessivi; teorema di Kakutani (c.d.).

**11/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Proprietà di spazi riflessivi, spazi separabili, spazi uniformemente convessi

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Coincidenza di chiusura debole e forte per insiemi convessi in uno spazio di Banach; riflessività di uno spazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach riflessivo (c.d.); uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se lo è il suo duale (c.d.). Compattezza debole sequenziale in spazi riflessivi e Teorema di Eberlein-Smulian; compattezza e compattezza sequenziale in spazi metrici e in spazi topologici.

Definizione di spazio separabile e alcune proprietà: sottoinsiemi di spazi separabili; spazi di Banach tali che il duale sia separabile; spazi riflessivi e separabili; metrizzabilità della bolla chiusa unitaria del duale di uno spazio di Banach separabile rispetto alla topologia debole\*; metrizzabilità della bolla chiusa unitaria rispetto alla topologia debole in uno spazio di Banach tale che il duale sia separabile; successioni limitate sequenzialmente debolmente\* compatte nel duale di uno spazio di Banach separabile.

Definizione di spazio uniformemente convesso; proprietà geometrica dell'uniforme convessità; esempio di norme equivalenti non uniformemente convesse; Teorema di Milmann-Pettis.

Spazi  $L^p$ : definizione nello spazio misurabile degli insiemi di  $\mathbb{R}^N$  rispetto alla misura di Lebesgue o in un generico spazio misurabile;  $L^p$  è uno spazio vettoriale (c.d.);  $L^p$  è uno spazio normato (c.d.); spazio delle funzioni essenzialmente limitate; estremo superiore essenziale; definizioni equivalenti; norma in  $L^\infty$  come sup del modulo della funzione nel complementare di un insieme di misura nulla (c.d.).

---

**12/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 11:15**Ora fine:** 13:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**Funzioni essenzialmente limitate e proprietà degli spazi  $L^p$ **Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Confronto tra sup e sup essenziale di una funzione; esempi;  $L^\infty$  è uno spazio normato completo (c.d.); disuguaglianza di Holder (c.d) negli spazi  $L^p$  e disuguaglianza generalizzata; suo utilizzo per dimostrare la disuguaglianza di Minkowsky delle norme; inclusione tra spazi  $L^p$  per insiemi di misura finita (c.d); esempi.

---

**17/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Teorema di Fischer-Riesz

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Disuguaglianza di interpolazione per spazi  $L^p$ . Il Teorema di Fischer-Riesz (c.d.).

---

**18/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**Riflessività e duale degli spazi  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ **Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Teorema di Fischer-Riesz e suo corollario (c.d.). Convergenza in media di indice  $p$ ; spazio delle funzioni a quadrato sommabile. Riflessività degli spazi  $L^p$ , per  $1 < p < \infty$ , (c.d.) tramite le disuguaglianze di Clarkson i) (c.d.) e ii) e il Teorema di Milman-Pettis; seconda dimostrazione della riflessività di  $L^p$  tramite l'operatore  $T: L^p \rightarrow (L^q)^*$ . Teorema di rappresentazione di Riesz per  $1 < p < \infty$  (c.d.);

---

**19/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**Riflessività, separabilità e duali degli spazi  $L^p$ **Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Separabilità negli spazi  $L^p$ ; proprietà degli spazi  $L^1$  e  $L^\infty$ ; esempio che mostra la non validità del teorema di rappresentazione di Riesz per  $p = \infty$ ; risultati legati alle topologie deboli negli spazi  $L^p$  e qualche esempio.

Definizione di prodotto di convoluzione e proprietà.

Definizione di spazio delle funzioni continue a supporto compatto e risultati di densità. Lo spazio  $C_0^\infty$ . Supporto di una funzione e supporto essenziale.

Definizione di spazio di funzioni localmente integrabili.

Operatore di traslazione; invariata per traslazioni e continuità per traslazioni negli spazi  $L^p$ .

Esercizi di analisi complessa.

**22/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 15:00**Ora fine:** 16:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

La trasformazione di Fourier

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Esercizi di analisi complessa.

Spazi  $L^p$ .

Funzioni Fourier-trasformabili e condizione sufficiente di trasformabilità; trasformata di funzioni a valori reali e pari e di funzioni a valori reali e dispari (c.d.); linearità e continuità dell'operatore di Fourier (c.d.); effetto "regolarizzante" dell'operatore di Fourier: esempi; continuità della trasformata di Fourier (c.d.).

---

**24/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Trasformata di Fourier inversa e calcolo della trasformata di Fourier della gaussiana

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

La trasformazione di Fourier: Teorema di Riemann-Lebesgue (c.d.); proprietà della trasformata di Fourier: riscaldamento, coniugio, traslazione nel tempo e nella frequenza (c.d.); formula di moltiplicazione (c.d.); derivata della trasformata di Fourier (c.d.) e trasformata di Fourier della derivata (c.d.); trasformata di Fourier e convoluzione (c.d.); funzioni antitrasformabili e antitrasformata di Fourier; formula di simmetria (c.d.) e teorema di inversione; calcolo della trasformata di Fourier della gaussiana sia con i metodi dell'analisi complessa che con le proprietà della trasformazione di Fourier.

---

**25/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 09:15**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Serie e trasformata di Fourier; lo spazio di Schwartz

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Esempio di funzione Fourier trasformabile la cui trasformata non è integrabile; esempio di applicazione della formula di simmetria; esempio di funzione limitato, continua e infinitesima a infinito che non è la trasformata di Fourier di nessuna funzione.

Confronto tra serie di Fourier e trasformazione di Fourier con qualche riferimento alla teoria dei segnali.

Lo spazio di Schwartz delle funzioni rapidamente decrescenti; una funzione rapidamente decrescente è limitata e integrabile (c.d.); una funzione rapidamente decrescente è Fourier trasformabile e la sua trasformata è anch'essa rapidamente decrescente (c.d.).

---

**26/11/2021 - lezione -****Docente:** ANEDDA CLAUDIA**Ora inizio:** 11:00**Ora fine:** 12:45**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**Trasformazione di Fourier in  $L^2$  e metodo di Fourier per PDEs**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Trasformazione di Fourier nello spazio di Schwartz e teorema di Plancherel; teorema e identità di Plancherel in  $L^2$ . Un'applicazione delle trasformazioni di Fourier all'equazione del calore.

Funzioni Laplace-trasformabili e assolutamente Laplace-trasformabili; ascissa di convergenza; trasformata di Laplace nel suo semipiano di convergenza; ordine esponenziale di una funzione e suo legame con l'ascissa di convergenza; esempi: la trasformata della funzione di Heaviside, della funzione esponenziale e dell'impulso di durata  $h$ ; linearità dell'operatore di Laplace; calcolo delle trasformate di funzioni trigonometriche, di funzioni iperboliche e di funzioni polinomiali; definizione di segnale (Laplace-trasformabile).

---

**29/11/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 15:00

**Ora fine:** 16:45

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

La trasformata di Laplace e le sue proprietà

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

Limitatezza in modulo della trasformata di Laplace nel semipiano di convergenza (c.d.); trasformata di Laplace  $L[f](s)$  infinitesima per  $\text{Re}(s)$  che tende a infinito (c.d.); legame tra la trasformata di Laplace e la trasformata di Fourier (c.d.); proprietà della trasformata di Laplace: riscaldamento, traslazione e "smorzamento" (c.d.); trasformata di Laplace di un segnale periodico integrabile nell'intervallo di periodicità (c.d.); derivata della trasformata di Laplace (c.d.); derivata di ordine  $n$  della trasformata di Laplace; trasformata della funzione  $f(t)/t$  (c.d.); trasformata della derivata (c.d.) e delle derivate successive; prodotto di convoluzione tra segnali localmente integrabili; trasformata di Laplace della convoluzione; trasformata di Laplace dell'integrale (c.d.); qualche esempio; l'inversione della trasformazione di Laplace.

---

**01/12/2021 - lezione -**

**Docente:** ANEDDA CLAUDIA

**Ora inizio:** 09:15

**Ora fine:** 11:00

**Ore accademiche:** 2

**Titolo attività:**

Antitrasformata di Laplace e funzioni antitrasformabili

**Descrizione attività:**

Riepilogo della lezione precedente.

L'antitrasformata di Laplace; formula di inversione di Riemann-Fourier; determinazione di un segnale continuo mediante la sua trasformata di Laplace; formula di inversione di Riemann-Fourier nella ricostruzione della funzione di Heaviside  $H(t)$  (per  $t$  diverso da zero); antitrasformata di Laplace di funzioni razionali fratte proprie con poli semplici e multipli; applicazione della trasformata di Laplace per la risoluzione di alcuni problemi di Cauchy.

---