Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

La continuità delle funzioni di una variabile reale

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

GI 04 NOV 2021

NELL'OTTOCENTO, BEN DUE SECOLI DOPO L'INVENZIONE DEL CALCOLO (DIFFERENZIALE E INTEGRALE), KARL WEIERSTRASS E I SUOI COLLABORATORI (H. HEINE) DIEDERO LA DEFINIZIONE $\varepsilon-\delta$ DELLA CONTINUITÀ:

UNA FUNZIONE $f: S \to \mathbb{R}$ SI DICE CONTINUA IN UN PUNTO $x_0 \in S$ SE RISULTA $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, COMUNQUE SI PRENDA $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, A CONDIZIONE CHE $x \in S \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = mx + q$ SODDISFA LA DEFINIZIONE IN TUTTI I PUNTI $x_0 \in S = \mathbb{R}$. INFATTI, QUALUNQUE SIA $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, LA DISUGUAGLIANZA $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ EQUIVALE A $|m| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$ E QUINDI È SODDISFATTA PER OGNI $x \in S \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$: BASTA PRENDERE

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{SE } m = 0 \\ \frac{\varepsilon}{|m|}, & \text{SE } m \neq 0. \end{cases}$$

VOLTIAMOCI INDIETRO: ESSERE $m = 0$ SIGNIFICA $f(x) = q$ (COSTANTE), QUINDI $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ PER OGNI ε ED OGNI $x \in \mathbb{R}$, QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, PER $x \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$.

SE, INVECE, $m \neq 0$ E PRENDIAMO $x \in \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{|m|}, x_0 + \frac{\varepsilon}{|m|}\right)$ OTTENIAMO CHE $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|m|}$ E QUINDI LA DISUGUAGLIANZA $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ È SODDISFATTA.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE LA FUNZIONE $f(x) = x^2$ È CONTINUA.

DEFINIZIONE: SI DICE CHE $f: S \to \mathbb{R}$ È CONTINUA SE LO È IN OGNI $x_0 \in S$.

LA CONTINUITÀ DI $f: S \to \mathbb{R}$ IN UN PUNTO $x_0 \in S$ SI PUÒ ESPRIMERE DICENDO CHE PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ESISTE $\delta \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ NELL'INTERSEZIONE $S \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$. OPPURE: UNA FUNZIONE $g: T \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN $y_0 \in T \subset \mathbb{R}$ SE PER OGNI σ (SIGMA) $\in \mathbb{R}^+$ ESISTE UN $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE $|g(y) - g(y_0)| < \sigma$ PER OGNI $y \in T \cap (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

TEOREMA: DATA UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CONTINUA NEL PUNTO $x_0 \in S$, CONSIDERIAMO UNA $g: T \to \mathbb{R}$ CONTINUA NEL PUNTO $y_0 = f(x_0) \in T$. TESI: LA FUNZIONE COMPOSTA $g(f(x))$ È CONTINUA NEL PUNTO x_0.

DIMOSTRAZIONE: PRESO $\sigma \in \mathbb{R}^+$, PER LA CONTINUITÀ DI g ESISTE UN $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE $|g(y) - g(y_0)| < \sigma$ PER OGNI $y \in T \cap (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

 GI 04 NOV 2021

Per la continuità di f, esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per ogni $x \in S \cap (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$.

Dico che per ogni $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ che stia nel dominio di $g(f(x))$ risulta $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \sigma$ e questo è vero perché $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ e l'affermazione segue dalla continuità di g.

Questo teorema ha molte applicazioni: sapendo che $f(x) = \log x$ è continua, come pure $g(y) = e^y$, possiamo scrivere $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$ e dedurre la continuità delle funzioni potenza. Similmente, siccome $b^x = e^{x \log b}$, le funzioni esponenziali sono continue.

Esempio di funzione continua:

$f(x) = \frac{1}{x}$ può dirsi funzione continua. Il punto $x_0 = 0$ non interferisce perché non appartiene al dominio. Si può dimostrare che, se $x_0 \neq 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x x_0|} < \varepsilon$ a condizione che $x \in (x_0-\delta,\ x_0+\delta) \setminus \{0\}$. Come lo si può dimostrare?

Ogni $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ è (banalmente) continua nei punti isolati di S.

I punti isolati di S sono quegli $x_0 \in S$ tali che l'intersezione $S \cap \big((x_0-z,\ x_0+z) \setminus \{x_0\}\big)$ è vuota per almeno un $z \in \mathbb{R}^+$.

Esempio: il punto $x_0 = 0 \in S = \mathbb{R}$ non è isolato in quanto l'intersezione $S \cap \big((x_0-z,\ x_0+z) \setminus \{x_0\}\big) = (x_0-z,\ x_0+z) \setminus \{x_0\}$ non è vuota per nessun $z \in \mathbb{R}^+$.

Esempio: il punto $x_0 = 0 \in [0,1]$ non è isolato perché l'intersezione $[0,1] \cap \big((x_0-z,\ x_0+z) \setminus \{x_0\}\big) =$

$$= \begin{cases} (0,z), & \text{se } z \in (0,1] \\ (0,1], & \text{se } z \in (1,+\infty) \end{cases}$$

non è vuota per nessun $z \in \mathbb{R}^+$.

Esempio: il punto $x_0 = 0 \in \mathbb{N}$ è isolato perché $\mathbb{N} \cap (-z, z) \setminus \{0\}$

$$= \begin{cases} \emptyset, & \text{se } z \in (0,1] \\ \{1, \dots, n\} & \text{se } z \in (n,\ n+1],\ n \geq 1 \end{cases}$$

è l'insieme vuoto per certi $z \in \mathbb{R}^+$.

Osservazione: se $x_0 \in S$ non è isolato, è un punto di accumulazione. Come si dimostra?

Osservazione: se $\# S < +\infty$, tutti i punti di S sono isolati. Come si dimostra?

DIMOSTRIAMO CHE OGNI $f: S \to \mathbb{R}$ È CONTINUA NEI PUNTI ISOLATI DI S.

PRENDIAMO UN PUNTO ISOLATO $x_0 \in S$. RISULTA $S \cap \left((x_0 - r,\ x_0 + r) \setminus \{x_0\} \right) = \emptyset$ PER UN CERTO r. VERIFICHIAMO CHE f È CONTINUA IN x_0. PRENDIAMO $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ED OSSERVIAMO CHE PER OGNI $x \in S \cap (x_0 - r,\ x_0 + r) = \{x_0\}$ RISULTA $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

QUINDI LE SUCCESSIONI $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ SONO CONTINUE. ESEMPIO: $n!$ È UNA FUNZIONE CONTINUA (MA CIÒ È IRRILEVANTE!)

ESEMPIO DI FUNZIONE DISCONTINUA:

$$H(x) = \Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in [0, +\infty) \\ 0, & \text{SE } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

(GRADINO DI HEAVISIDE). È CONTINUA IN OGNI $x_0 \neq 0$ PERCHÉ COINCIDE CON $f(x) = 1$ PER $x \in \mathbb{R}^+$ E CON $f(x) = 0$ PER $x \in \mathbb{R}^-$. NOTA: SE f È CONTINUA IN x_0 E SE $g(x) = f(x)$ PER OGNI x IN UN INTORNO $(x_0 - r,\ x_0 + r)$ ALLORA g È CONTINUA IN x_0 (COME SI DIMOSTRA?)

LA FUNZIONE $H(x)$ È DISCONTINUA NEL PUNTO $x_0 = 0$ PERCHÉ SE PRENDO $\varepsilon \in (1, +\infty)$ TROVO δ, MA SE $\varepsilon \in (0, 1]$ COME FACCIO?

GI 04 NOV 2021

LA CONDIZIONE DI LIPSCHITZ

SI DICE CHE $f: S \to \mathbb{R}$ È LIPSCHITZIANA SE ESISTE UNA COSTANTE L TALE CHE PER OGNI $x_1, x_2 \in S$ RISULTA $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$.

VE 05 NOV 2021

PROBLEMA 1: LA FUNZIONE $f(x) = |x|$ È LIPSCHITZIANA (PERCHÉ?).

OVVIAMENTE SE $x_1 = x_2$ RISULTA $|f(x_1) - f(x_2)| = 0 \leq L\,|x_1 - x_2|$ QUALUNQUE SIA L. SE, INVECE, $x_1 \neq x_2$, POSSIAMO SCRIVERE

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq L$$

QUINDI LA LIPSCHITZIANITÀ CONSISTE NEL FATTO CHE IL RAPPORTO INCREMENTALE È LIMITATO, OVVERO

$$\sup_{x_1 \neq x_2} \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| < +\infty$$

VERIFICHIAMO CHE $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$, CIOÈ

$$\big|\, |x_1| - |x_2| \,\big| \leq |x_1 - x_2|$$

CHE EQUIVALE A $-2|t| \leq -2t$ DOVE $t = x_1 x_2$, E QUESTA A SUA VOLTA EQUIVALE A $|t| \geq t$ LA QUALE È VERA PER OGNI t.

VE 05 NOV 2021

PROBLEMA 2: TUTTE LE FUNZIONI LIPSCHITZIANE SONO CONTINUE (PERCHÉ?).

PERCHÉ SE f È LIPSCHITZIANA ED IO FISSO $x_0 \in S$, DOMINIO DI f, PER FAR SÌ CHE $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ SAPENDO CHE $|f(x) - f(x_0)| \leq L\,|x - x_0|$ BASTA PRENDERE $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. INFATTI SE $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap S$ HO CHE

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L\,|x - x_0| < L\,\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

PROBLEMA 3: LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{x}$ È LIPSCHITZIANA? E LA FUNZIONE $f(x) = x^2$?

VE 05 NOV 2021

LA CONTINUITÀ PER SUCCESSIONI

LEMMA 1: SE $f: S \to \mathbb{R}$ È CONTINUA NEL PUNTO $x_0 \in S$, ALLORA PER OGNI SUCCESSIONE $a_n \in S$ CHE SIA CONVERGENTE AD x_0 RISULTA

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

LEMMA 2. DATA UNA $f: S \to \mathbb{R}$ E SCELTO UN PUNTO $x_0 \in S$ CONSIDERIAMO LE SUCCESSIONI $a_n \in S$ CHE CONVERGONO AD x_0. SE RISULTA

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

PER CIASCUNA SUCCESSIONE COME SOPRA, ALLORA f È CONTINUA IN x_0.

COROLLARIO: UNA FUNZIONE $f: S \to \mathbb{R}$ È CONTINUA IN UN PUNTO x_0 SE E SOLO SE È NI CONTINUA PER SUCCESSIONI, CIOÈ SE RISULTA CHE

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

PER OGNI SUCCESSIONE $a_n \in S$ CONVERGENTE A x_0.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1: RICORDIAMO CHE $a_n \to x_0$ SE PER OGNI $\delta \in \mathbb{R}^+$ ESISTE n_0 TALE CHE $a_n \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ PER OGNI $n > n_0$.

PER VERIFICARE CHE $f(a_n) \to f(x_0)$ PRENDO $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ E POI, INVOCANDO LA CONTINUITÀ DI f IN x_0, DICO CHE ESISTE $\delta \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

PER OGNI $x \in S \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

MA ALLORA, SE PRENDO $n > n_0$, TROVO $a_n \in S \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ E PERCIÒ

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

E LA CONCLUSIONE SEGUE DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE.

VE 05 NOV 2021

L'ENUNCIATO CONTRONOMINALE

L'ENUNCIATO CONTRONOMINALE DI UN ENUNCIATO AVENTE LA FORMA

$$A \Rightarrow B$$

È L'ENUNCIATO $\neg B \Rightarrow \neg A$ ($\neg$ = NON), CHE EQUIVALE AL PRECEDENTE.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 2:

f È SEQUENZIALMENTE CONTINUA NEL PUNTO x_0 (ENUNCIATO A) IMPLICA f È CONTINUA IN x_0 (ENUNCIATO B)

VERIFICHIAMO CHE $\neg B \Rightarrow \neg A$.

SE f NON È CONTINUA IN x_0, ESISTE $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE PER OGNI $\delta \in \mathbb{R}^+$ RISULTA $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ PER ALMENO UN $x \in S \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

ALLORA PRENDO $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

ED HO L'ESISTENZA DI $a_n \in S \cap (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ TALE CHE $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$.

MA ALLORA $a_n \to x_0$ E $f(a_n) \not\to f(x_0)$

DUNQUE f NON È CONTINUA PER SUCCESSIONI IN x_0 ($\neg A$).

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

DATO UN INTERVALLO I ED UNA FUNZIONE CONTINUA $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, PER OGNI $y \in (\inf f, \sup f)$ ESISTE ALMENO UN $x \in I$ TALE CHE $f(x) = y$

(I FOUND A SOLUTION!)

IMPORTANZA: ESISTE $\sqrt{x}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}^+$, ESISTE $\log x$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}^+$, ESISTE $\arccos x$ PER OGNI $x \in [-1, 1]$, ESISTE $\arcsin y$ PER OGNI $y \in [-1, 1]$, ESISTE $\arctg y$ PER OGNI $y \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE: SE f È COSTANTE, $\inf f = \sup f$ E $(\inf f, \sup f) = \emptyset$ E LA TESI VALE BANALMENTE. ALTRIMENTI PRENDO $y \in (\inf f, \sup f)$ E CIOÈ

$$\inf f < y < \sup f.$$

VEDO CHE y NON È UN MINORANTE, QUINDI ESISTE $x_1 \in I$ TALE CHE $f(x_1) < y$.

VEDO CHE y NON È UN MAGGIORANTE QUINDI ESISTE $x_2 \in I$ TALE CHE $f(x_2) > y$.

PROSEGUIAMO RAGIONANDO SULL'INTERVALLO CHIUSO AVENTE PER ESTREMI x_1 E x_2, CHE È INCLUSO IN I. DEFINIAMO $g(x) := f(x) - y$ ED OSSERVIAMO CHE $g(x_1) < 0$ E $g(x_2) > 0$, E g È CONTINUA PERCHÉ $g(z_1) - g(z_2) = f(z_1) - f(z_2)$.

VE 05 NOV 2021

IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI SEGUE ALLORA DAL TEOREMA DEGLI ZERI:

SE $g: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ È CONTINUA, E SE $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$, ALLORA AMMETTE ALMENO UNO ZERO.

ESISTE DUNQUE ALMENO UN $x \in (x_1, x_2)$ TALE CHE $g(x) = 0$. MA ALLORA $f(x) = y$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

SUPPONIAMO, SENZA LEDERE LA GENERALITÀ, CHE $g(x_1) < 0 < g(x_2)$.

DIMOSTRIAMO DUNQUE IL TEOREMA DEGLI ZERI: DEFINIAMO a_n, b_n, c_n PER RICORRENZA PONENDO

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{PER OGNI } n$$

$$a_0 = x_1, \qquad b_0 = x_2$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{SE } g(c_n) \leq 0 \\ a_n & \text{SE } g(c_n) > 0 \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{SE } g(c_n) \leq 0 \\ c_n & \text{SE } g(c_n) > 0 \end{cases}$$

SI TROVA CHE

$$x_1 \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq x_2$$

QUINDI, PER COMPLETEZZA,

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{E} \quad b_n \longrightarrow b \in [x_1, x_2]$$

INOLTRE $b_n - a_n = \dfrac{x_2 - x_1}{2^n}$ PER OGNI n. QUINDI $b - a = 0$ E POSSO DEFINIRE $x = a = b$.

SICCOME $g(a_n) \leq 0 < g(b_n)$
PER OGNI n, LA CONTINUITÀ
PER SUCCESSIONI IMPLICA (LEMMA 1)

$$g(x) \leq 0 \leq g(x)$$

QUINDI $g(x) = 0$ COME VOLEVASI
DIMOSTRARE.

CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

TEOREMA: SE f È STRETTAMENTE MONOTONA, ED HA PER DOMINIO UN INTERVALLO I, LA FUNZIONE INVERSA g È CONTINUA.

ESEMPIO: LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{SE } x \in (-\infty, 0] \\ x-1, & \text{SE } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

È STRETTAMENTE CRESCENTE E CONTINUA SUL DOMINIO $S = \mathbb{R} \setminus (0, 1]$

E LA SUA INVERSA $g(y) = \begin{cases} y, & \text{SE } y \in (-\infty, 0] \\ y+1, & \text{SE } y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

È CONTINUA PER $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ E DISCONTINUA NEL PUNTO $y_0 = 0$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: INVOCANDO IL LEMMA 2, VERIFICHIAMO CHE g È CONTINUA PER SUCCESSIONI IN UN QUALUNQUE PUNTO $y_0 \in \operatorname{Im} f = f(I) =: S$

PRENDO UNA SUCCESSIONE DI $b_n \in S$ CONVERGENTE AD y_0 E VERIFICO CHE

$$a_n := g(b_n) \longrightarrow g(y_0) = x_0 \in I.$$

SE COSÌ NON FOSSE, ESISTEREBBE $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE $|a_n - x_0| \geq \varepsilon_0$ PER INFINITI TERMINI, CHE INDICO CON a_{n_k}.

SE $a_{n_k} \geq x_0 + \varepsilon_0 > x_0$ ALLORA $x_0 + \varepsilon_0 \in I$ PERCHÉ I È UN INTERVALLO, E $b_{n_k} = f(a_{n_k}) \overset{\geq}{\leq} f(x_0+\varepsilon) \overset{>}{<} y_0$ PERCHÉ f CRESCE/DECRESCE.

SE, INVECE, $a_{n_k} \leq x_0 - \varepsilon < x_0$, ALLORA $x_0 - \varepsilon \in I$ E INOLTRE $b_{n_k} = f(a_{n_k}) \overset{\leq}{\geq} f(x_0-\varepsilon) \overset{<}{>} y_0$ CONTRO L'ASSUNTO CHE $b_n \to y_0$. QUINDI DEVE AVERSI $g(b_n) \longrightarrow g(y_0)$ E LA g È CONTINUA COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

ESEMPIO: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{SE } x \in (-\infty, 0] \\ x+1, & \text{SE } x \in (0, +\infty) \end{cases}$

È STRETTAMENTE CRESCENTE, HA PER DOMINIO L'INTERVALLO $I = (-\infty, +\infty)$, ED È DISCONTINUA NELL'ORIGINE. LA SUA INVERSA È LA FUNZIONE g DATA DA

$$g(y) = \begin{cases} y, & \text{SE } y \in (-\infty, 0] \\ y-1, & \text{SE } y \in (1, +\infty) \end{cases}$$

CHE È CONTINUA SUL SUO DOMINIO $S = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

OSSERVAZIONE: L'IPOTESI DELLA CONTINUITÀ DI f NON INTERVIENE. ESSA INTERVIENE, INVECE, AD ASSICURARE CHE $(\inf f, \sup f)$ È INCLUSO IN $\operatorname{Im} f$, DUNQUE $\operatorname{Im} f$ È UN INTERVALLO.

 LU 08 NOV 2021

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI e^x E $\text{sen}\,\alpha$

PER VERIFICARE CHE e^x È CONTINUA IN UN QUALUNQUE $x_0 \in \mathbb{R}$ SCRIVO

$$|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0}\,|e^{x-x_0} - 1|.$$

DICO CHE SE $h = x - x_0 \in (-\delta, \delta)$ RISULTA $|e^h - 1| < \varepsilon$. BASTA RICORDARE CHE $\sqrt[n]{b} = b^{1/n} \longrightarrow 1$ PER OGNI $b \in \mathbb{R}^+$. POSTO $b = e$, HO CHE

$$e^h - 1 < e^{\frac{1}{n_0}} - 1 < \varepsilon$$

PER $h \in [0, \frac{1}{n_0})$. INOLTRE, CON $b = \frac{1}{e}$, HO CHE

$$-\varepsilon < b^{\frac{1}{n_1}} - 1 = e^{-\frac{1}{n_1}} - 1 < e^h - 1 \le 0$$

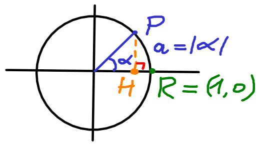
PER $h \in (-\frac{1}{n_1}, 0]$. MA ALLORA, POSTO $\delta = \min\{\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_1}\}$ POSSO DIRE CHE $|e^h - 1| < \varepsilon$ PER $h \in (-\delta, \delta)$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

COROLLARIO: LA FUNZIONE $x = \log y$ È CONTINUA PER OGNI $y \in \mathbb{R}^+$.

SIMILMENTE, VERIFICHIAMO CHE

$$|\text{sen}\,\alpha| \le |\alpha| \text{ PER OGNI } \alpha \in \mathbb{R}.$$

LA TESI È BANALE SE $|\alpha| \ge 1 \ge |\text{sen}\,\alpha|$. SE, INVECE, $\alpha \in (-1, 1)$, $|\text{sen}\,\alpha| = \overline{PH} \le$



$\le \overline{PR} \le a = |\alpha|$.

PER CONCLUDERE, OSSERVIAMO CHE

$$|\text{sen}\,p - \text{sen}\,q| = 2\left|\cos\frac{p+q}{2}\right| \left|\text{sen}\frac{p-q}{2}\right| \le 2\left|\frac{p-q}{2}\right| = |p-q|$$

QUINDI $\text{sen}\,\alpha$ È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE $L = 1$.

COROLLARIO: $\cos\alpha = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $f(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ È CONTINUA, $\text{sen}\,\beta$ È CONTINUA, QUINDI $\cos\alpha$ È CONTINUA PERCHÉ COMPOSTA DI DUE FUNZIONI CONTINUE.

TEOREMA: SE f E g SONO CONTINUE NEL PUNTO x_0, ALLORA: 1) LA FUNZIONE $h(x) = f(x) \pm g(x)$ È CONTINUA IN x_0; 2) $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ È CONTINUA IN x_0; 3) $h(x) = f(x)/g(x)$ PURE, SE $g(x_0) \neq 0$; 4) $(f(x))^{g(x)}$ È CONTINUA IN x_0 SE $f(x_0) > 0$.

DIMOSTRAZIONE. 1) $|h(x) - h(x_0)| = |f(x) - f(x_0) \pm g(x) \mp g(x_0)| \le |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$ E LA TESI SEGUE.

2) $|h(x) - h(x_0)| = |f(x)g(x) +$
$+ f(x)g(x_0) - f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \le$
$\le |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| +$
$+ |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)|$

PER PROSEGUIRE, OSSERVIAMO CHE SE f È CONTINUA IN x_0, METTO $\varepsilon = 1$ E TROVO $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE $|f(x) - f(x_0)| < 1$ PER OGNI $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, DUNQUE $|f(x)| \le |f(x_0)| + 1 =: M$.

MA ALLORA $|h(x) - h(x_0)| \le M\varepsilon + |g(x_0)| \cdot \varepsilon$ PER $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ E LA TESI SEGUE.

3) $h(x) = f(x)/g(x) = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$.

IL PRIMO FATTORE, $f(x)$, È CONTINUO PER IPOTESI. IL SECONDO È CONTINUO PERCHÉ FUNZIONE COMPOSTA DI $y = g(x)$ E DI $t = \frac{1}{y}$, QUINDI IL PRODOTTO È CONTINUO.

4) $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$,

DOVE $\log f(x)$ È COMPOSTA DI FUNZIONI CONTINUE, $y(x) = g(x) \log f(x)$ È PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE, E $e^{y(x)}$ È COMPOSTA DI FUNZIONI CONTINUE.

COROLLARIO: SE $b_n \to b \in \mathbb{R}^+$ E $a_n \to a \in \mathbb{R}$ ALLORA $b_n^{a_n} \to b^a$.

ABBIAMO OSSERVATO CHE LE FUNZIONI CONTINUE SONO LOCALMENTE LIMITATE. VERIFICHIAMO ADESSO CHE SE $f(x_0) > 0$ E SE f È CONTINUA IN x_0 ALLORA RISULTA $f(x) > 0$ IN UN INTORNO DI x_0 (TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO). SIA $f: S \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $x_0 \in S$ E SIA $f(x_0) > 0$. PRESO $\varepsilon \in (0, f(x_0))$, PER CONTINUITÀ ESISTE $\delta \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE

$$0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

PER OGNI $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. SI DICE CHE $f(x)$ SI MANTIENE LONTANA DA 0.

ESERCIZIO: DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ È CONTINUA IN x_0.

CONSEGUENZE: 1) LE FUNZIONI POLINOMIALI $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ SONO DEFINITE SULL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$ E SONO IVI CONTINUE. 2) LE FUNZIONI RAZIONALI

$$R(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{i=0}^{m} b_i x^i}$$

SONO BEN DEFINITE E CONTINUE IN TUTTI I PUNTI TRANNE GLI ZERI DEL DENOMINATORE.

MA 09 NOV 2021

I LIMITI DI $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ E DI $R(x)$ PER $x \to \pm\infty$ SI TROVANO FACILMENTE:

$$f(x) = x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{n-k}}$$

$$= x^n \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{x^{n-k}} \right)$$

QUINDI, SE $a_n > 0$, RISULTA

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

CON UN PROCEDIMENTO SIMILE SI TROVA

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{E} \quad \lim_{x \to \pm\infty} R(x).$$

ESEMPIO: $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

ESEMPIO: $\dfrac{1-2x^2}{x^2+1} = \dfrac{\frac{1}{x^2} - 2}{1 + \frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -2$

ASINTOTI DI $f(x)$ PER $x \to \pm\infty$

SIA $f(x) : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO ~~SUP~~ INFERIORMENTE. LA RETTA $y(x) = mx + q$ È UN ASINTOTO DI $f(x)$ PER $x \to \pm\infty$ SE $\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - y(x) \big) = 0$.

ESEMPIO: SICCOME $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, LA RETTA $y(x) = 0$ (ASSE x) È UN ASINTOTO PER $x \to -\infty$. NOTA: SAPPIAMO CHE $e^{-n} = \dfrac{1}{e^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ QUINDI $0 < e^{-n_0} < \varepsilon$ CON OPPORTUNO n_0. MA ALLORA, PER OGNI $x \in (-\infty, -n_0)$ RISULTA $0 < e^x < e^{-n_0} < \varepsilon$.

TEOREMA: SE $f : S \to \mathbb{R}$, CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE, È MONOTONA NON DECRESCENTE, ALLORA

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup f.$$

SE f È MONOTONA NON CRESCENTE, ALLORA $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf f$.

SE IL DOMINIO S È ILLIMITATO INFERIORMENTE, CON f NON DECRESCENTE, ALLORA $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf f$. INFINE, SE f È NON CRESCENTE, ALLORA

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup f.$$

MA 09 NOV 2021

DIMOSTRAZIONE DEL PRIMO ENUNCIATO.

SE $\sup f = +\infty$ ALLORA PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE $x_0 \in S$ TALE CHE $f(x_0) > M$. MA ESSENDO f MONOTONA, SI HA $f(x) \geq f(x_0) > M$ PER OGNI $x \in (x_0, +\infty) \cap S$, QUINDI $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

SE, INVECE, $\sup f < +\infty$ ALLORA PER OGNI $\varepsilon > 0$ IL NUMERO $(\sup f) - \varepsilon$ NON È UN MAGGIORANTE E QUINDI ESISTE $x_0 \in S$ TALE CHE $f(x_0) > (\sup f) - \varepsilon$. MA SICCOME f È MONOTONA, RISULTA

$$(\sup f) - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \sup f < (\sup f) + \varepsilon$$

PER OGNI $x \in (x_0, +\infty) \cap S$, QUINDI $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup f$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

GI 11 NOV 2021

$\boxed{\text{ALTRI SEMPLICI LIMITI PER } x \to \pm\infty}$

ESSENDO $b^x = e^{x \log b}$, PER $b \in \mathbb{R}^+$,

SI HA
$$\lim_{x \to +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty, & \text{SE } b > 1 \\ 1, & \text{SE } b = 1 \\ 0, & \text{SE } b \in (0,1). \end{cases}$$

INFATTI $e^n \to +\infty$ QUINDI $e^{n_0} > M$ PER n_0 OPPORTUNO, QUINDI $e^x > e^{n_0} > M$ PER OGNI $x \in (n_0, +\infty)$.

GI 11 NOV 2021

PRESO $\alpha \in \mathbb{R}^+$ SAPPIAMO CHE $n^\alpha \to +\infty$ QUINDI $n_0^\alpha > M$ PER n_0 OPPORTUNO, MA ALLORA $x^\alpha > n_0^\alpha > M$ PER OGNI $x \in (n_0, +\infty)$ QUINDI $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

SE, INVECE, PRENDIAMO $\beta \in \mathbb{R}^-$ ALLORA, POSTO $\alpha = |\beta|$ POSSIAMO SCRIVERE

$$-\varepsilon < 0 < x^\beta = \frac{1}{x^\alpha} < \varepsilon = \frac{1}{M} \text{ PER}$$

$x \in (n_0, +\infty)$ AVENDO DEFINITO $M := \frac{1}{\varepsilon}$.

QUINDI $\lim_{x \to +\infty} x^\beta = 0$.

CONFRONTIAMO b^x CON x, ESSENDO $b = 1 + \varepsilon \in (1, +\infty)$. SAPPIAMO DAL 05/10 CHE $\frac{b^n}{n} \to +\infty$. OVVIAMENTE

$$\frac{b^n}{n+1} = \frac{b^n}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{b^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \to +\infty.$$

MA ALLORA, ESSENDO $\frac{b^x}{x} \geq \frac{b^{[x]}}{[x]+1}$,

PRENDO n_0 TALE CHE $\frac{b^n}{n+1} > M$ PER $n > n_0$

E TROVO $\frac{b^x}{x} \geq \frac{b^{[x]}}{[x]+1} > M$ PER $x \in (n_0 + 1, +\infty)$. DUNQUE $\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty$.

DA QUI, PRESO $\alpha \in \mathbb{R}^+$, SI RICAVA

$$\frac{b^x}{x^\alpha} = \left(\frac{b^{\frac{x}{\alpha}}}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{c^x}{x}\right)^\alpha \text{ CON } c = b^{\frac{1}{\alpha}} > 1$$

QUINDI $\frac{c^x}{x} \to +\infty$ DUNQUE $\frac{c^x}{x} > M$ E $\left(\frac{c^x}{x}\right)^\alpha > M^\alpha$ PER $x \in (x_0, +\infty)$.

IN CONCLUSIONE $\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty$

COMUNQUE SI PRENDANO $b \in (1, +\infty)$ E $\alpha \in \mathbb{R}$ (SE $\alpha \in \mathbb{R}^-$ OTTENGO $x^{|\alpha|} \cdot b^x$).

GI 11 NOV 2021

VE 12 NOV 2021

TEOREMI SUI LIMITI

OPERAZIONI: SE $f, g : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO $\substack{SUP \\ INF}$ERIORMENTE SODDISFANO $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ E $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, ALLORA:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \ell_1 \pm \ell_2 ;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) g(x) = \ell_1 \ell_2 ;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \text{ SE } \ell_2 \neq 0;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x))^{g(x)} = \ell_1^{\ell_2} \text{ SE } \ell_1 > 0.$$

LA TESI SI DIMOSTRA COI RAGIONAMENTI GIÀ USATI IN PRECEDENZA.

ESERCIZIO: SVOLGERE TALE DIMOSTRAZIONE.

PERMANENZA DEL SEGNO: SE $f : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO $\substack{SUP \\ INF}$ERIORMENTE SODDISFA $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^+$ ALLORA ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) > 0$ PER OGNI $x \in \substack{(x_0, +\infty) \\ (-\infty, x_0)}$ ANZI, SI PUÒ PRENDERE x_0 IN MODO TALE CHE RISULTI $f(x) > \frac{\ell}{2} > 0$.

LA TESI VALE ANCHE SE $f \to +\infty$.

ESERCIZIO: SVOLGERE LA DIMOSTRAZIONE.

TEOREMA DEL CONFRONTO: DATE $f, g : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO $\substack{SUP \\ INF}$ERIORMENTE E SODDISFACENTI $f(x) \leq g(x)$ PER OGNI $x \in S$. SE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ ALLORA $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE: PRESO $M \in \mathbb{R}$, PER IPOTESI ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) > M$ PER OGNI $x \in S \cap \substack{(x_0, +\infty) \\ (-\infty, x_0)}$. MA ALLORA $g(x) \geq f(x) > M$ E LA TESI SEGUE.

TEOREMA DEL CONFRONTO: DATE $f, g, h : S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO $\substack{SUP \\ INF}$ERIORMENTE, SODDISFACENTI $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ PER OGNI $x \in S$, SE $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, ALLORA $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \ell$.

DIMOSTRAZIONE: È UN ESERCIZIO ADATTARE IL RAGIONAMENTO GIÀ FATTO PER LE SUCCESSIONI.

GI 11 NOV 2021

RICERCA DEGLI EVENTUALI ASINTOTI DI UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE / INFERIORMENTE

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ f ABBIA UN ASINTOTO È CHE IL LIMITE $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ ESISTA FINITO.

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE ESISTANO $m, q \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$f(x) - (mx + q) =: g(x) \longrightarrow 0.$$

ALLORA $\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x) + q}{x} + m \longrightarrow m.$

APPLICAZIONI: POSTO $f(x) = x^2$ TROVIAMO $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$: LA PARABOLA NON HA ASINTOTI.

SAPPIAMO CHE $f(x) = e^x$ HA UN ASINTOTO PER $x \to -\infty$. SAPPIAMO ANCHE CHE $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, QUINDI NON HA ASINTOTI PER $x \to +\infty$.

POSTO $f(x) = \sqrt{x}$ TROVIAMO $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} \longrightarrow 0$ QUINDI LA CONDIZIONE NECESSARIA È SODDISFATTA. STESSA CONCLUSIONE PER $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \to 0$ PER $x \to \pm\infty$. IDEM CON

$$\frac{\log x}{x} = \frac{t}{e^t} < \varepsilon \text{ PER } t \in (t_0, +\infty)$$

CIOÈ PER $x \in (e^{t_0}, +\infty)$, DUNQUE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0.$$

CON L'OCCASIONE, OSSERVIAMO CHE SE $\alpha \in \mathbb{R}^+$ SI HA $\frac{\log x}{x^\alpha} = \frac{\log t^{1/\alpha}}{t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\log t}{t} < \varepsilon$ PER $t \in (t_0, +\infty)$, CON $t_0 > 0$ OPPORTUNO, E DUNQUE PER $x \in (t_0^{1/\alpha}, +\infty)$. IN CONCLUSIONE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \text{ SE } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

NE SEGUE CHE $\frac{(\log x)^\gamma}{x} = \left(\frac{\log x}{x^{1/\gamma}}\right)^\gamma = \left(\frac{\log x}{x^\alpha}\right)^\gamma \longrightarrow 0.$

AVENDO POSTO $\alpha = \frac{1}{\gamma} > 0$.

TORNANDO AGLI ASINTOTI, AMMETTIAMO CHE $\frac{f(x)}{x} \to m \in \mathbb{R}$. ALLORA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ f ABBIA UN ASINTOTO È CHE ESISTA FINITO IL $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.

IN TAL CASO, INDICATO CON q TALE LIMITE, L'ASINTOTO È $y(x) = mx + q$.

DIMOSTRAZIONE: LA CONDIZIONE È NECESSARIA PERCHÉ SE $f(x) - (mx + q) = g(x) \to 0$ ALLORA $f(x) - mx = g(x) + q \longrightarrow q$.

LA CONDIZIONE È SUFFICIENTE PERCHÉ, POSTO $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ E $q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$ SI TROVA $f(x) - (mx + q) = (f(x) - mx) - q \longrightarrow 0.$

VE 12 NOV 2021

VEDIAMO SE LE FUNZIONI $\sqrt{x}$, $\operatorname{sen} x$, $\log x$ HANNO ASINTOTI ALL'INFINITO

1) PER LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{x}$ PONIAMO $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ E STUDIAMO IL LIMITE $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - mx) =$

$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. CONCLUDIAMO CHE $f(x) = \sqrt{x}$ NON HA ASINTOTI A $+\infty$.

2) POSTO $f(x) = \operatorname{sen} x$ ABBIAMO TROVATO $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

STUDIAMO ALLORA IL $\lim_{x \to \pm\infty} (\operatorname{sen} x - mx)$

$= \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sen} x$. POICHÉ $\operatorname{sen} x$ NON HA LIMITE PER $x \to \pm\infty$, ANCHE QUESTA FUNZIONE NON HA ASINTOTI ALL'INFINITO.

3) POSTO $f(x) = \log x$, SAPPIAMO CHE $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. STUDIAMO IL LIMITE $\lim_{x \to +\infty} (\log x - mx) =$

$= \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ E CONCLUDIAMO CHE NEANCHE QUESTA FUNZIONE HA ASINTOTI ALL'INFINITO.

OSSERVAZIONI: 1) $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$ PERCHÉ PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ RISULTA $\log x > M$ PER $x \in (e^M, +\infty)$.

2) SE $\beta \in (-\infty, 0]$ ALLORA $\frac{\log x}{x^\beta} =$

$= x^{|\beta|} \log x \geq \log x$ PER $x \geq 1$

QUINDI $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^\beta} = +\infty$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO.

3) LA FUNZIONE $f(x) = \operatorname{sen} x$ NON AMMETTE LIMITE ALL'INFINITO. DIMOSTRAZIONE N. 1: ESSENDO LIMITATA, $f(x)$ NON DIVERGE A $\pm\infty$. SE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ALLORA PRENDO $\varepsilon = 1$ E HO CHE $|\operatorname{sen} x - \ell| < 1$ IN $(x_0, +\infty)$.

MA ALLORA PER OGNI $x, y \in (x_0, +\infty)$ TROVO CHE $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| =$

$= |\operatorname{sen} x - \ell + \ell - \operatorname{sen} y| \leq$

$\leq |\operatorname{sen} x - \ell| + |\operatorname{sen} y - \ell| < 2$

MA QUESTO NON È VERO PERCHÉ SE PRENDO $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ E $y_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, HO CHE $x_k, y_k \in (x_0, +\infty)$ DEFINITIVAMENTE MA $\operatorname{sen} x_k = 1$, $\operatorname{sen} y_k = -1$

QUINDI $\operatorname{sen} x_k - \operatorname{sen} y_k = 2$, IN CONTRASTO CON QUANTO SOPRA.

VE 12 NOV 2021

LA FUNZIONE $f(x) = \operatorname{sen} x$ NON HA LIMITE PER $x \to \pm\infty$. DIMOSTRAZIONE N. 2. CI BASIAMO SUL LEMMA 1b: SE $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ ALLORA PER OGNI SUCCESSIONE A TERMINI $a_n \in S$, DOMINIO DI f, TALE CHE $a_n \to \pm\infty$, RISULTA $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$. USANDO QUESTO LEMMA, SE FOSSE $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = L$ ALLORA, POICHÉ $a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \longrightarrow +\infty$ E $b_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \longrightarrow +\infty$, DOVREI AVERE $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} a_n = 1 = L = $ $= \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen} b_n = -1$, IL CHE È IMPOSSIBILE.

DIMOSTRIAMO IL LEMMA 1b. SUPPONIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ E PRENDIAMO $a_n \in S$ TALE CHE $a_n \to +\infty$. VOGLIAMO VERIFICARE CHE $f(a_n) \to \ell$. PRESO $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ESISTE PER IPOTESI x_0 TALE CHE $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0, +\infty)$. USO $M = x_0$ NELLA DEFINIZIONE DI $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ ED HO L'ESISTENZA DI n_0 TALE CHE $a_n \in (x_0, +\infty)$ PER $n > n_0$. DUNQUE PER $n > n_0$ SI HA $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

LEMMA 2b: DATA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUP/INF ERIORMENTE, SE PER OGNI SUCCESSIONE DI $a_n \in S$ TALE CHE $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ TROVO CHE $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$ (SEMPRE LO STESSO, PER OGNI (a_n)) ALLORA $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.

LA DIMOSTRAZIONE È SIMILE A QUELLA DEL LEMMA 2.

COROLLARIO («TEOREMA PONTE») RISULTA CHE $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ SE E E SOLO SE $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = L$ PER OGNI $a_n \to \pm\infty$.

TIPICI ESEMPI DI FUNZIONI CON ASINTOTI ALL'INFINITO (IPERBOLI)

$$f(y)=\sqrt{y^2+1}, \quad g(x)=\sqrt{x^2-1}$$

RICERCHIAMO GLI ASINTOTI ALL'INFINITO DELLA FUNZIONE PARI $f(y)$, AVENTE PER DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$. BASTA CONSIDERARE $y\to+\infty$. CONDIZIONE NECESSARIA:

$$m=\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}=\lim_{y\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}=1$$

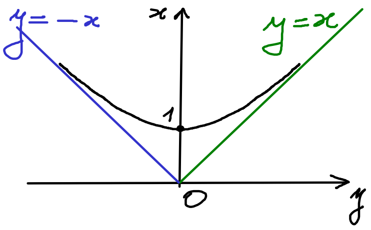
CONDIZIONE NECESSARA E SUFFICIENTE: OSSERVIAMO CHE PER OGNI $x\in\mathbb{R}$

$$\left(\sqrt{x^2\pm1}-x\right)\left(\sqrt{x^2\pm1}+x\right)=\pm1$$

QUINDI $f(y)-my=\sqrt{y^2+1}-y=$

$$=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}<\frac{1}{y}\longrightarrow 0 \quad \text{QUINDI}$$

$q=0$ E L'ASINTOTO È $x(y)=y$.



$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=$
$=|x|$ PER OGNI x

AD ULTERIORE RIPROVA DI QUANTO SOPRA, CONSIDERIAMO ADESSO $y\to-\infty$. SI TROVA $\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}=\frac{\sqrt{y^2+1}}{-\sqrt{y^2}}$ PER $y<0$

QUINDI $\lim_{y\to-\infty}\frac{f(y)}{y}=-\lim_{y\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}=-1.$

OSSERVAZIONE: SIMILMENTE A QUANTO GIÀ VISTO IL 04/11 A PROPOSITO DELLA FUNZIONE A GRADINO, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE RISULTA $f(x)=g(x)$ IN UN INTERVALLO I ILLIMITATO SUP/INFERIORMENTE, E SE $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=L$, FINITO O INFINITO, ALLORA $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=L$.

ASINTOTI DELLA FUNZIONE $g(x)=\sqrt{x^2-1}$, CHE È PARI ED HA PER DOMINIO L'INSIEME

$$S=\mathbb{R}\setminus(-1,1)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

OSSERVIAMO CHE $\frac{g(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=$

$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}$ PER OGNI $x\in[1,+\infty)$,

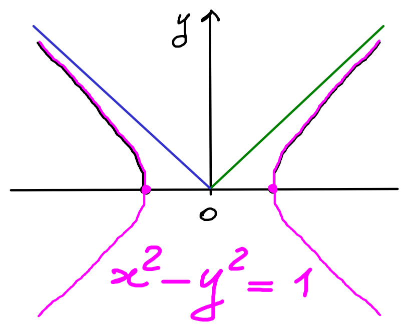
QUINDI $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

$=1=:m$. PER PROSEGUIRE, SCRIVIAMO

$$g(x)-mx=\sqrt{x^2-1}-x=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0 \quad \text{QUINDI}$$

LA FUNZIONE $g(x)$ HA UN ASINTOTO A $+\infty$: LA RETTA $y=x$, E, PER PARITÀ, ANCHE UN ASINTOTO A $-\infty$: LA RETTA $y=-x$.



$\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2}=$
$=|x|$ PER OGNI $x\in S$

GI 18 NOV 2021

OSSERVAZIONE: SICCOME RISULTA

$$g(\pm 1)=\sqrt{(\pm 1)^2-1}=0\le g(x)$$

PER OGNI $x\in S$, POSSIAMO SCRIVERE $\min\limits_{x\in S} g(x)=0$ ED I PUNTI $x_1=1$ E $x_0=-1$ SONO I DUE PUNTI DI MINIMO (NON CE NE SONO ALTRI PERCHÉ $g(x)>0$ PER $x\neq\pm 1$)

OSSERVAZIONE: LA RESTRIZIONE DELLA FUNZIONE g ALL'INTERVALLO $[1,+\infty)$ È INVERTIBILE, E LA SUA INVERSA È LA FUNZIONE $x=f(y)$ PER $y\in[0,+\infty)$.

COME LO SO?

OSSERVAZIONE: PER OGNI $t\in\mathbb{R}$ SAPPIAMO CHE $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ (02/11) DUNQUE IL PUNTO $P=(\cosh t,\ \sinh t)$ GIACE SULL'IPERBOLE DI EQUAZIONE $x^2-y^2=1$.

LA PORZIONE CON $y\ge 0$ AMMETTE LA RAPPRESENTAZIONE $y=\sqrt{x^2-1}$

ASINTOTI VERTICALI

CONSIDERIAMO UNA $f:S\to\mathbb{R}$ ED UN PUNTO $x_0\in\mathbb{R}$ TALE CHE

$$S\cap\begin{matrix}(x_0,\ x_0+\delta)\\(x_0-\delta,\ x_0)\end{matrix}\neq\emptyset$$

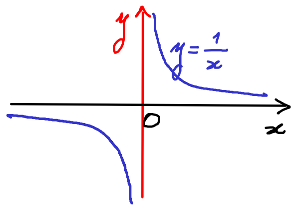
PER OGNI $\delta\in\mathbb{R}^+$. SE PER OGNI $M\in\mathbb{R}$ ESISTE $\delta\in\mathbb{R}^+$ TALE CHE $f(x)\gtrless M$ PER OGNI $x\in S\cap\begin{matrix}(x_0,\ x_0+\delta)\\(x_0-\delta,\ x_0)\end{matrix}$, SI SCRIVE

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\pm\infty$$

E SI DICE CHE LA RETTA $x=x_0$ È UN ASINTOTO VERTICALE.

ESEMPI TIPICI

$f(x)=\frac{1}{x}$ HA UN ASINTOTO VERTICALE, CHE È LA RETTA $x=0$, IN QUANTO



$$\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{1}{x}=\pm\infty$$

OSSERVAZIONE: SE f È PARI, E SE $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=L$, ALLORA $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=L$. SE, INVECE, f È DISPARI, ALLORA $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-L$.

COME SI DIMOSTRA?

VERIFICHIAMO CHE $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

IL DOMINIO DI $f(x)=\frac{1}{x}$ È $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

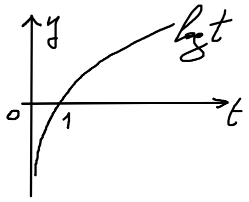
QUINDI $S\cap(0,\delta)=(0,\delta)\neq\emptyset$

PER OGNI $\delta\in\mathbb{R}^+$. PER OGNI $M\in\mathbb{R}^+$

RISULTA $\frac{1}{x} > M$ PRENDENDO $x\in(0,\delta)$

CON $\delta=\frac{1}{M}$.

VERIFICHIAMO CHE $\lim_{t\to 0^+}\log t = -\infty$



POSTO $x=\frac{1}{t}>0$, SI TROVA $\log t = \log\frac{1}{x} =$

$= -\log x < M\in\mathbb{R}$ PER $x\in(x_0,+\infty)$, $x_0>0$

(VENERDÌ 12/11). QUINDI $\log t < M$

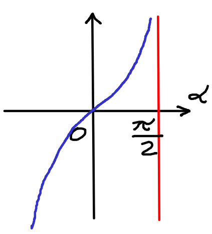
PER $t\in(0,\delta)$ CON $\delta=\frac{1}{x_0}$.

PONENDO, INVECE, $t=e^x$, SI TROVA

$\log t = x < M < 0$ PER $x\in(-\infty, M)$

E CIOÈ PER $t\in(0,\delta)$ CON $\delta=e^M$.

VERIFICHIAMO CHE $\lim_{\alpha\to(\frac{\pi}{2})^-}\operatorname{tg}\alpha=+\infty$



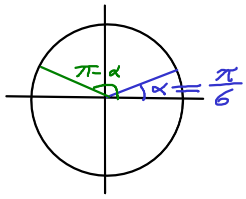
SAPPIAMO CHE $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ E CHE $\operatorname{sen}\alpha$

È CONTINUA, QUINDI (PERMANENZA DEL SEGNO) DA $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$ SEGUE $\operatorname{sen}\alpha>\frac{1}{2}$

IN UN INTORNO $\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$.

DALLA DEFINIZIONE DI $\operatorname{sen}\alpha$ SEGUE

CHE $\operatorname{sen}\alpha>\frac{1}{2}$ PER $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right) =$



$=\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$

CON $\varepsilon=\frac{\pi}{3}$

D'ALTRO CANTO,

$0<\cos\alpha=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\le\frac{\pi}{2}-\alpha$

PER $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, E QUINDI

$\frac{1}{\cos\alpha}\ge\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ DA CUI

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}>\frac{1/2}{\frac{\pi}{2}-\alpha}>M>0$

QUANDO $\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{1}{2M}$ E CIOÈ

PER $\alpha>\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2M}$. IN CONCLUSIONE, PRESO $M\in\mathbb{R}^+$ DETERMINO

$\delta=\min\left\{\frac{1}{2M},\frac{\pi}{3}\right\}$ E RISULTA

$\operatorname{tg}\alpha>M$ PER $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}-\delta,\frac{\pi}{2}\right)$.

DEFINIZIONE: SE $S\cap(x_0,x_0+\delta)\neq\emptyset$ PER OGNI δ, E $S\cap(x_0-\delta,x_0)\neq\emptyset$ PER OGNI δ, SE RISULTA

$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$

SI SCRIVE $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$. IDEM

SE $S\cap(x_0,x_0+\delta_0)=\emptyset$ PER UN δ_0

VE 19 NOV 2021

LIMITE FINITO PER $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

1) SE $S \cap \begin{matrix}(x_0, x_0+\delta) \\ (x_0-\delta, x_0)\end{matrix} \neq \emptyset$ PER OGNI $\delta \in \mathbb{R}^+$, E SE ESISTE $\ell \in \mathbb{R}$ TALE CHE PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ESISTE $\delta \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ PER OGNI $x \in S \cap \begin{matrix}(x_0, x_0+\delta) \\ (x_0-\delta, x_0)\end{matrix}$, SI SCRIVE

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \ell \quad \text{OPPURE} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^\pm]{} \ell$$

2) SE $S \cap (x_0, x_0+\delta) \neq \emptyset$ E $S \cap (x_0-\delta, x_0) \neq \emptyset$ PER OGNI $\delta \in \mathbb{R}^+$, E SE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, SI SCRIVE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

OSSERVAZIONE: LA CONDIZIONE $x_0 \in S$ OPPURE $x_0 \notin S$ NON INTERVIENE IN ALCUN MODO, E A FORTIORI $f(x_0)$.

ESEMPIO: $\lim_{t \to 0^+} t^\alpha \log t = 0$ PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}^+$. INFATTI, POSTO $x = \frac{1}{t} > 0$, SI HA $t^\alpha \log t = \frac{\log \frac{1}{x}}{x^\alpha} = -\frac{\log x}{x^\alpha} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ PER $x \in (x_0, +\infty)$ CON UN $x_0 > 0$ (GIOVEDÌ 11/11), DUNQUE PER $t \in (0, \delta)$ CON $\delta = \frac{1}{x_0}$.

FORMULAZIONE DELLA CONTINUITÀ MEDIANTE I LIMITI (« LA MADRE DI TUTTI GLI ERRORI »)

CONSIDERIAMO UNA $f : S \to \mathbb{R}$ ED UN PUNTO $x_0 \in S \cap DS$, DOVE DS (IL DERIVATO DI S) È L'INSIEME DEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE.

f È CONTINUA IN x_0 SE E SOLO SE

$$\boxed{f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)}$$

ATTENZIONE: LE FUNZIONI PIÙ USATE SONO CONTINUE IN OGNI PUNTO $x_0 \in S$ E INOLTRE $S \subset DS$ QUINDI VALE L'UGUAGLIANZA DI CUI SOPRA, CHE IN GENERALE NON SUSSISTE!

INOLTRE, L'UGUAGLIANZA $\lim_{\alpha \to 0} \operatorname{sen} \alpha = 0$ NON DERIVA DA $\operatorname{sen} 0 = 0$, NON È « OVVIA ». STESSO PER $\lim_{x \to 0} e^x = 1$: NON È « OVVIO » E NON DERIVA DA $e^0 = 1$.

VE 19 NOV 2021

CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ

CONSIDERIAMO $f: S \to \mathbb{R}$ ED UN $x_0 \in S \cap DS$. f RISULTA DISCONTINUA SE:

1) ESISTONO FINITI $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ E $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ E SONO DIVERSI, COME PER LA FUNZIONE $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$

IN QUESTO CASO $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ E $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. SI DEFINISCE « SALTO DELLA FUNZIONE f » NEL PUNTO x_0 LA DIFFERENZA FRA I DUE LIMITI.

TEOREMA: SE f È MONOTONA, O È CONTINUA O HA DEI SALTI.

DIMOSTRAZIONE: I LIMITI DESTRO E SINISTRO ESISTONO FINITI (SE $S \cap (x_0, x_0+\delta) \neq \emptyset$ E $S \cap (x_0-\delta, x_0) \neq \emptyset$ PER OGNI δ) PER LA MONOTONIA DI f. IN PARTICOLARE, SE f È CRESCENTE,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) \in [f(x_0), +\infty)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \in (-\infty, f(x_0)].$$

CFR. LEZ. 03/11.

2) UNO DEI DUE LIMITI $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$ È INFINITO O NON ESISTE

3) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

TEOREMI SUI LIMITI PER $x \to x_0$

CON LE TECNICHE ORMAI FAMILIARI, SI DIMOSTRA CHE, SE $f \xrightarrow[x \to x_0]{} l_1 \in \mathbb{R}$ E $g \xrightarrow[x \to x_0]{} l_2 \in \mathbb{R}$, ALLORA:

1) $f \pm g \xrightarrow[x \to x_0]{} l_1 \pm l_2$;

2) $fg \xrightarrow[x \to x_0]{} l_1 l_2$;

3) $f/g \xrightarrow[x \to x_0]{} l_1/l_2$ SE $l_2 \neq 0$;

4) $f^g \xrightarrow[x \to x_0]{} l_1^{l_2}$ SE $l_1 > 0$. IN PARTICOLARE RISULTA $f(x) > \frac{l_1}{2} > 0$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$, CON ε OPPORTUNO (PERMANENZA DEL SEGNO).

CONCLUSIONE SIMILE SE $f \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$.

CONFRONTO: SE $f(x) \geq g(x)$ IN $S \cap \substack{(x_0,\, x_0+\delta) \\ (x_0-\delta,\, x_0)}$ E $\lim_{x \to x_0^\pm} g(x) = +\infty$ ALLORA $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = +\infty$

SE, INVECE, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ IN $S \cap \substack{(x_0,\, x_0+\delta) \\ (x_0-\delta,\, x_0)}$, E SE $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \lim_{x \to x_0^\pm} h(x)$, ALLORA $\lim_{x \to x_0^\pm} g(x) = \lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$.

LU 22 NOV 2021

SFONDIAMO UNA PORTA APERTA: LA DEFINIZIONE DEL $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, FINITO O INFINITO, NON PUÒ ESSERE SODDISFATTA CON DUE L DIVERSI (TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE).

DIMOSTRAZIONE. SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ALLORA PRENDO $\varepsilon = 1$ E TROVO CHE

$$\ell - 1 < f(x) < \ell + 1$$

PER OGNI $x \in S \cap (x_0 - z, x_0 + z) \setminus \{x_0\}$, QUINDI f È IVI LIMITATA E NON TENDE A $\pm\infty$. INOLTRE PER OGNI $\ell' \in \mathbb{R} \setminus \{\ell\}$ PRENDO $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2}$,

OSSERVO CHE $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \cap (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon) = \emptyset$ E $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0 - z, x_0 + z) \setminus \{x_0\}$ MA ALLORA $f(x) \notin S \cap (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon)$ QUINDI, PER OGNI $\delta \in \mathbb{R}$ ESISTONO PUNTI $x \in S \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ PER I QUALI $f(x) \notin S \cap (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon)$ DUNQUE $f \not\to \ell'$.

SE, INFINE, $f(x) \longrightarrow +\infty$ ALLORA ESISTONO $m \in \mathbb{R}$ E $z \in \mathbb{R}^+$ TALI CHE $f(x) \geq m$ PER OGNI $x \in S \cap (x_0 - z, x_0 + z)$ MA ALLORA NON È VERO CHE $f(x) < m$ IN UN QUALCHE $S \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ QUINDI $f \not\to -\infty$.

NOZIONI TOPOLOGICHE

PUNTO INTERNO:

SI DICE CHE $x_0 \in \mathbb{R}$ È INTERNO AD UN INSIEME $S \subset \mathbb{R}$ SE ESISTE $\delta \in \mathbb{R}^+$ TALE $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset S$. LA SOLA APPARTENENZA $x_0 \in S$ È NECESSARIA, MA NON BASTA PER CHIAMARE x_0 INTERNO. ESEMPIO: IL PUNTO $x_0 = 0$ APPARTIENE ALLA SEMIRETTA $[0, +\infty)$ MA NON È INTERNO, APPARTIENE ALL'INSIEME $\mathbb{N}$ MA NON È INTERNO, APPARTIENE ALL'INTERVALLO $[-1, 1]$ ED È ANCHE INTERNO.

PUNTO ESTERNO

SI DICE CHE $x_0 \in \mathbb{R}$ È ESTERNO AD UN INSIEME S SE ESISTE $\delta \in \mathbb{R}^+$ TALE CHE $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus S$. LA SOLA RELAZIONE $x_0 \notin S$ È NECESSARIA MA NON BASTA PER CHIAMARE x_0 ESTERNO.

PUNTI DI FRONTIERA: I PUNTI $x \in S$ CHE NON SONO INTERNI SI DICONO PUNTI DI FRONTIERA. NON ESSERE $x_0 \in S$ UN PUNTO INTERNO SIGNIFICA CHE PER OGNI $\delta \in \mathbb{R}^+$ RISULTA $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \not\subset S$ E CIOÈ $(\mathbb{R} \setminus S) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \neq \emptyset$ QUINDI $x_0 \in S$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $\mathbb{R} \setminus S$. ANCHE I PUNTI $x \notin S$ E CHE NON SONO ESTERNI VANNO A COSTITUIRE LA FRONTIERA DI S CHE OGGI SI INDICA CON ∂S. IN SINTESI, LA FRONTIERA ∂S È COSTITUITA DAGLI $x \in \mathbb{R}$ CHE NON SONO NÉ INTERNI NÉ ESTERNI.

LU 22 NOV 2021

ESEMPI: IL PUNTO $x_0 = 0 \in [0, +\infty)$ È UN PUNTO DI FRONTIERA, COME PURE $x_0 = 0 \in \mathbb{N}$. IL PUNTO $x_0 = 0$ NON APPARTIENE ALL'INTERVALLO $(0,1)$ E NON È ESTERNO, DUNQUE È UN PUNTO DI FRONTIERA.

ALCUNE FRONTIERE:

$$\partial [0, +\infty) = \{0\}$$

$$\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

$$\partial [-1, 1] = \{-1, 1\}$$

$$\partial (0,1) = \{0, 1\}$$

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

INSIEMI APERTI

UN $S \subset \mathbb{R}$ SI DICE APERTO SE OGNI EVENTUALE PUNTO DI S È INTERNO, COME AD ESEMPIO L'INTERVALLO $(0,1)$ E ANCHE L'INSIEME VUOTO $\emptyset$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE OGNI APERTO $S \neq \emptyset$ AMMETTE LA RAPPRESENTAZIONE $S = \bigcup_{n \in N} (a_n, b_n)$ DOVE L'INSIEME $N \subset \mathbb{N}$ HA CARDINALITÀ FINITA O NUMERABILE. ESEMPI: IL DOMINIO DI $f(x) = \frac{1}{x}$ È L'APERTO $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ E $(0, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0, n)$; IL DOMINIO DI $\operatorname{tg} x$ È $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

INSIEMI CHIUSI: UN INSIEME $S \subset \mathbb{R}$ SI DICE CHIUSO SE L'INSIEME $\mathbb{R} \setminus S$ È APERTO. ESEMPI: $\mathbb{R}$ È CHIUSO PERCHÈ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ È APERTO ($\mathbb{R}$ È APERTO). $\emptyset$ È CHIUSO PERCHÉ $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ È APERTO. L'INTERVALLO $[a, b] = \mathbb{R} \setminus \left((-\infty, a) \cup (b, +\infty)\right)$ SODDISFA LA DEFINIZIONE DI INSIEME CHIUSO.

CARATTERIZZAZIONI EQUIVALENTI DELLA CONDIZIONE DI INSIEME CHIUSO:

1) $\partial S \subset S \iff S$ È CHIUSO

2) $\mathcal{D}S \subset S \iff S$ È CHIUSO

A) SE S NON È CHIUSO, $\mathbb{R} \setminus S \neq \emptyset$ NON È APERTO, QUINDI ESISTE $x_0 \in \mathbb{R} \setminus S$ CHE NON È INTERNO, DUNQUE $x_0 \in \mathcal{D}S$ QUINDI $\mathcal{D}S \not\subset S$ E $\partial S \not\subset S$

B) ESERCIZIO

LA COMPATTEZZA PER SUCCESSIONI

SI DICE CHE UN $S \subset \mathbb{R}$ È COMPATTO PER SUCCESSIONI SE OGNI SUCCESSIONE DI $a_n \in S$ HA ALMENO UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE AD UN $l \in S$

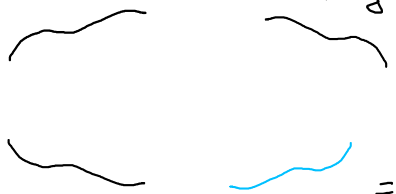
ESEMPIO: $(0,1)$ NON È COMPATTO PERCHÉ $(0,1) \ni \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \notin (0,1)$

ESEMPIO: $[0,+\infty)$ NON È COMPATTO PERCHÉ $a_n = n \longrightarrow +\infty$ LA LIMITATEZZA È CONDIZIONE NECESSARIA. ANCHE LA CHIUSURA È NECESSARIA: SE S NON È CHIUSO, PRENDO $x_0 \in \partial S \setminus S$ E DI CONSEGUENZA $a_n \to x_0 \notin S$.

SI PUÒ DIMOSTRARE IL VICEVERSA: GLI INSIEMI S CHIUSI E LIMITATI SONO COMPATTI PER SUCCESSIONI (TEOREMA DI HEINE-BOREL) PRENDO $a_n \in S$, RICAVO a_{n_k} MONOTONA, DUNQUE CONVERGENTE AD $l \in \mathbb{R}$ IL QUALE APPARTIENE AD S OPPURE A $\partial S \subset S$.

Appendice: operazioni sui grafici e applicazioni lineari

$(x,y) \longmapsto (-x,y)$



$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$$

$(x,y) \longmapsto (x,-y)$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$$

$(x,y) \longmapsto (x,-y) \longmapsto (-x,-y)$

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$$

FUNZIONE INVERSA: $(x,y) \longmapsto (y,x)$