Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Le più semplici funzioni di una variabile reale

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

GI 21 OTT 2021

LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE REALE PIÙ COMUNEMENTE UTILIZZATE

IN PARTICOLARE:

POTENZE x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$

ESPONENZIALI b^x, $b \in \mathbb{R}^+$

LOGARITMI $\log_b x$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

LE FUNZIONI CIRCOLARI $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ E LE LORO INVERSE

LE FUNZIONI IPERBOLICHE

FUNZIONI POTENZA: $f(x) = x^\alpha$

① SE $\alpha \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ SI DEFINISCE $x^\alpha = x \cdots x$ α VOLTE, E IL DOMINIO DI $f(x) = x^\alpha$ È L'INSIEME $\mathbb{R}$ DEI NUMERI REALI.

② SI DEFINISCE $x^0 = 1$ PER $x \in \mathbb{R}$.

③ SE $\beta \in \mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ SI DEFINISCE $x^\beta := \dfrac{1}{x^{|\beta|}}$ ESSENDO $x^{|\beta|}$ DEFINITA AL PUNTO ① E $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

④ LA DEFINIZIONE DI $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$ CON $n \in \mathbb{Z}^+$ DIPENDE DALLA PARITÀ DI n:

SE n È PARI, SI DIMOSTRA CHE PER OGNI $x \in [0, +\infty)$ ESISTE UN UNICO $y \in [0, +\infty)$ TALE CHE $y^n = x$ E SI DEFINISCE $\sqrt[n]{x} := y$

L'ESISTENZA E L'UNICITÀ DI UN TALE y SEGUONO DAL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (PROSSIME LEZIONI).

SIMILMENTE, PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ ESISTE UN UNICO $y \in \mathbb{R}$ TALE CHE $y^{2k+1} = x$ (QUI $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$) E SI DEFINISCE $\sqrt[2k+1]{x} := y$.

⑤ SE $n \in \mathbb{Z}^+$ SI DEFINISCE $x^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$

PER $x \in (0, +\infty)$ SE n È PARI, E PER $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ SE n È DISPARI

⑥ LA POTENZA x^α CON $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ SI DEFINISCE SCRIVENDO INNANZITUTTO $\alpha = \dfrac{n}{k}$ CON $n, k \in \mathbb{Z}^+$ E PONENDO $x^\alpha := \sqrt[k]{x^n}$ PER $x \in [0, +\infty)$

⑦ SE $\alpha \in \mathbb{Q}^-$ SI DEFINISCE $x^\alpha = \dfrac{1}{x^{|\alpha|}}$ DOVE $x^{|\alpha|}$ È COME IN ⑥, SUL DOMINIO $(0, +\infty)$.

⑧ SE, INFINE, PRENDIAMO $\alpha \in \mathbb{R}$, ESISTE UNA SUCCESSIONE DI NUMERI $s_n \in \mathbb{Q}$ TALI CHE $\lim_{n \to +\infty} s_n = \alpha$. MA ALLORA, PER OGNI $x \in (0, +\infty)$ SI DEFINISCE $x^\alpha = \lim_{n \to +\infty} x^{s_n}$ DOVE LE POTENZE x^{s_n} SONO DEFINITE COME IN ⑥ E ⑦.

 GI 21 OTT 2021

DOMANDA: MA SE $\beta = \mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$, POSSIAMO SCRIVERE $x^\beta = \dfrac{1}{x^\beta}$? PER QUALI x?

INNANZITUTTO, DEV'ESSERE $x \neq 0$

SE NO $x^\beta = 0$ E NON PUÒ STARE AL DENOMINATORE. SE $x \neq 0$ SODDISFA L'UGUAGLIANZA, ALLORA

$$x^\beta \cdot x^\beta = x^\beta \cdot \frac{1}{x^\beta} = 1$$

CIOÈ $x^{2\beta} = 1$ E $2\beta \in \{-2, -4, \dots\}$

LE CUI SOLUZIONI SONO $x = \pm 1$.

VOLTIAMOCI INDIETRO: PONIAMO $\beta = -1$ E $x = 2$, E SCRIVIAMO SEPARATAMENTE

$$x^\beta = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

E $$\frac{1}{x^\beta} = \frac{1}{2^{-1}} = 2 \neq \frac{1}{2}.$$

SI HA, INVECE, $x^{-1} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^{|-1|}}$

$$\boxed{\text{LA PARITÀ E LA DISPARITÀ DI UNA FUNZIONE } f \text{ AVENTE PER DOMINIO UN SOTTOINSIEME } S \subset \mathbb{R}}$$

È NECESSARIO, INNANZITUTTO, CHE IL DOMINIO S SIA SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE, CIOÈ CHE RISULTI

$x \in S$ SE E SOLO SE $-x \in S$

SONO SIMMETRICI: $\mathbb{R}$, $(-1,1)$, E L'INSIEME $S = (-2,-1) \cup (1,2)$.

IN TAL CASO, UNA FUNZIONE $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ SI DICE PARI SE RISULTA

$f(x) = f(-x)$ PER OGNI $x \in S$

IL CHE EQUIVALE A DIRE CHE IL GRAFICO $\Gamma = \{(x,y) : x \in S, \ y = f(x)\}$

È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE y, CIOÈ RISULTA $P = (x,y) \in \Gamma$ SE E SOLO SE $P' = (-x,y) \in \Gamma$.

ESEMPI: $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

SI DICE, INVECE, CHE $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ È DISPARI SE RISULTA $f(x) = -f(-x)$ PER OGNI $x \in S$ (SI PUÒ, A PIACERE, SCRIVERE $f(-x) = -f(x)$) E CIÒ EQUIVALE A DIRE CHE IL GRAFICO Γ È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ORIGINE, CIOÈ RISULTA $P = (x,y) \in \Gamma$ SE E SOLO SE $Q = (-x,-y) \in \Gamma$.

VE 22 OTT 2021

LA FUNZIONE ESPONENZIALE b^x SI DEFINISCE PER $x \in \mathbb{R}$ PRENDENDO $b \in \mathbb{R}^+$ PER QUANTO VISTO AL PUNTO (8)

DAL PUNTO DI VISTA QUALITATIVO, SI DISTINGUE LA FUNZIONE $f(x) = b^x$ CON $b \in (1, +\infty)$ DALLA FUNZIONE $g(x) = a^x$ CON $a \in (0,1)$.

OSSERVAZIONE: SE PRENDO $a \in (0,1)$ POSSO DEFINIRE $b = \frac{1}{a} \in (1, +\infty)$ E SCRIVERE $g(x) = a^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x} = f(-x)$

DUNQUE UN PUNTO $P = (x, y)$ APPARTIENE AL GRAFICO Γ DELLA FUNZIONE g SE E SOLO SE IL PUNTO $P' = (-x, y)$ APPARTIENE AL GRAFICO Φ (FI) DELLA FUNZIONE f.

IN ALTRI TERMINI, Γ SI OTTIENE DA Φ MEDIANTE RIFLESSIONE RISPETTO ALL'ASSE y.

NON È RESTRITTIVO, DUNQUE, CONCENTRARCI SULLA FUNZIONE $f(x) = b^x$ CON $b \in (1, +\infty)$.

OSSERVAZIONE: b^x È POSITIVA E STRETTAMENTE CRESCENTE SUL DOMINIO $(-\infty, +\infty)$.

LA MONOTONIA DELLE FUNZIONI $f: S \to \mathbb{R}$, CON $S \subset \mathbb{R}$

SI DICE CHE f È STRETTAMENTE CRESCENTE / DECRESCENTE SE PER OGNI $x_1, x_2 \in S$ CON $x_1 < x_2$ RISULTA $f(x_1) \lessgtr f(x_2)$.

LA MONOTONIA (CRESCENZA O DECRESCENZA) IN SENSO LATO SI DEFINISCE ANALOGAMENTE, SCRIVENDO $\leq$ AL POSTO DI $<$, OVVERO $\geq$ AL POSTO DI $>$.

LA POSITIVITÀ E LA STRETTA MONOTONIA DI b^x SEGUONO DAL FATTO CHE $b^x > 1$ PER $x \in (0, +\infty)$.

INFATTI SE PRENDO $x_1 < 0$ POSSO SCRIVERE $x = |x_1| > 0$ E

$$b^{x_1} = b^{-x} = \frac{1}{b^x} > 0.$$

PER VERIFICARE LA MONOTONIA, PRENDIAMO $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ CON $x_1 < x_2$ E CONFRONTIAMO b^{x_1} CON b^{x_2}: SI HA

$$b^{x_2} - b^{x_1} = b^{x_1}\left(b^{x_2 - x_1} - 1\right)$$

E LA TESI SEGUE DAL FATTO CHE $b^{x_2 - x_1} - 1 > 0$ PERCHÉ L'ESPONENTE $x = x_2 - x_1$ È POSITIVO E $b^x > 1$ PER L'IPOTESI. INOLTRE $b^{x_1} > 0$ PER IL PASSO PRECEDENTE.

VE 22 OTT 2021

VERIFICHIAMO CHE

$b^x > 1$ PER $x \in (0, +\infty)$

$\boxed{\text{I}}$ $x \in \mathbb{Q}^+$, CIOÈ $x = \frac{n}{h}$ CON $n, h \in \mathbb{Z}^+$. IN QUESTO CASO, PER DEFINIZIONE SI HA $b^x = \sqrt[k]{b^n}$. SI VEDE SUBITO CHE IL RADICANDO b^n È MAGGIORE DI 1 PERCHÉ: $b > 1$ QUINDI $b^2 > b$ (>1) COME PURE $b^3 > b^2$ (>1), ECCETERA. DICO CHE $\sqrt[k]{b^n} > 1$. INFATTI, SE FOSSE $\sqrt[k]{b^n} \le 1$ ALLORA $\sqrt[k]{b^n} \cdots \sqrt[k]{b^n} = b^n \le 1$ CONTRARIAMENTE A QUANTO SOPRA.

NE SEGUE CHE SE $S_m, S_{m+1} \in \mathbb{Q}$ SODDISFANO $S_m \le S_{m+1}$ SI HA $b^{S_m} \le b^{S_{m+1}}$.

$\boxed{\text{II}}$ PRESO $x = c_1 \ldots c_N, d_1 d_2 \ldots \in (0, +\infty)$, E POSTO $S_n = c_1 \ldots c_N, d_1 \ldots d_n$ SI HA $S_n \le S_{n+1} \longrightarrow x$ E $S_n > 0$ DEFINITIVAMENTE. PRESO $S_{n_0} > 0$ POSSIAMO SCRIVERE $b^x = \lim_{n \to +\infty} b^{S_n}$

INOLTRE $b^{S_n} \le b^{S_{n+1}}$ PER OGNI n, QUINDI $b^{S_n} \ge b^{S_{n_0}} > 1$ PER $n \ge n_0$.

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO SI TROVA $b^x = \lim_{n \to +\infty} b^{S_n} \ge b^{S_{n_0}} > 1$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

NOTA CHE $1 + \frac{1}{n} > 1$ E TENDE AD 1.

IL FATTO CHE $b^x > 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ CI DICE CHE LA FUNZIONE $f(x) = b^x$ È INFERIORMENTE LIMITATA: ESISTE INFATTI UNA COSTANTE $m \in \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) \ge m$ PER OGNI x NEL DOMINIO DELLA FUNZIONE. SI DICE CHE m È UN MINORANTE. IN VIRTÙ DELLA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$, L'INSIEME DI TUTTI I MINORANTI DI QUALUNQUE FUNZIONE, SE NON È VUOTO, HA UN ELEMENTO MASSIMO CHE SI CHIAMA ESTREMO INFERIORE DI f E SI INDICA CON $\inf f$. FA ECCEZIONE LA FUNZIONE $f: \emptyset \to \mathbb{R}$, DETTA FUNZIONE VUOTA, I CUI MINORANTI SONO TUTTI I NUMERI REALI.

SE f NON HA MINORANTI, SI PONE $\inf f = -\infty$. ANALOGAMENTE, SI CHIAMA MAGGIORANTE DI UNA FUNZIONE $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ UN QUALUNQUE $M \in \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) \le M$ PER OGNI $x \in S$. SE NE ESISTE ALMENO UNO, ALLORA NE ESISTONO INFINITI E LA FUNZIONE f SI DICE SUPERIORMENTE LIMITATA. IN TAL CASO, ECCEZION FATTA PER LA FUNZIONE VUOTA, ESISTE IL PIÙ PICCOLO MAGGIORANTE E LO SI INDICA CON $\sup f$ (ESTREMO SUPERIORE). SI DEFINISCE $\sup f = +\infty$ QUALORA f SIA ILLIMITATA SUPERIORMENTE.

 LU 25 OTT 2021

PROBLEMI:

1) QUALI FUNZIONI POTENZA:
x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$
SONO INFERIORMENTE LIMITATE? QUAL È IL LORO ESTREMO INFERIORE?

SOLUZIONE: LE FUNZIONI x^2 E $\sqrt{x}$ SONO INFERIORMENTE LIMITATE, E UN MINORANTE È $m=0$: SI HA, INFATTI, $x^2 \geq 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, E $\sqrt{x} \geq 0$ PER OGNI $x \in [0,+\infty)$.

INVECE x^3 NON È INFERIORMENTE LIMITATA PERCHÉ NON HA MINORANTI: OGNI $m \in \mathbb{R}$ NON VA BENE, CIOÈ PER OGNI $m \in \mathbb{R}$ ESISTE UN $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $x_0^3 < m$. BASTA PRENDERE, AD ESEMPIO, $x_0 = \sqrt[3]{m-1}$. IN EFFETTI, OGNI $x < \sqrt[3]{m}$ VA BENE NEL SENSO CHE $x^3 < m$. SI PUÒ SCRIVERE CHE $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE $\sqrt[3]{x}$ È ILLIMITATA INFERIORMENTE. ANZI, SI HA CHE $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE $f \to -\infty$ ALLORA È ILLIMITATA INFERIORMENTE. (COME?)

ESSENDO x^3 E $\sqrt[3]{x}$ ILLIMITATE INFERIORMENTE, SI PONE $\inf x^3 = -\infty$ E $\inf \sqrt[3]{x} = -\infty$. PER QUANTO RIGUARDA x^2, OGNI $m \in \mathbb{R}^+$ NON È UN MINORANTE PERCHÉ $x^2 < m$ PER OGNI $x \in (-\sqrt{m}, \sqrt{m})$. MA ALLORA $m=0$ È IL MINORANTE PIÙ GRANDE. DUNQUE $\inf x^2 = 0$. SIMILMENTE, OGNI $m \in \mathbb{R}^+$ NON È UN MINORANTE PER LA FUNZIONE $\sqrt{x}$ IN QUANTO RISULTA $\sqrt{x} < m$ PER OGNI $x \in [0, m^2)$.
MA ALLORA IL MINORANTE PIÙ GRANDE È $m=0$ E POSSIAMO SCRIVERE $\inf \sqrt{x} = 0$.

LU 25 OTT 2021

2) COSA POSSIAMO DIRE DELLA FUNZIONE 2^x ?

SAPPIAMO CHE $2^x > 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, QUINDI $m = 0$ È UN MINORANTE. SE ADESSO PRENDIAMO $m \in \mathbb{R}^+$, RISULTA $2^x \geq m$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$? OPPURE C'È UN $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $2^{x_0} < m$? PER RISPONDERE, RICORDIAMO CHE $\left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$ CIOÈ $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n} < m$ DEFINITIVAMENTE, QUINDI ESISTE $x_0 = -n_0$ TALE CHE $2^{x_0} < m$. QUINDI IL MINORANTE PIÙ GRANDE È ZERO:

$$\inf 2^x = 0.$$

ANZI, ESSENDO 2^x STRETTAMENTE CRESCENTE, SI HA $2^x < 2^{x_0} < m$ PER OGNI $x \in (-\infty, x_0)$. SI PUÒ DUNQUE SCRIVERE

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0.$$

UN'IMPORTANTE DIFFERENZA TRA x^2, $\sqrt{x}$ DA UNA PARTE, E 2^x DALL'ALTRA, STA NEL FATTO CHE

$$\inf x^2 \in \operatorname{Im}(x^2), \quad \inf 2^x \notin \operatorname{Im}(2^x)$$

LU 25 OTT 2021

LIMITI DI FUNZIONE

CONSIDERIAMO UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO INFERIORMENTE. SI SCRIVE $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ SE PER OGNI $m \in \mathbb{R}$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) < m$ NELL'INTERSEZIONE $S \cap (-\infty, x_0)$. SI SCRIVE $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ SE PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE x_0 TALE CHE $f(x) > M$ IN $S \cap (-\infty, x_0)$.

CONSIDERIAMO UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE. SI SCRIVE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ SE PER OGNI $m \in \mathbb{R}$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $f(x) < m$ NELL'INTERSEZIONE $S \cap (x_0, +\infty)$. SI SCRIVE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ SE PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ ESISTE x_0 TALE CHE $f(x) > M$ IN $S \cap (x_0, +\infty)$.

LIMITE FINITO PER $x \to \pm\infty$

CONSIDERIAMO UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO INFERIORMENTE. SI SCRIVE $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ SE PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ NELL'INTERSEZIONE $S \cap (-\infty, x_0)$.

CONSIDERIAMO UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CON S ILLIMITATO SUPERIORMENTE. SI SCRIVE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ SE PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ESISTE $x_0 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ NELL'INTERSEZIONE $S \cap (x_0, +\infty)$.

LU 25 OTT 2021

VALORE MINIMO DI UNA FUNZIONE

DATA UNA $f : S \to \mathbb{R}$, SI INDICA CON $\Im m\, f$ OPPURE CON $f(S)$ L'INSIEME $\{ y \in \mathbb{R} : f(x) = y$ PER ALMENO UN $x \in S \}$ DEI VALORI DI f (IMMAGINE DI f, OPPURE IMMAGINE DI S TRAMITE f).

SE $\inf f \in \Im m\, f$ SI DICE CHE f AMMETTE MINIMO, E SI DEFINISCE

$$\min f := \inf f$$

IN ALTRI TERMINI, f AMMETTE MINIMO QUANDO ESISTE ALMENO UN $x_0 \in S$ TALE CHE $f(x_0) = \inf f$, OVVERO CHE $f(x_0) \leq f(x)$ PER OGNI $x \in S$.

IN TAL CASO, INFATTI, $m = f(x_0)$ È UN MINORANTE, E NON ESISTONO MINORANTI PIÙ GRANDI: PERCHÉ?

PERCHÉ SE PRENDIAMO UN NUMERO REALE $m > f(x_0)$ ESSO, PALESEMENTE, NON È UN MINORANTE. QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE $f(x_0) = \inf f$ E PERCIÒ $\inf f \in \Im m\, f$

MA 26 OTT 2021

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = x^2$ AMMETTE MINIMO, E SI HA $\min x^2 = 0$ PERCHÉ $f(0) = 0 \leq f(x) = x^2$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = \sqrt{x}$ AMMETTE MINIMO, E SI HA $\min \sqrt{x} = 0$ PERCHÉ $f(0) = 0 \leq f(x) = \sqrt{x}$ PER OGNI $x \in [0, +\infty)$.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = 2^x$ NON AMMETTE MINIMO PERCHÉ $\inf f = 0 \notin \Im m\, f = (0, +\infty)$.

PUNTI DI MINIMO

SE UNA FUNZIONE $f : S \to \mathbb{R}$ AMMETTE MINIMO, OGNI $x \in S$ TALE CHE $f(x) = \min f$ SI CHIAMA PUNTO DI MINIMO.

ESEMPIO: LA FUNZIONE $f(x) = |x|$ AMMETTE MINIMO, E IL SUO UNICO PUNTO DI MINIMO È $x_0 = 0$. INFATTI $f(x_0) = |0| \leq f(x) = |x|$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, E L'UGUAGLIANZA VALE SOLO SE $x = 0$.

VALORE MASSIMO E PUNTI DI MASSIMO

DATA UNA $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$, SE ESISTE $x_0 \in S$ TALE CHE $f(x_0) \geq f(x)$ PER OGNI $x \in S$ SI DICE CHE f AMMETTE MASSIMO, SI DEFINISCE

$$\max f = f(x_0)$$

E TUTTI I PUNTI $x \in S$ TALI CHE $f(x) = \max f$ SI DICONO PUNTI DI MASSIMO.

ATTENZIONE! PER BREVITÀ, SIA IL VALORE MASSIMO CHE CIASCUN PUNTO DI MASSIMO VIENE DETTO « MASSIMO ».

MA 26 OTT 2021

FUNZIONI LOGARITMICHE

LA FUNZIONE b^x, CON $b \in \mathbb{R}^+$, HA PER DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$. SE $b = 1$ ESSA È COSTANTE, QUINDI NON È INVERTIBILE. SE, INVECE, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, L'EQUAZIONE

$$b^y = x$$

NELL'INCOGNITA y AMMETTE SOLUZIONE QUALUNQUE SIA IL DATO $x \in \mathbb{R}^+$: SEGUE DAL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI. LA SOLUZIONE È UNICA PER LA STRETTA MONOTONIA DELLA FUNZIONE b^y RISPETTO AD y: SE $y_1 < y_2$ ALLORA $b^{y_1} \neq b^{y_2}$. RESTA DEFINITA UNA FUNZIONE $x \longmapsto y$ SUL DOMINIO $\mathbb{R}^+$, CHE SI INDICA CON

$$y = \log_b x.$$

MA 26 OTT 2021

PRINCIPALI PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

DALLA DEFINIZIONE SEGUE IMMEDIATAMENTE CHE

$$\log_b b = 1$$

PERCHÉ $b^1 = b$. SIMILMENTE,

$$\log_b 1 = 0$$

PERCHÉ $b^0 = 1$. INOLTRE SI HA

$\log_b b^x = x$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

(OVVIO), COME PURE

$b^{\log_b x} = x$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}^+$.

DALLA STRETTA MONOTONIA DELLA FUNZIONE b^x SEGUE LA STRETTA MONOTONIA DI $\log_b x$, LA QUALE È ALLA BASE DEL COSIDDETTO « PASSAGGIO AI LOGARITMI » NELLE EQUAZIONI E NELLE DISEQUAZIONI, CIOÈ LA DISUGUAGLIANZA $f(x) < g(x)$, CON f E g FUNZIONI POSITIVE, EQUIVALE A

$$\log_b f(x) < \log_b g(x)$$

(SE $b \in \mathbb{R}^+$).

I LOGARITMI FURONO INVENTATI NEL CINQUECENTO DA NEPERO, E CALCOLATI A MANO DA QUESTI E DA BRIGGS, PERCHÉ GODONO DELLE DUE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1) PRENDO $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ E PONGO $y_i = \log_b x_i$, $i = 1, 2$. ALLORA $b^{y_1} = x_1$, $b^{y_2} = x_2$. MOLTIPLICANDOLE FRA LORO, TROVO CHE

$$b^{y_1 + y_2} = x_1 x_2,$$

E CIOÈ

$$\log_b x_1 x_2 = y_1 + y_2$$
$$= \log_b x_1 + \log_b x_2$$

COME SI USAVA: DATI x_1, x_2, TROVO y_1, y_2 SFRUTTANDO IL LAVORO DI BRIGGS E DEI SUOI SUCCESSORI.

CALCOLO $y_1 + y_2$. TROVO $b^{y_1+y_2}$ RIUTILIZZANDO IL LAVORO DI BRIGGS. OTTENGO COSÌ $x_1 x_2$

2) PRENDO $y \in \mathbb{R}$ E $\alpha \in \mathbb{R}$. SO CHE $b^{\alpha y} = (b^y)^\alpha$. QUINDI, POSTO $b^y = x$ E CIOÈ $y = \log_b x$, VEDO CHE $\alpha y = \log_b (b^y)^\alpha$ E CIOÈ $\log_b x^\alpha = \alpha \log_b x$

LE BASI PIÙ COMUNEMENTE UTILIZZATE SONO $b = 2, e, 10$. PONIAMO, PER BREVITÀ, $\log_e x = \log x$.

SI PUÒ PASSARE DA UNA BASE ALL'ALTRA RAGIONANDO COME SEGUE:
DATO $x \in \mathbb{R}^+$ E NOTO $y = \log x$, IL $\log_b x$ SODDISFA L'UGUAGLIANZA

$$b^{\log_b x} = x$$

SONO QUINDI UGUALI FRA LORO I LOGARITMI NATURALI DEI DUE MEMBRI:

$$\log\left(b^{\log_b x}\right) = \log x$$

QUINDI $(\log_b x) \log b = \log x$

DA CUI RICAVO $\log_b x = \dfrac{\log x}{\log b}$.

SOSTITUENDO e CON x DIVENTA:

$$\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$$

NELLE CALCOLATRICI IL TASTO PER I LOGARITMI NATURALI È $\boxed{\ln}$ E LA STESSA NOTAZIONE LA USANO ALCUNI DOCENTI DI FISICA.

MA 26 OTT 2021

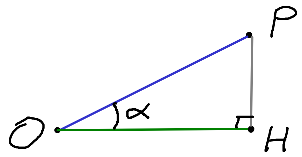
UN'IDENTITÀ MOLTO UTILE SCATURISCE DA $\log x^\alpha = \alpha \log x$ E DAL FATTO CHE $e^{\log z} = z$. POSTO $z = x^\alpha$ OTTENGO

$$x^\alpha = e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha \log x}$$

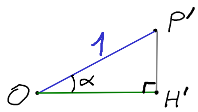
PER $x \in \mathbb{R}^+$ E $\alpha \in \mathbb{R}$. IN PARTICOLARE, SI HA $x^x = e^{x \log x}$ PER $x \in \mathbb{R}^+$.

LE FUNZIONI CIRCOLARI

STUDIATE FIN DALL'ANTICHITÀ PER LE LORO APPLICAZIONI IN ASTRONOMIA E IN NAVIGAZIONE



DATI $\overline{OP}$ E α SI PUÒ DETERMINARE $\overline{PH}$ TRAMITE UNA PROPORZIONE

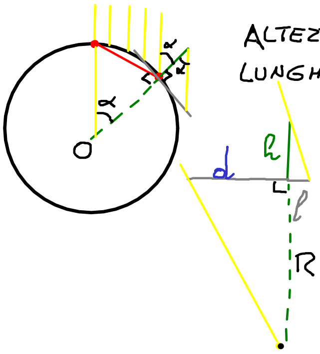


$$\frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{P'H'}}{\overline{OP'}}$$

IL PROBLEMA SI RIDUCE A TROVARE $\overline{P'H'}$ CONOSCENDO α.

ESEMPIO STORICO: IL CALCOLO DEL RAGGIO DELLA TERRA FATTO DA ERATOSTENE NELL'ANTICHITÀ

ALTEZZA DELL'OBELISCO: h
LUNGHEZZA DELL'OMBRA: ℓ



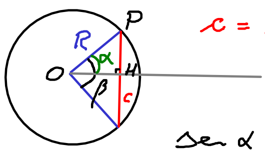
IL RAGGIO R SI STIMA DALLA DISTANZA d CON LA PROPORZIONE

$$\frac{R}{d} = \frac{h}{\ell}$$

VISTO CHE QUESTO TIPO DI CALCOLI ERA FREQUENTE, GLI ANTICHI AVEVANO CALCOLATO $P'H'$ IN FUNZIONE DI α PER MOLTI VALORI. I LOGARITMI EBBERO UN RUOLO NELLA SEMPLIFICAZIONE DI TALI CALCOLI. TALE FUNZIONE DI α È $\text{sen}\,\alpha$ (OVVERO $\sin\alpha$): SENO DI α.

GI 28 OTT 2021

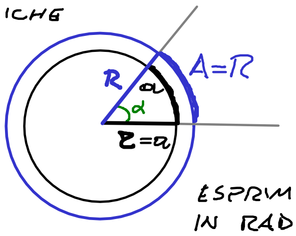
ALLO STESSO PROBLEMA SI PERVIENE QUANDO SI VUOLE CALCOLARE LA LUNGHEZZA DI UNA CORDA SOTTESA A UN ANGOLO AL CENTRO β:



$$c = 2\frac{c}{2} = 2\,\overline{PH} = 2R\,\text{sen}\,\alpha$$

$\text{sen}\,\alpha$ = MEZZA CORDA

L'USO DEL RADIANTE SEMPLIFICA I CALCOLI TEORICI CON LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



LA CONDIZIONE $a = \ell$ SI USA PER DEFINIRE L'ANGOLO DI 1 rad

ESPRIMIAMO L'ANGOLO GIRO IN RADIANTI: DETTA x LA SUA MISURA, SI HA CHE

$$\frac{x}{2\pi\ell} = \frac{1}{a} \quad \text{DOVE } a = \ell$$

QUINDI $x = 2\pi$.

DA QUI SEGUE LA TABELLA DI CONVERSIONE GRADI - RADIANTI:

GRADI	$360°$	$180°$	$90°$	$60°$	$45°$	$30°$	$\frac{180°}{\pi}$
RADIANTI	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	1

$$\frac{180°}{\pi} = 57°\,17'\,44{,}8''$$

PER DEFINIRE LE FUNZIONI $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ E $\text{tg}\,\alpha$ SI CONSIDERA LA CIRCONFERENZA γ DI EQUAZIONE

$$x^2 + y^2 = 1$$

E SI DETERMINA $P \in \gamma$ A PARTIRE DA $\alpha \in \mathbb{R}$, E SI INDICANO CON $\cos\alpha$ E $\text{sen}\,\alpha$ L'ASCISSA E L'ORDINATA DEL PUNTO P. NE SEGUE IMMEDIATAMENTE LA PRIMA IDENTITÀ FONDAMENTALE: $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$ PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$.

GI 28 OTT 2021

SEGUE ANCHE CHE $\cos\alpha$ È UNA FUNZIONE PARI, MENTRE $\operatorname{sen}\alpha$ È UNA FUNZIONE DISPARI.

SONO ENTRAMBE FUNZIONI LIMITATE, E SI HA CHE $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha \leq 1$ PER OGNI $\alpha \in \mathbb{R}$.

SI HA INOLTRE CHE $\min \cos\alpha = \min \operatorname{sen}\alpha = -1$, $\max \cos\alpha = \max \operatorname{sen}\alpha = 1$. I PUNTI DI MASSIMO DI $\cos\alpha$ SONO $\alpha_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, I PUNTI DI MINIMO $\beta_k = \pi + 2k\pi$, I PUNTI DI MASSIMO DI $\operatorname{sen}\alpha$ SONO $\alpha'_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, QUELLI DI MINIMO sono $\beta'_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

SONO FUNZIONI PERIODICHE DI PERIODO 2π

FUNZIONI PERIODICHE

SI DICE CHE $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ È PERIODICA DI PERIODO $T \in (0, +\infty)$ SE RISULTA $f(x+T) = f(x)$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$. LA DEFINIZIONE SI ESTENDE ALLE FUNZIONI IL CUI DOMINIO S SIA PERIODICO DI PERIODO T NEL SENSO CHE $x \in S$ SE E SOLO SE $x + T \in S$.

PROBLEMA: SUPPONIAMO CHE RISULTI $x + T \in S$ OGNIQUALVOLTA $x \in S$: L'INSIEME $S \subset \mathbb{R}$ È PERIODICO?

LA TANGENTE TRIGONOMETRICA

ESCLUSI I VALORI $\alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, LA RETTA OP INTERSECA LA RETTA $x = 1$ IN UN PUNTO Q LA CUI ORDINATA DEFINISCE $\operatorname{tg}\alpha$.

LA FUNZIONE $\operatorname{tg}\alpha$ HA PER DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ ED È PERIODICA DI PERIODO π.

DALLA SIMILITUDINE FRA I TRIANGOLI $O\hat{P}H$ E $O\hat{Q}R$ SEGUE LA SECONDA IDENTITÀ FONDAMENTALE: SI HA

$$\frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \left| \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \right| = \frac{\overline{RQ}}{\overline{OR}} = \left| \operatorname{tg}\alpha \right|$$

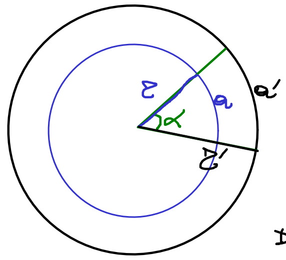
DISCUTENDO I SEGNI SI CONSTATA CHE

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{PER } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

SI NOTI CHE GLI $\alpha_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ SONO GLI ZERI DI $\cos\alpha$: SI DICE CHE $x_0 \in \mathbb{R}$ È UNO ZERO DI UNA FUNZIONE f SE $f(x_0) = 0$.

GI 28 OTT 2021

LUNGHEZZA DELL'ARCO a DI UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO r, NOTO L'ANGOLO α. PER PROPORZIONALITÀ,



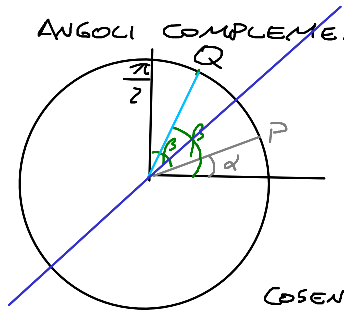
SI HA $a = C \alpha r$. PER TROVARE C, RICORDIAMO LA DEFINIZIONE DEL RADIANTE: QUANDO $\alpha = 1$ SI HA $a = r$, QUINDI $C = 1$:

$$a = \alpha r$$

SE AL POSTO DI α USIAMO LA MISURA IN GRADI $x^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha$ LA FORMULA DIVENTA $a = \frac{\pi r}{180^\circ} x^\circ$.

IDENTITÀ TRIGONOMETRICHE

ANGOLI COMPLEMENTARI: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

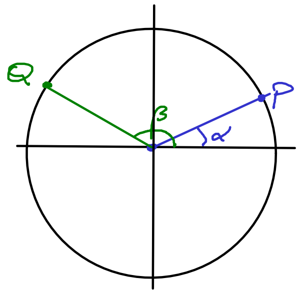


$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

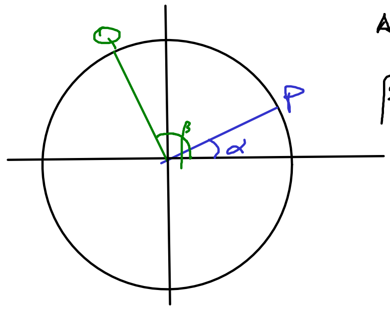
COSENO = SENO DEL COMPLEMENTARE

ANGOLI SUPPLEMENTARI: $\alpha + \beta = \pi$



$$\operatorname{sen}(\pi - \beta) = \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$$

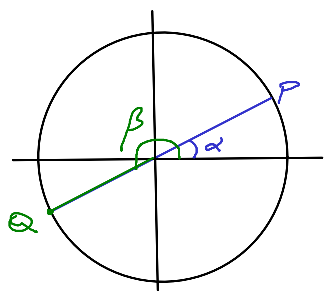


ANGOLI SFASATI DI $\frac{\pi}{2}$

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha$$



ANGOLI SFASATI DI π

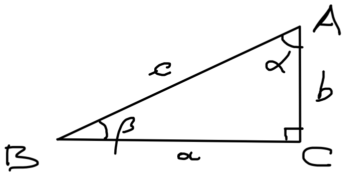
$$\beta = \alpha + \pi$$

$$\operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\beta = -\cos\alpha$$

 VE 29 OTT 2021

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI RETTANGOLI



DALLA DEFINIZIONE DI $\operatorname{sen}\beta$ SEGUE CHE

$$b = c \operatorname{sen}\beta$$
$$= c \cos\alpha$$

E SIMILMENTE

$$a = c \operatorname{sen}\alpha$$
$$= c \cos\beta$$

DALLE UGUAGLIANZE BLU SEGUE

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

QUINDI: $a = b \operatorname{tg}\alpha$
$= b \operatorname{cotg}\beta$

E SIMILMENTE: $b = a \operatorname{tg}\beta$
$= a \operatorname{cotg}\alpha$

DOVE $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$

$= \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ PER $\alpha \neq k\pi$

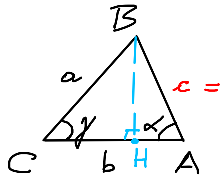
A PROPOSITO: SI PUÒ DEFINIRE $\sec\alpha =$

$= \dfrac{1}{\cos\alpha}$ PER $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ E

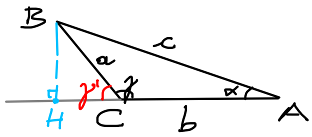
$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ PER $\alpha \neq k\pi$

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI QUALUNQUE

① TEOREMA DEL COSENO (TEOREMA DI CARNOT)



$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$$



DIMOSTRAZIONE:

$c^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$

PER IL TEOREMA DI PITAGORA.

SOSTITUENDO $\overline{BH} = a \operatorname{sen}\gamma$

E $\overline{AH} = b - a\cos\gamma$

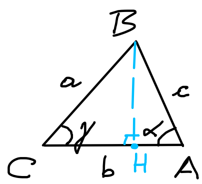
SI OTTIENE $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

② TEOREMA DEI SENI:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

DIMOSTRAZIONE: SAPPIAMO CHE

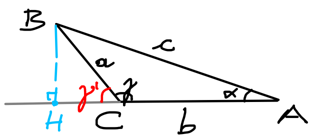


$\overline{BH} = a \operatorname{sen}\gamma$

E VEDIAMO ANCHE CHE

$\overline{BH} = c \operatorname{sen}\alpha$

DA CUI SEGUE CHE



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

L'UGUAGLIANZA $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}$ SI OTTIENE RIDENOMINANDO c CON b E γ CON β.

VE 29 OTT 2021

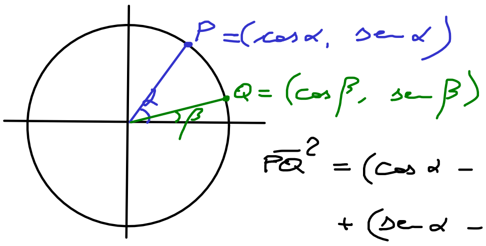
IDENTITÀ TRIGONOMETRICHE (SEGUE)

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

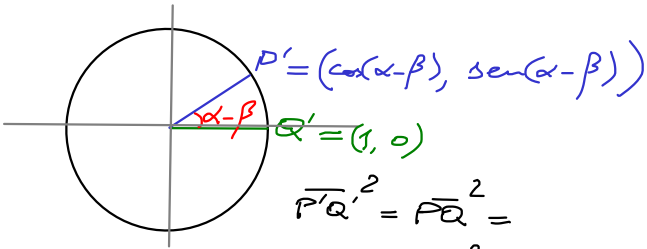
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

PER LA DIMOSTRAZIONE SEGUIAMO M. BRAMANTI, PRECALCULUS:



$$\overline{PQ}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)$$



$$\overline{P'Q'}^2 = \overline{PQ}^2 =$$

$$= (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) =$$

$$= 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

NE SEGUE CHE

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

DA CUI, POSTO $-\beta = \gamma$, SEGUE

$$\cos(\alpha+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma$$

RICORDANDO CHE $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

RICAVIAMO $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right)$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

E DA QUESTA SEGUE $\operatorname{sen}(\alpha-\gamma) =$

$= \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma - \cos\alpha \operatorname{sen}\gamma$.

FORMULE DI DUPLICAZIONE:

POSTO $\beta = \alpha$ SI TROVA

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

OSSERVIAMO CHE $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ PER OGNI $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

MA ALLORA $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$

$$= 2\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

E $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha =$

$$= (1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

INOLTRE $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

DA CUI SI RICAVA $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

FORMULE DI PROSTAFERESI:

POSTO $p = \alpha + \beta$ E $q = \alpha - \beta$, COSICCHÉ RISULTA

$\alpha = \dfrac{p+q}{2}$ E $\beta = \dfrac{p-q}{2}$, SI TROVA

$$\operatorname{sen}p + \operatorname{sen}q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen}p - \operatorname{sen}q = 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

DIMOSTRAZIONE: SAPPIAMO CHE

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

SAPPIAMO, INOLTRE, CHE

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

FORMULE DI WERNER:

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

OSSERVAZIONE: SONO MOLTO SEMPLICI E MOLTO IMPORTANTI LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI $f(x,y) = x \pm y$, $f(x,y) = xy$, $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $f(x,y) = x^y$.

MA 02 NOV 2021

LE FUNZIONI INVERSE DELLE FUNZIONI CIRCOLARI

1) PER DEFINIRE $\alpha = \operatorname{arcsen} y$ SI OSSERVA CHE LA FUNZIONE $y = \operatorname{sen} \alpha$ È STRETTAMENTE CRESCENTE SULL'INTERVALLO $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ IN QUANTO, PRESI $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ CON $\alpha_1 < \alpha_2$, SI HA $\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 = 2 \cos \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$

E SI VEDE CHE

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 < \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$$

QUINDI $\cos \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} > 0$, E INOLTRE

$$0 < \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \leq \frac{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

QUINDI $\operatorname{sen} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} > 0$.

PER IL TEOREMA DEGLI ZERI DELLE FUNZIONI CONTINUE, PER OGNI $y \in [-1, 1]$ ESISTE $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ TALE CHE $\operatorname{sen} \alpha = y$.

QUESTO α È UNICO PER LA STRETTA MONOTONIA DELLA FUNZIONE $y = \operatorname{sen} \alpha$.

RESTA QUINDI DEFINITA LA FUNZIONE $\alpha = \operatorname{arcsen} y$ PER $y \in [-1, 1]$.

2) PER DEFINIRE $\alpha = \arccos x$ SI PROCEDE IN MODO ANALOGO, INVERTENDO LA RESTRIZIONE DELLA FUNZIONE $x = \cos \alpha$ ALL'INTERVALLO $[0, \pi]$, NEL QUALE ESSA È CONTINUA E STRETTAMENTE DECRESCENTE.

SI OTTIENE LA FUNZIONE $\alpha = \arccos x$ AVENTE PER DOMINIO L'INTERVALLO $[-1, 1]$ E STRETTAMENTE DECRESCENTE.

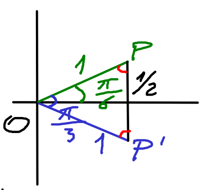
3) SIMILMENTE, INVERTENDO LA RESTRIZIONE DELLA FUNZIONE $y = \operatorname{tg} \alpha$ ALL'INTERVALLO $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ SI OTTIENE LA FUNZIONE $\alpha = \operatorname{arctg} y$ AVENTE PER DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$ E STRETTAMENTE CRESCENTE.

VALORI NOTEVOLI DELLE FUNZIONI CIRCOLARI

$\operatorname{sen} k\pi = 0$ PER OGNI $k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

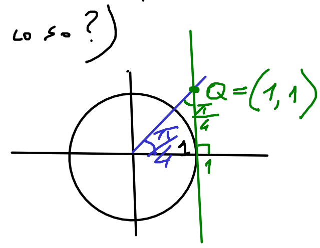
$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (COME LO SO?)

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$



MA 02 NOV 2021

CENNI ALLE FUNZIONI IPERBOLICHE

LA FUNZIONE $y = e^x$ NON È PARI NÉ DISPARI PERCHÉ SE PRENDIAMO $x_0 = 1$ TROVIAMO $y(1) = e$ E LO CONFRONTIAMO CON $y(-1) = \frac{1}{e}$, CONSTATANDO CHE $y(-1) \neq \pm e$.

PARTE PARI E PARTE DISPARI DI UNA $f: S \to \mathbb{R}$ CON $-S := \{x \in \mathbb{R} : -x \in S\} = S$.

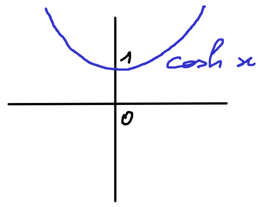
POSTO $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ E $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ SI HA

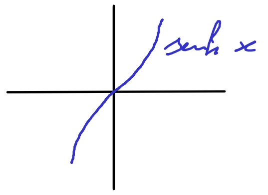
$f(x) = g(x) + h(x)$ PER OGNI $x \in S$.

LA PARTE PARI DELLA FUNZIONE $f(x) = e^x$ È LA FUNZIONE

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

MENTRE LA PARTE DISPARI È $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$





SI TROVA $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x =$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = 1$$