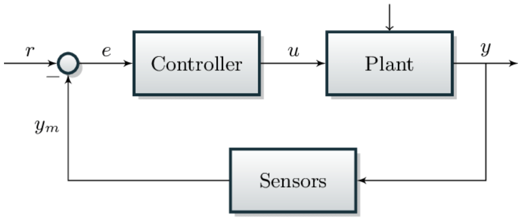


Controlli automatici

Sintesi per tentativi mediante il Luogo delle Radici

Ing. Alessandro Pisano
apisano@unica.it

La sintesi per tentativi mediante LdR consente di progettare regolatori sulla base di un approccio «polinomiale» basato sull'uso del luogo delle radici.

Tale metodo ha come elemento fondamentale l'individuazione, sulla base delle specifiche del problema di controllo, di una **regione ammissibile** per i poli del sistema a ciclo chiuso.

La sintesi del regolatore ha come obiettivo quello di garantire che i poli del sistema a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.

Viene denominata «per tentativi» in quanto in taluni casi può richiedere varie iterazioni

Vediamo attraverso quali passi si sviluppa.

A ciascun problema di controllo sono associate due tipologie di specifiche:

Le specifiche sul comportamento a regime

Le specifiche sul comportamento transitorio

Come **primo passo** nella sintesi mediante LdR si analizzano le specifiche sul comportamento a regime, e sulla base di queste si determinano due parametri:

Il **tipo di sistema di controllo che si deve realizzare** (tipo 0, tipo 1, ...)

Una **soglia minima per il guadagno statico** (eventualmente generalizzato) **del controllore**

A valle di questa prima fase di analisi, sulla base delle caratteristiche del processo (in particolare sulla base del fatto che il processo già contenga o meno dei poli nell'origine) si determina se sia necessario o meno inserire dei poli nell'origine nel controllore, ed in caso affermativo quanti.

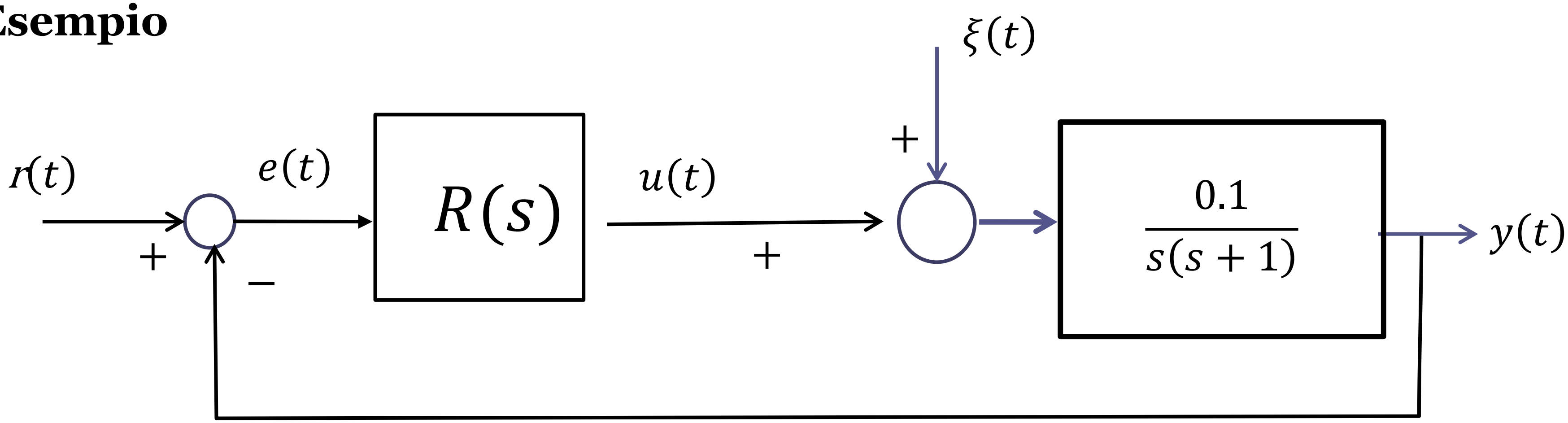
In generale, nell'ambito di questa metodologia di progetto si va a ricercare un controllore espresso nella forma seguente

$$R(s) = \frac{K_R}{s^\nu} R'(s) \qquad\qquad R'(0) = 1$$

Come detto, l'analisi delle specifiche sul comportamento a regime ci consente di determinare il valore di ν ($\nu = 0, \nu = 1, \ldots$) (cioè il numero di poli nell'origine che devono essere inseriti nel controllore) ed un eventuale vincolo sul guadagno K_R del tipo:

$$K_R \geq K_R^*$$

Esempio



Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%
- S3 Un set point a rampa unitaria deve essere riprodotto a regime con un errore massimo di 0.25
- S4. Sovraelongazione non superiore al 5%
- S5. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

Analizziamo le specifiche sul comportamento a regime.

- *S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %*
- *S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%*
- *S3 Un set point a rampa unitaria deve essere riprodotto a regime con un errore massimo di 0.25*

La specifica S1 sarebbe compatibile con un sistema di controllo di tipo zero. In realtà il processo possiede un polo nell'origine quindi il sistema di controllo sarà sempre almeno di tipo 1, e la specifica S1 viene garantita con errore nullo da qualunque controllore R(s) che renda stabile il sistema a ciclo chiuso.

La specifica S2 è compatibile con un sistema di controllo in cui il regolatore non possiede poli nell'origine ($\nu = 0$). Sia K_R il guadagno statico del regolatore.

$$W_\zeta^y(0) = \frac{1}{K_R} \leq 0.02 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 50$$

La specifica S3 è compatibile con un sistema di controllo in cui il regolatore non possiede poli nell'origine ($\nu = 0$). Sia K_R il guadagno statico del regolatore.

$$\frac{1}{K_R \mu_P} = \frac{1}{K_R\, 0.1} \leq 0.25 \quad \Rightarrow \quad K_R \geq 40$$

Desumiamo pertanto con riferimento all'esempio di sintesi in esame che non devono essere inseriti dei poli nell'origine nel controllore ($\nu = 0$) e ricercheremo pertanto un controllore della forma

$$R(s) = K_R R'(s) \qquad\qquad R'(0) = 1$$

tenendo a mente che il guadagno statico K_R dovrà essere maggiore o uguale a 50

$$K_R \geq 50$$

La «parte dinamica» $R'(s)$ del regolatore, cioè una eventuale aggiunta di poli e zeri, va progettata per garantire il soddisfacimento delle specifiche sul comportamento transitorio.

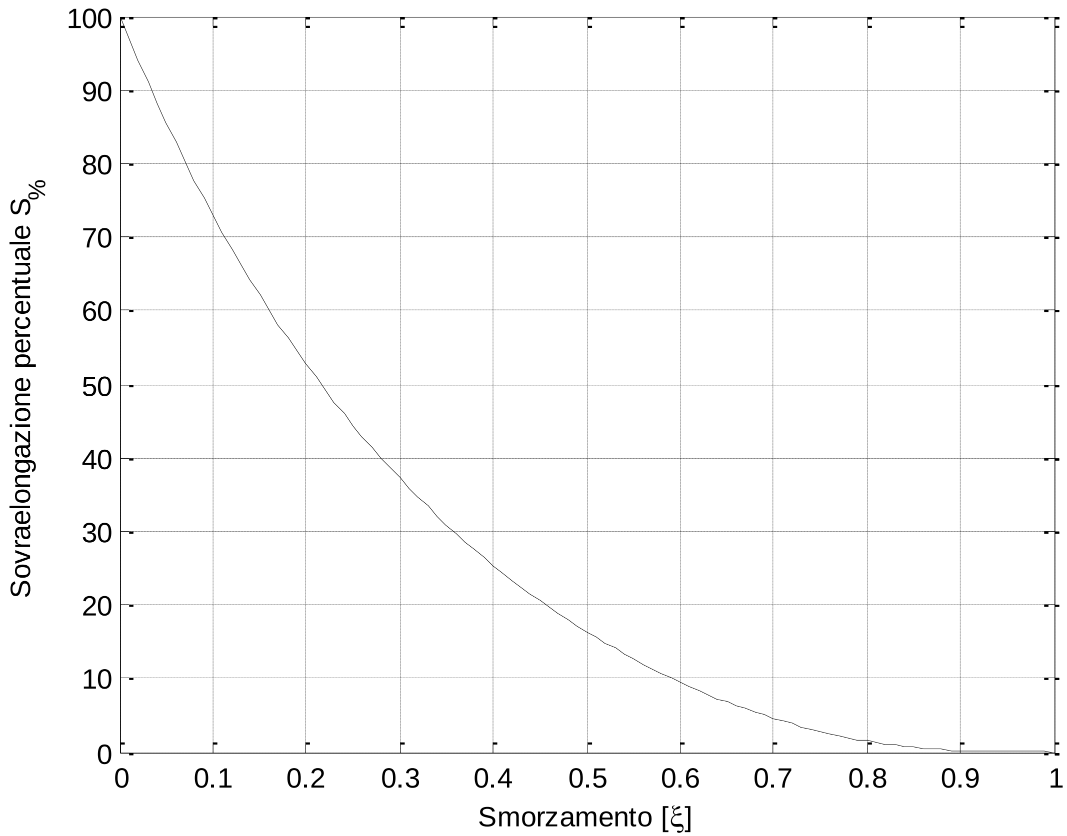
Queste ultime vengono «convertite» in una regione ammissibile del piano all'interno della quale devono essere vincolati i poli del sistema a ciclo chiuso.

Ora mettiamo temporaneamente da parte l’esempio e descriviamo in termini generali la procedura per l’individuazione della regione ammissibile in funzione delle varie tipologie di specifiche sul comportamento transitorio

Specifica sulla sovraelongazione

La regione ammissibile per i poli si determina sulla base del diagramma che mette in relazione la sovraelongazione con lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



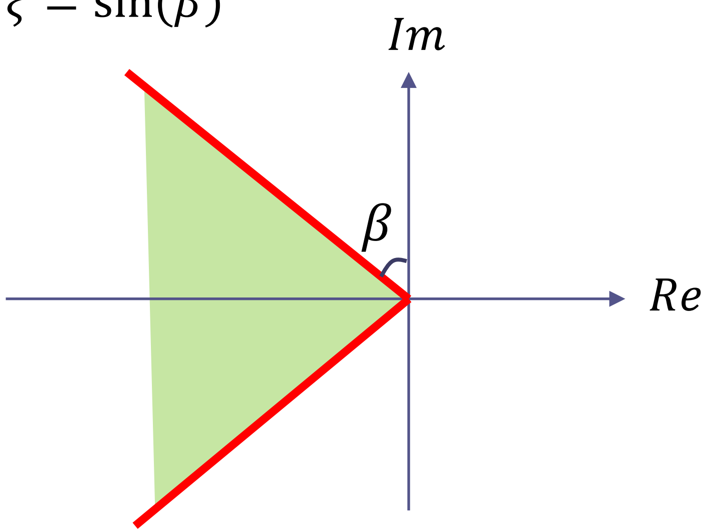

```
xi=0:0.01:1;
s=100*exp((-(xi*pi)./(sqrt(1-xi.^2))));
plot(xi,s,'k'),grid
xlabel('Smorzamento [\xi]')
ylabel('Sovraelongazione percentuale S_%')
```

$$S_{\%} \leq S^* \quad \Rightarrow \quad \xi \geq \xi^*$$

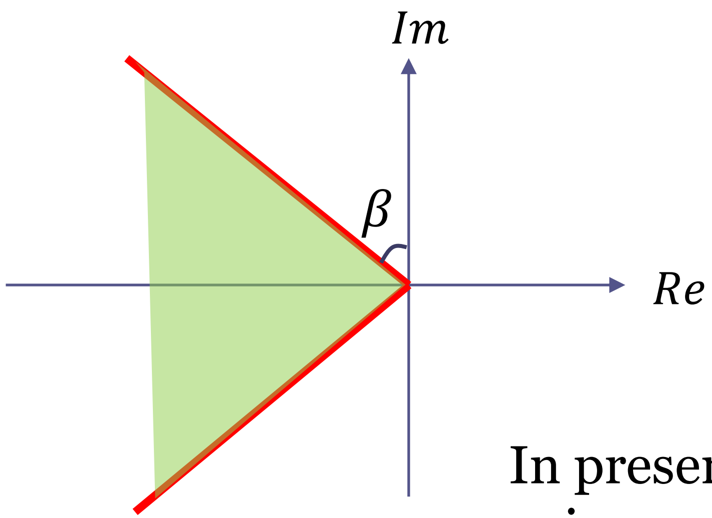
Per fare in modo che in un sistema di controllo la sovraelongazione percentuale sia minore o uguale di una certa soglia S^* è sufficiente garantire che la coppia di poli complessi coniugati **dominante** abbia uno smorzamento **maggiore o uguale di** ξ^*, dove ξ^* può essere letto sul grafico o determinato analiticamente:

$$S_{\%} = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 100e^{-\tan(\beta)\pi} \leq S^* \quad \Rightarrow \quad \beta \geq \beta^* = \tan^{-1}\left\{-\frac{1}{\pi}\ln\frac{S^*}{100}\right\}$$

$\xi = \sin(\beta)$



In termini grafici, ciò corrisponde a garantire che la coppia di poli complessi coniugati **dominante** ricada all'interno di una **regione ammissibile** come quella riportata nella figura a lato



Tale approccio assume che se il sistema a ciclo chiuso possieda al più una coppia di poli complessi coniugati **dominante**

In presenza di più coppie di poli complessi coniugati in cui non si possa individuarne una come dominante, si procede **per tentativi** restringendo progressivamente la regione ammissibile (cioè aumentando β) fino ad ottenere un regolatore che, sottoposto a verifica simulativa, soddisfi la specifica.

Se si riesce a fare in modo che nel sistema a ciclo chiuso vi siano unicamente poli reali negativi (e nessuno zero in bassa frequenza rispetto ai poli) la sovraelongazione sarà nulla indipendentemente dal numero dei poli e indipendentemente dal fatto che uno di questi sia dominante o meno.

Specifiche sul tempo di assestamento

La regione ammissibile per i poli a ciclo chiuso si determina sulla base delle relazioni che intercorrono fra i tempi di assestamento e la costante di tempo (eventualmente equivalente) dei poli dominanti a ciclo chiuso

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

«costante di tempo equivalente»

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2}$	$4.7\ \tau_{eq}$	$5.8\ \tau_{eq}$	$6.6\tau_{eq}$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)}$	$3\ \tau$	$3.9\ \tau$	$4.6\ \tau$
$F(s) = \frac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	$4.7\ \tau$	$5.8\ \tau$	$6.6\ \tau$

Le relazioni inserite nelle seguenti tabelle approssimate sono conservative rispetto a quelle delle tabelle «rigorose» presenti nella slide precedente, e quindi possono essere impiegate in alternativa per semplicità

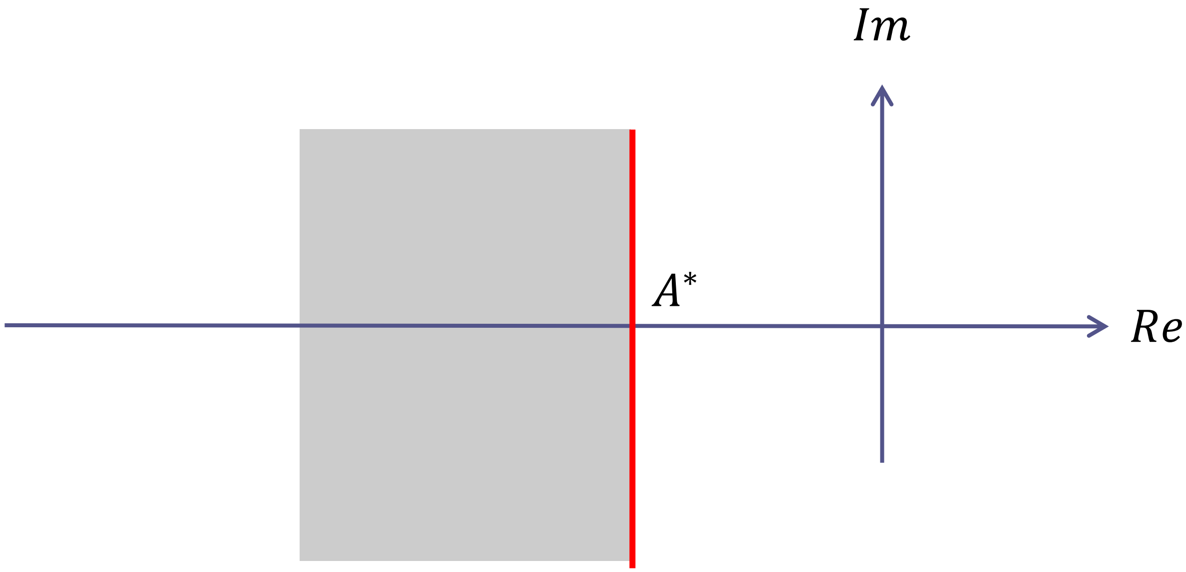
Tabelle approssimate

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$ «costante di tempo equivalente»

	$T_{a5\%}$	$T_{a2\%}$	$T_{a1\%}$
$F(s) = \dfrac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2}$	$5\ \tau_{eq}$	$6\ \tau_{eq}$	$7\ \tau_{eq}$
$F(s) = \dfrac{\mu}{(\tau s + 1)}$	$3\ \tau$	$4\ \tau$	$5\ \tau$
$F(s) = \dfrac{\mu}{(\tau s + 1)^2}$	$5\ \tau$	$6\ \tau$	$7\ \tau$

La scelta di quale formula impiegare va fatta i funzione del numero di poli presenti nella FdT a ciclo chiuso, una volta che siano stati rimossi quelli trascurabili, e della loro tipologia (reali o complessi coniugati)

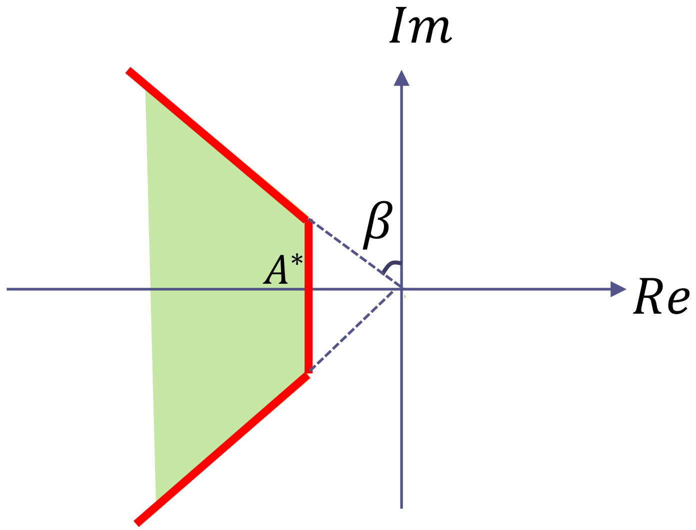
In tutti i casi, si ottiene una regione ammissibile come quella mostrata in figura, ed i poli a ciclo chiuso dovranno essere collocati alla sinistra di una retta verticale



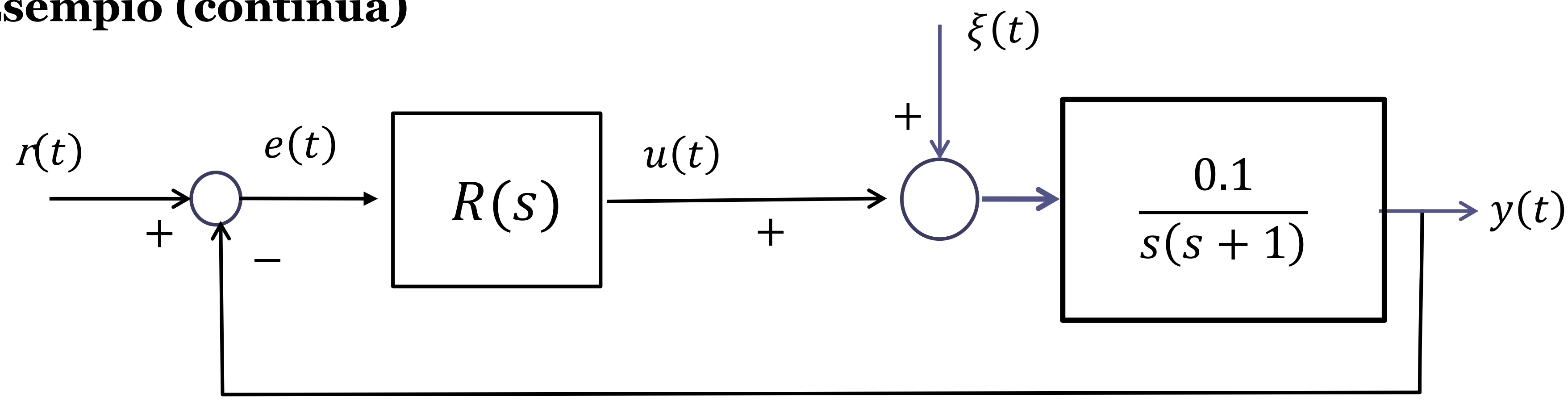
Esempio

$$T_{a5\%} \leq T^* \Rightarrow A^* = \begin{cases} -\dfrac{3}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con un polo dominante reale} \\ -\dfrac{4.7}{T^*} & \text{Sistema a ciclo chiuso con due poli dominanti (entrambi reali o che formano una coppia di poli CC)} \end{cases}$$

In un problema di controllo in cui sia presente una specifica sulla sovraelongazione ed una specifica sul tempo di assestamento, la regione ammissibile sarà pertanto complessivamente del tipo



Esempio (continua)



Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%
- S3 Un set point a rampa unitaria deve essere riprodotto a regime con un errore massimo di 0.25
- S4. Sovraelongazione non superiore al 5%
- S5. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

L'analisi delle specifiche sul comportamento a regime ci ha portato a concludere che il controllore R(s) non deve possedere poli nell'origine, e che il relativo guadagno statico deve essere maggiore o uguale di 50

$R(s) = K_R R'(s)$ $\qquad$ $K_R \geq 50$ $\qquad$ $R'(0) = 1$

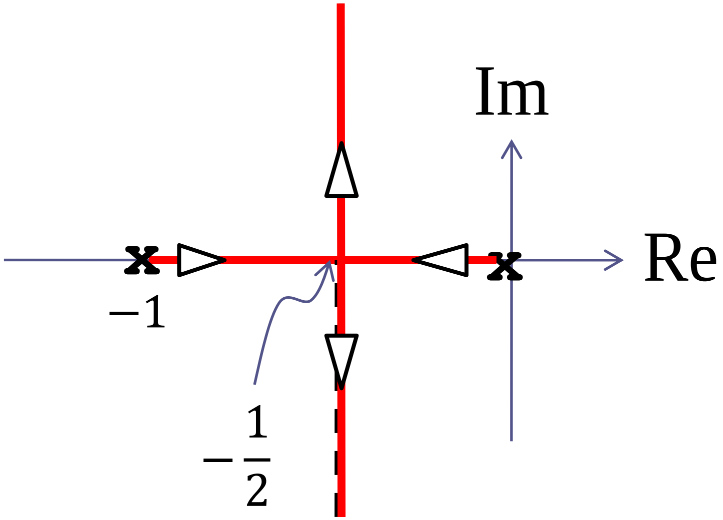
Iniziamo dalla soluzione più semplice.

Verifichiamo se un **controllore proporzionale** $R(s) = K_R$ con guadagno $K_R \geq 50$ è in grado di soddisfare le specifiche sul transitorio.

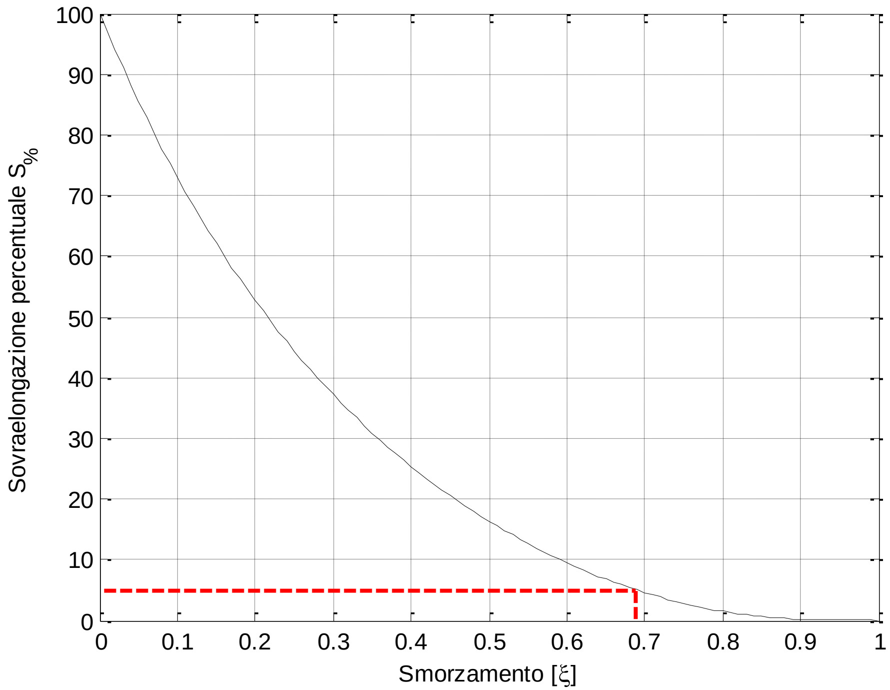
Tracciamo il LdR:

$$L(s) = \frac{0.1}{s(s+1)}$$

A ciclo chiuso sono presenti due poli che possono essere reali negativi o complessi coniugati



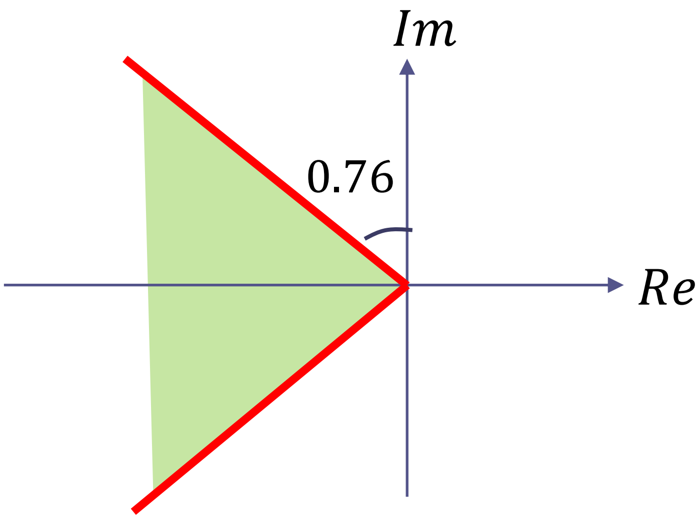
- S4. Sovraelongazione non superiore al 5%



$$S_{\%} \leq 5 \quad \Rightarrow \quad \xi \geq 0.69$$

$$\beta \geq \beta^* = \tan^{-1}\left\{-\frac{1}{\pi}\ln\frac{S^*}{100}\right\} = 0.76\, rad$$

Ovviamente: $\sin(0.76) = 0.69$



Se a ciclo chiuso sono presenti due poli reali negativi e nessuno zero in bassa frequenza la sovraelongazione è nulla.

- S5. Tempo di assestamento all’ 1% non superiore a 1.5 secondi

Poiché a ciclo chiuso si hanno due poli, si deve far riferimento alle formule:

	$T_{a1\%}$
$F(s) = \dfrac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2}$	$6.6\,\tau_{eq}$
$F(s) = \dfrac{\mu}{(1 + \tau s)^2}$	$6.6\,\tau$

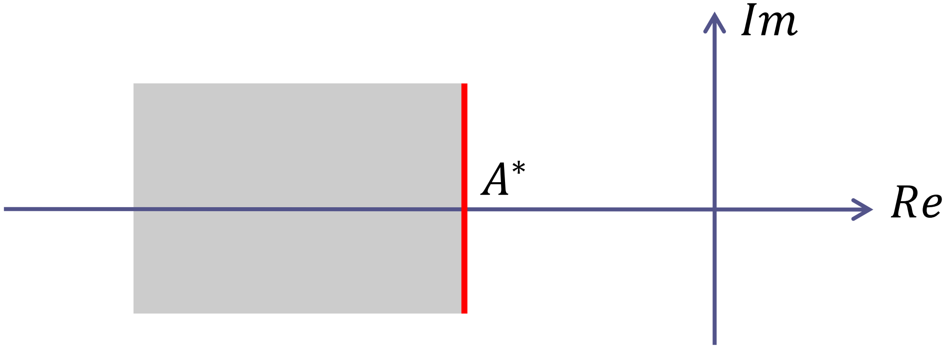
Se i poli a ciclo chiuso saranno **complessi coniugati**, questi dovranno avere una costante di tempo equivalente τ_{eq} tale da soddisfare la seguente diseguaglianza

$$6.6\tau_{eq} \leq 1.5 \quad \Rightarrow \quad \tau_{eq} \leq \frac{1.5}{6.6} = 0.227s$$

Tenendo a mente la definizione della costante di tempo equivalente:

$$\tau_{eq} = \frac{1}{\xi\omega_n}$$

ed in particolare il fatto che $\xi\omega_n$ è la parte reale cambiata di segno della coppia di poli complessi coniugati, si avrà una regione ammissibile con la forma seguente



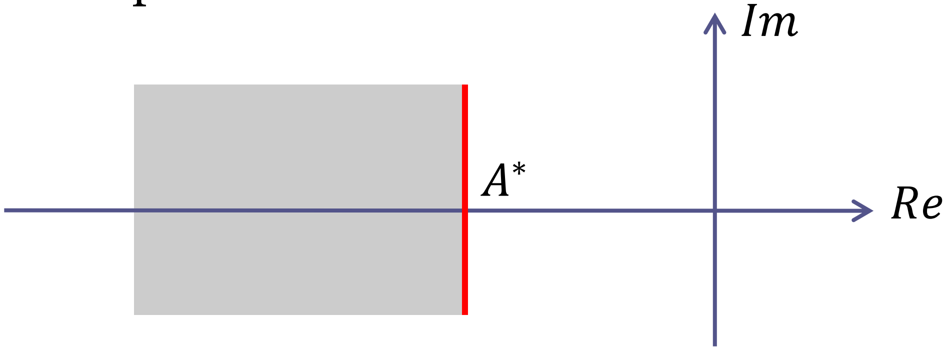
$$A^* = -\frac{1}{0.227} = -4.4$$

I poli complessi coniugati dovranno avere una parte reale minore o uguale di -4.4

Se i poli a ciclo chiuso saranno **reali**, questi dovranno avere una costante di tempo τ tale da soddisfare la medesima diseguaglianza

$$6.6\,\tau \leq 1.5 \quad \Rightarrow \quad \tau \leq \frac{1.5}{6.6} = 0.227s$$

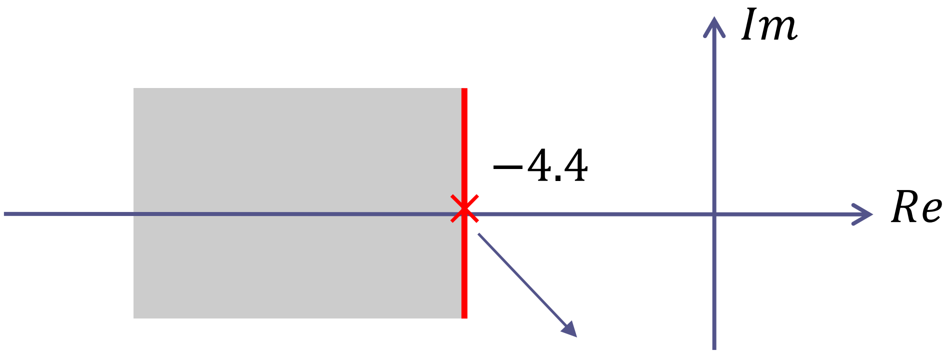
cui corrisponde una regione ammissibile per i poli analoga a quella individuata nella slide precedente



$$A^* = -\frac{1}{0.227} = -4.4$$

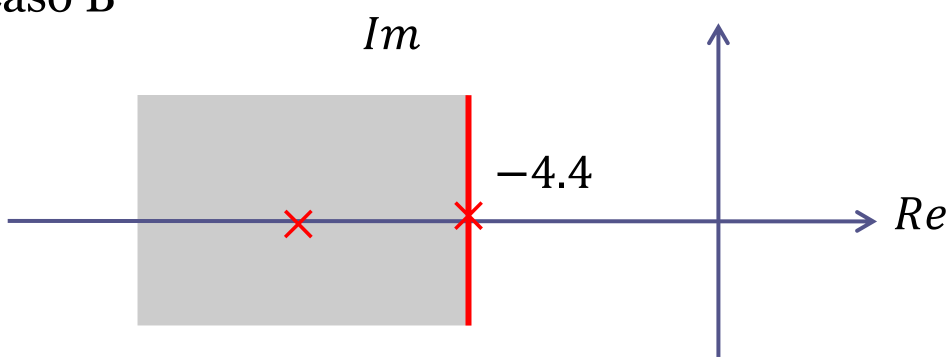
N.B. Questi ragionamenti sono stati desunti a partire dalla espressione del tempo di assestamento della FdT $F(s) = \frac{\mu}{(1+\tau s)^2}$ che ha due poli reali negativi coincidenti. La regione ammissibile continua a valere anche nel caso in cui i poli a ciclo chiuso non siano necessariamente coincidenti

Caso A



2 poli coincidenti sul bordo della regione ammissibile

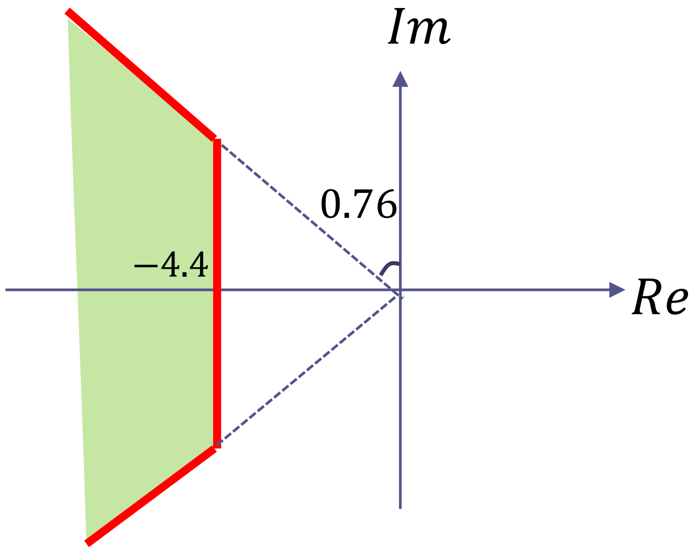
Caso B



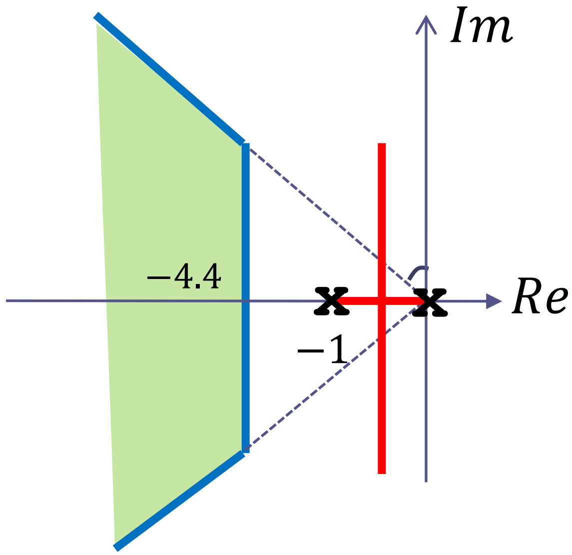
1 polo sul bordo della regione ammissibile ed un polo interno alla regione

Il tempo di assestamento nel caso B sarà sicuramente inferiore rispetto a quello del caso A, quindi la regione ammissibile continua a valere anche nel caso in cui i poli a ciclo chiuso dovessero essere reali non coincidenti

La regione ammissibile è complessivamente la seguente



Sovrapponendo la regione ammissibile ed il LdR appare chiaro come impiegando un controllore proporzionale risulta impossibile fare in modo che i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.



Dobbiamo indagare una struttura alternativa per il controllore.

$$R(s) = K_R R'(s) \qquad\qquad R'(0) = 1$$

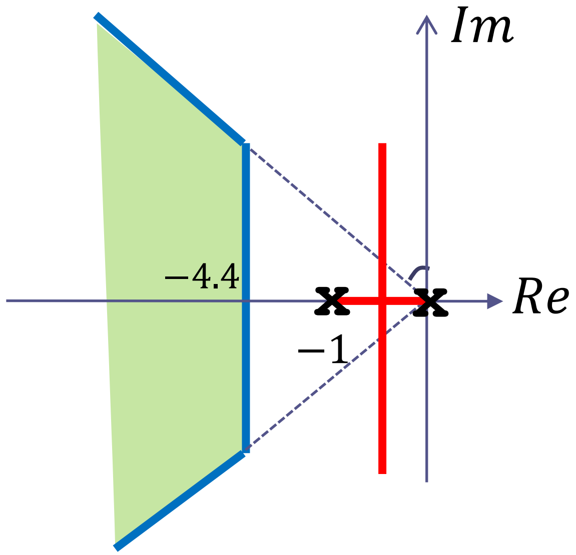
Una scelta frequente nell'ambito della sintesi mediante LdR prevede l'inserimento nella parte dinamica $R'(s)$ del regolatore di una o più coppie polo-zero

$$R(s) = K_R \frac{p}{z}\frac{s-z}{s-p} \qquad\qquad R'(s) = \frac{p}{z}\frac{s-z}{s-p} \qquad\qquad R'(0) = 1$$

Se non inserissimo il termine $\frac{p}{z}$ nella definizione del controllore il suo guadagno statico non sarebbe più pari a K_R.

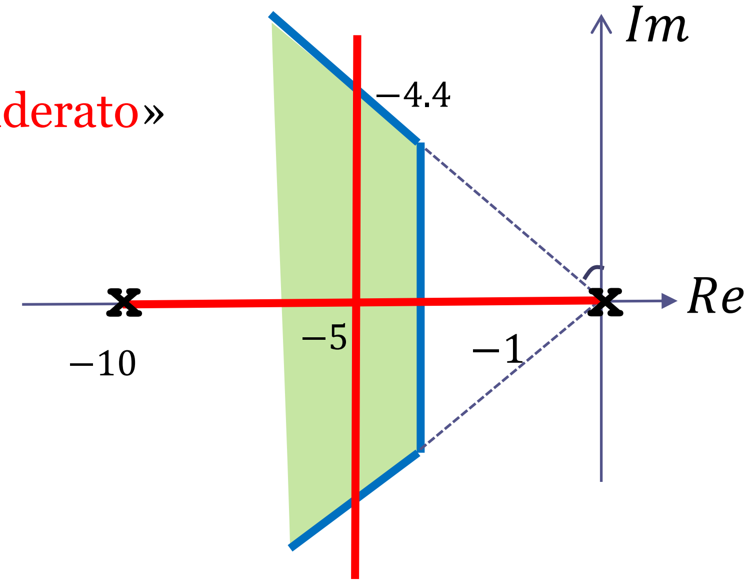
Una scelta altrettanto frequente prevede che lo zero del regolatore venga sovrapposto ad uno dei poli del processo in modo da «cancellarlo» e «sostituirlo» con un polo che abbia una collocazione maggiormente vantaggiosa per quanto concerne l'andamento del LdR. Cancellare mediante uno zero del controllore uno dei poli del processo è in generale sempre una scelta conveniente in quanto riduce l'ordine della FdT a ciclo aperto L(s).

Riguardando il LdR e la regione ammissibile appare chiaro che il principale fattore limitante sia dovuto alla presenza del polo in -1 , per effetto del quale il punto doppio va a collocarsi nel punto -0.5 (a metà strada fra i due poli)



Se il polo fosse invece collocato più in alta frequenza, in particolare in -10, si avrebbe un punto doppio in -5, e quindi i rami del luogo verrebbero «attratti» all'interno della regione ammissibile

LdR «desiderato»

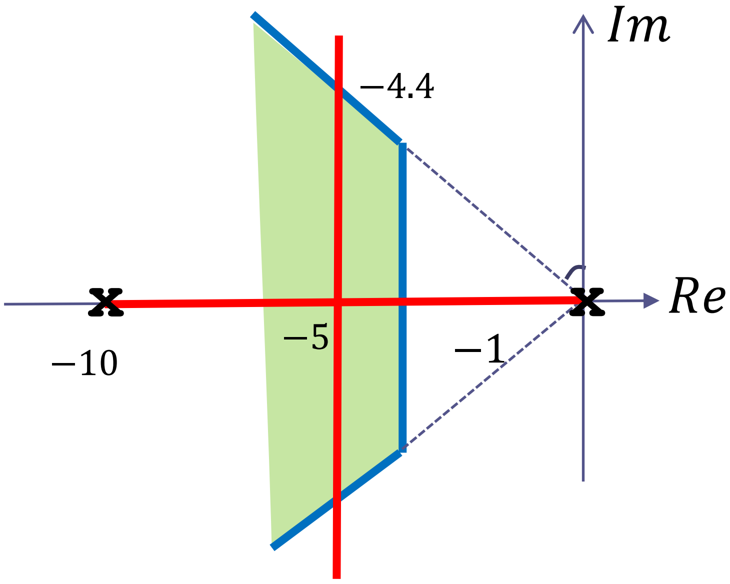


E'possibile ottenere il LdR «desiderato» cancellando con uno zero del regolatore il polo del processo in -1 e inserendo un polo in -10 ($z = -1, p = -10$)

$$R(s) = K_R\, 10\frac{s+1}{s+10} \qquad R'(s) = 10\frac{s+1}{s+10} \qquad R'(0) = 1$$

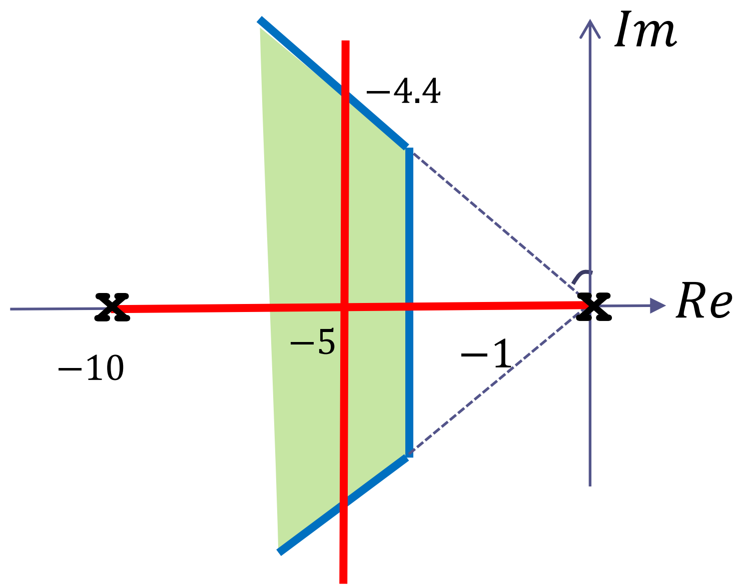
$$L(s) = 10\frac{\cancel{s+1}}{s+10}\frac{0.1}{s\cancel{(s+1)}} = \frac{1}{s(s+10)}$$

Cancellazione polo-zero



Utilizzando un regolatore $R(s) = K_R\, 10\,\frac{s+1}{s+10}$ i poli a ciclo chiuso possono essere collocati, mediante una opportuna scelta di K_R, sulle traiettorie dei rami del LdR.

Utilizzando un regolatore $R(s) = K_R\, 10\,\frac{s+1}{s+10}$ i poli a ciclo chiuso possono essere collocati, mediante una opportuna scelta di K_R, sulle traiettorie dei rami del LdR.

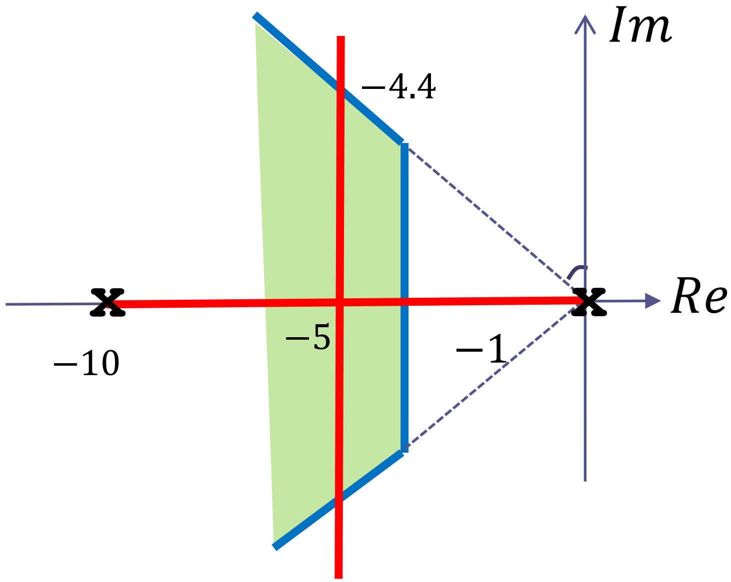


Il valore del guadagno K_R associato al punto doppio in -5 si determina facilmente operando la taratura del punto doppio, e vale 20. Tale valore non è compatibile con il vincolo sul guadagno statico del controllore derivante dalle specifiche a regime. Dobbiamo pertanto utilizzare un valore più elevato, nella fattispecie un valore ≥ 50, che inevitabilmente condurrà alla presenza nella FdT di poli complessi coniugati.

Possiamo scegliere $K_R = 50$ e «dormire tranquilli» in merito alla risoluzione di questo esercizio ?

Possiamo scegliere $K_R = 50$ e «dormire tranquilli» in merito alla risoluzione di questo esercizio ?

No



Vi è difatti il rischio che in corrispondenza del minimo valore consentito per il guadagno statico del controllore, pari a 50, i due rami del luogo delle radici siano gia usciti dalla regione ammissibile.

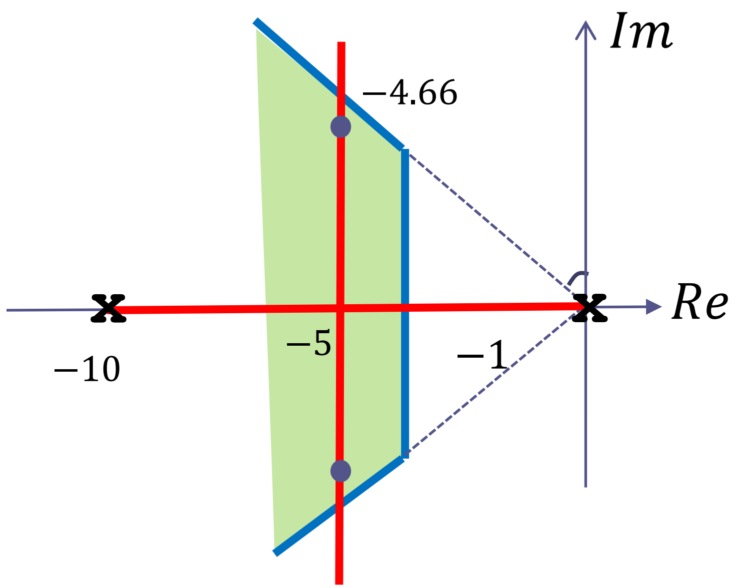
Per verificare se ciò avvenga o meno, calcoliamo i poli a ciclo chiuso in corrispondenza del valore $K_R = 50$ (sappiamo gia che sono complessi coniugati, e che la loro parte reale è pari a -5) e verifichiamo se il valore del loro smorzamento risulti maggiore di 0.69

$$P_{car}(s) = s(s+10) + \mathrm{K_R} = \mathrm{s}^2 + 10\mathrm{s} + \mathrm{K_R} \qquad \mathrm{K_R} = 50$$

$$P_{car}(s) = \mathrm{s}^2 + 10\mathrm{s} + 50$$

$$p_{1,2} = -5 \pm j\,5 \qquad \xi = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 5^2}} = 0.7071 \qquad \xi > 0.69$$

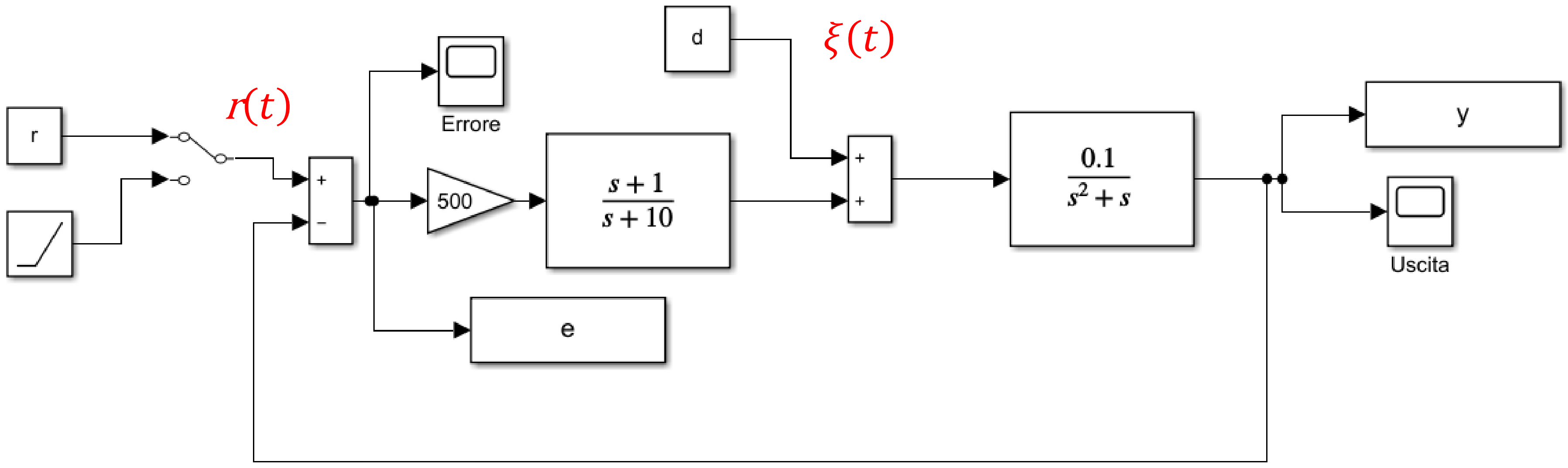
Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati conseguente alla scelta $\mathrm{K_R} = 50$ rientra all'interno della regione ammissibile.



Quindi il seguente regolatore risolve il problema di progetto

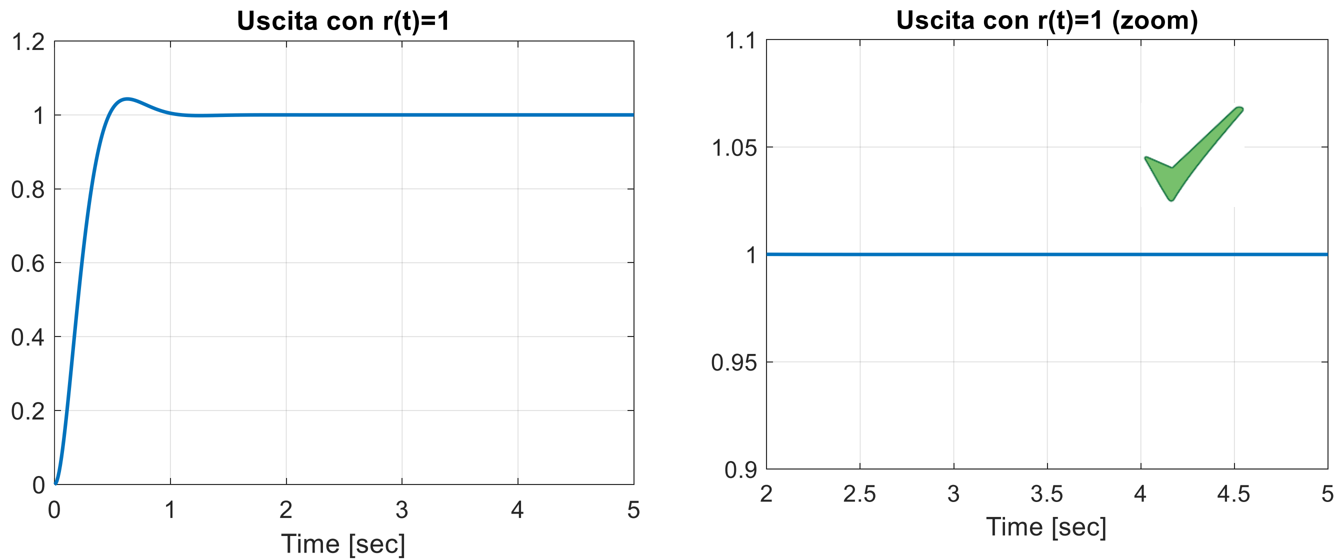
$$\boxed{R(s) = 500\,\frac{s+1}{s+10}}$$

File: SintesiLdR01.slx



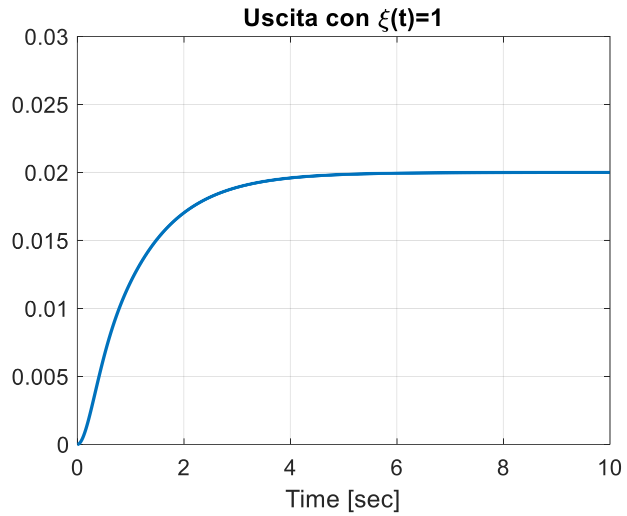
- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore massimo del 2 %

$r(t) = 1$



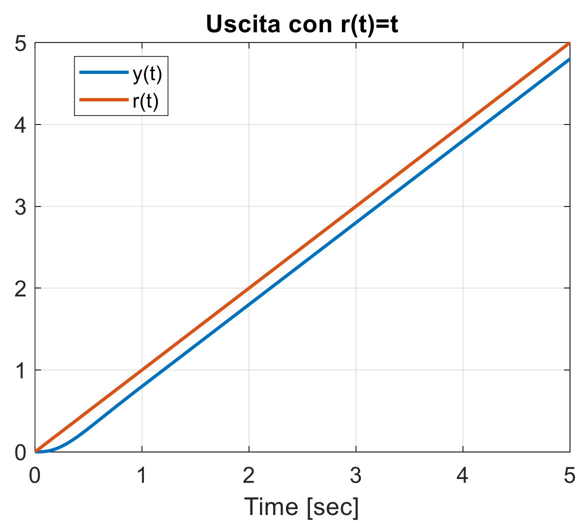
- S2. Un disturbo costante deve essere attenuato a regime in misura pari almeno al 98%

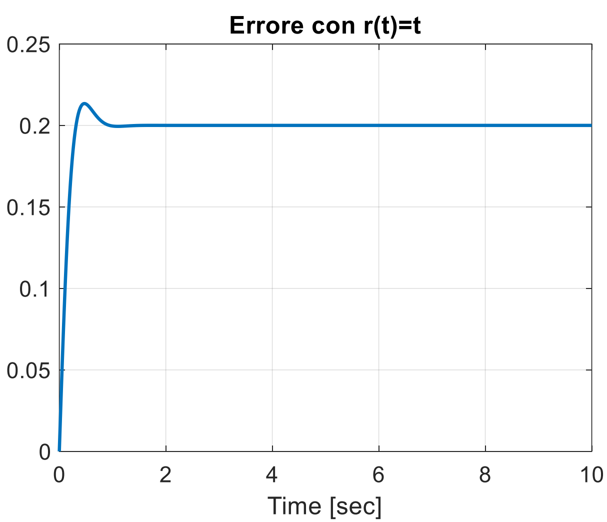
$\xi(t) = 1$



S3 Un set point a rampa unitaria deve essere riprodotto a regime con un errore massimo di 0.25

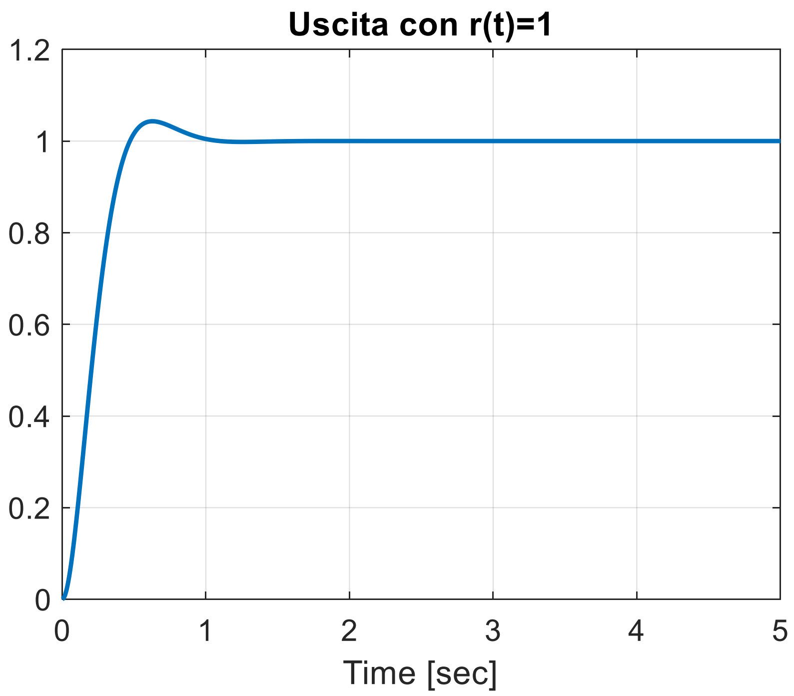
$r(t) = t$

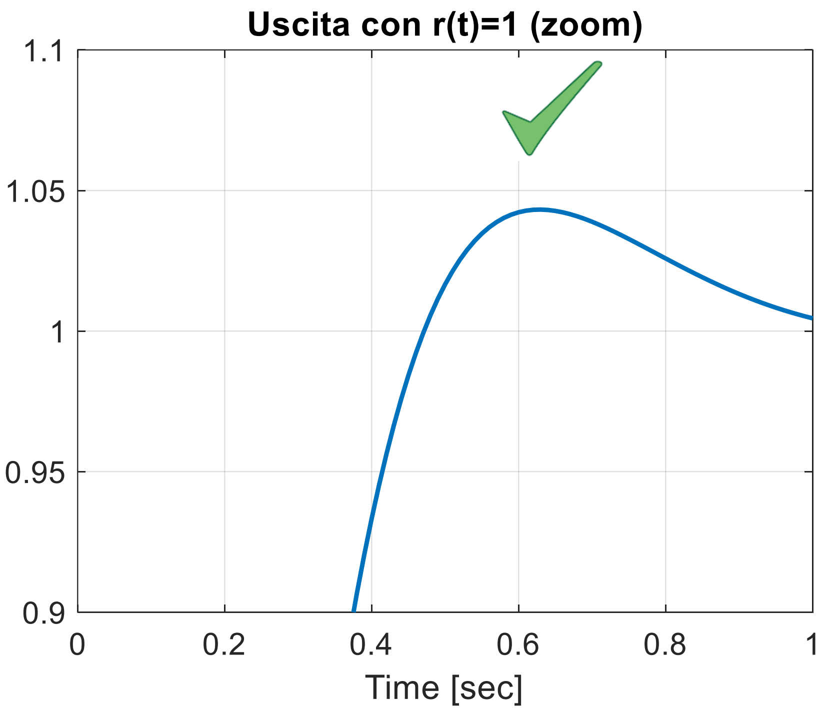




- S4. Sovraelongazione non superiore al 5%

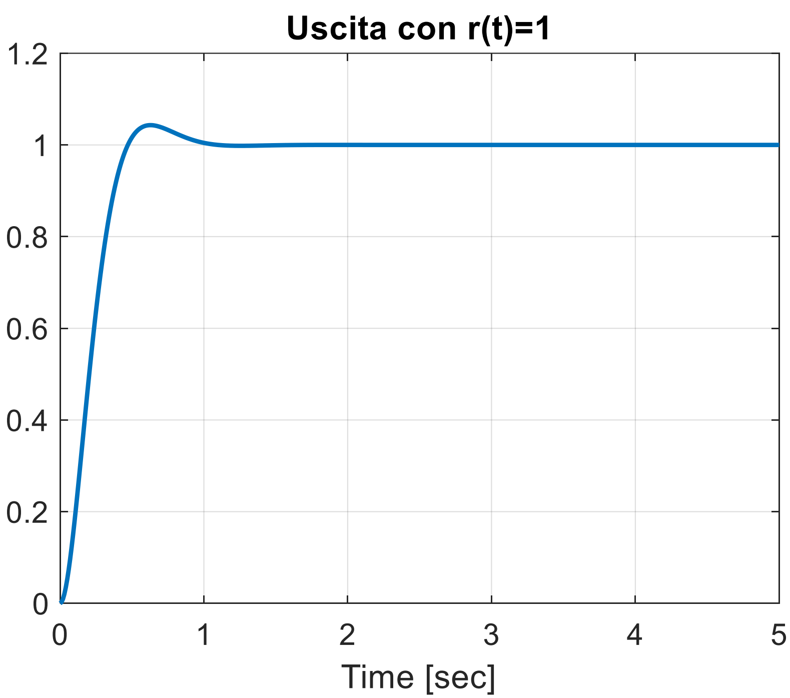
$r(t) = 1$

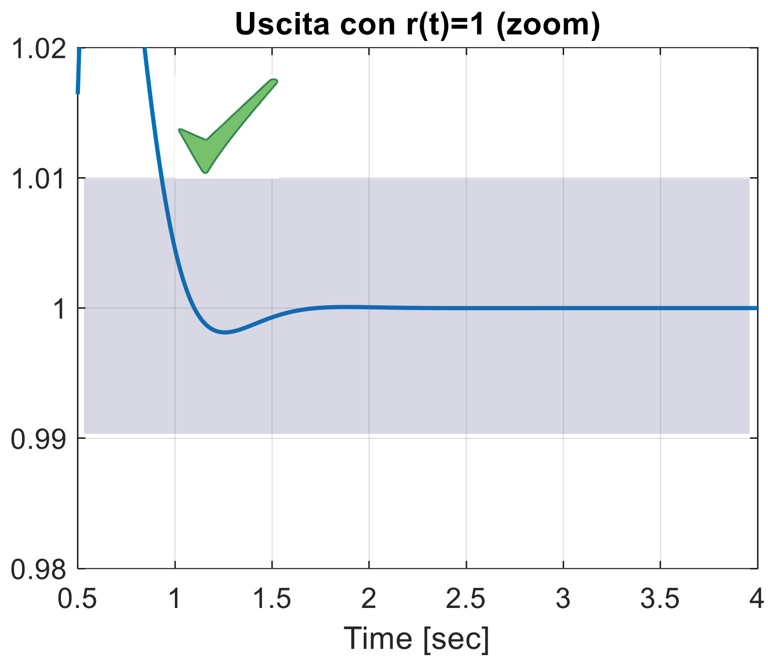




- S5. Tempo di assestamento all' 1% non superiore a 1.5 secondi

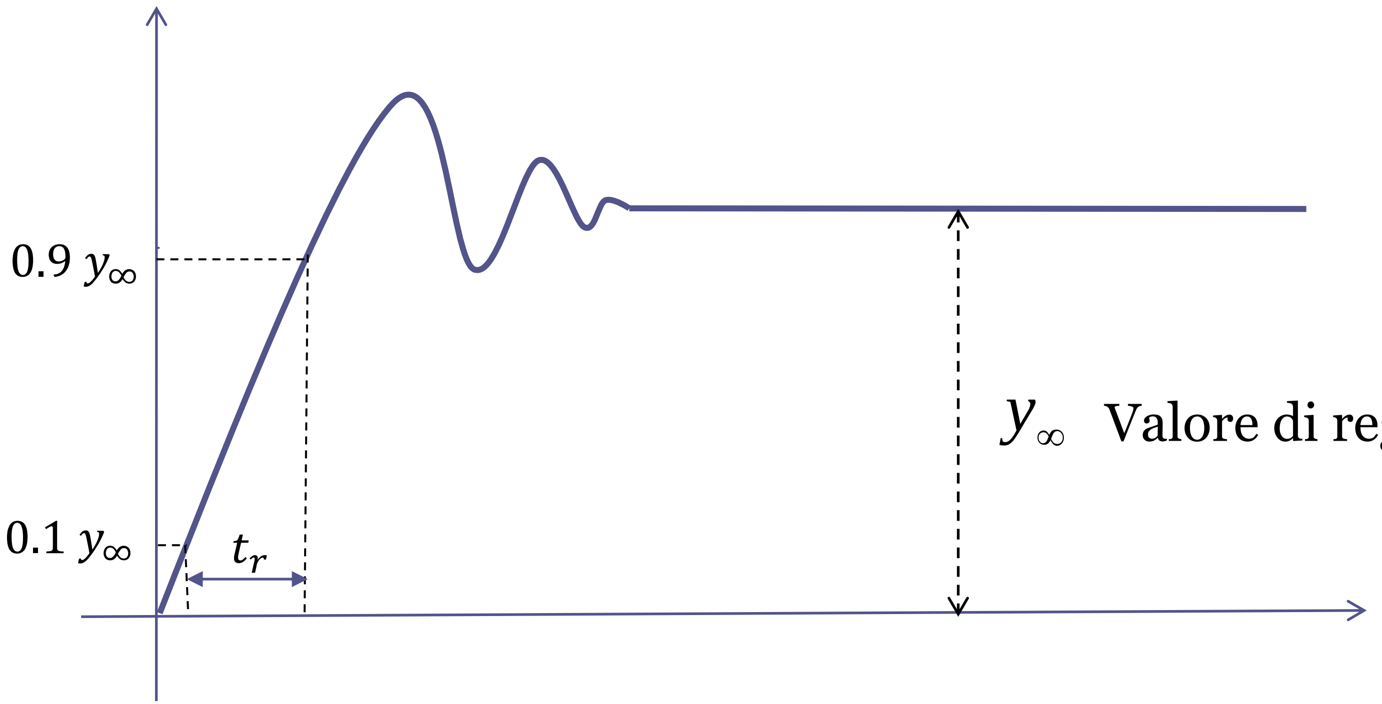
$r(t) = 1$





Specifiche sul tempo di salita

Il tempo di salita t_r (*rise time*) è un ulteriore parametro associato alla risposta al gradino di sistemi dinamici LTI asintoticamente stabili, in aggiunta alla sovraelongazione ed al tempo di assestamento

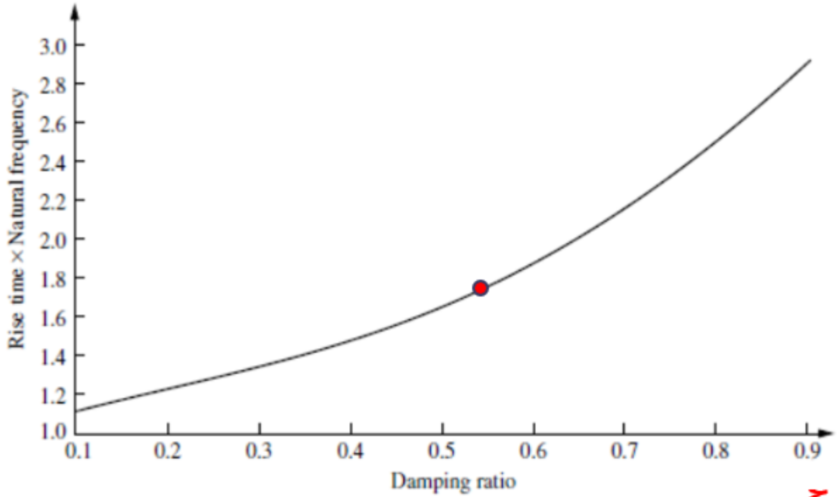


Il tempo di salita è definito come il tempo necessario affinche l'uscita cresca dal 10% al 90% del valore di regime

Il tempo di salita della risposta al gradino di un processo del secondo ordine con i poli complessi coniugati descritto dalla FdT $F(s) = \frac{\mu\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$ è espresso mediante la seguente relazione

$$t_r = \frac{1}{\omega_n} f_2(\xi)$$

$f_2(\xi)$



ξ

ξ	$f_2(\xi)$
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Nella sintesi si adotta in genere il valore intermedio costante $f_2(\xi) = 1.8$, che corrisponde ad un valore di smorzamento circa pari a $\xi = 0.55$

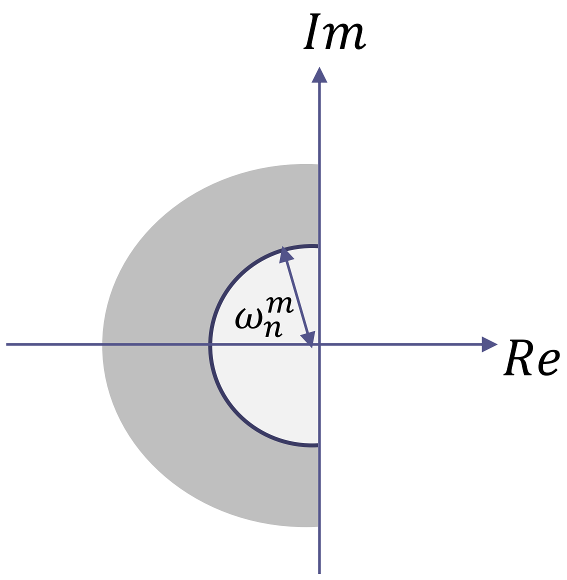
$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$$

Una specifica sul transitorio del tipo

$$t_r \leq T_r^M$$

implica una corrispondente diseguaglianza su ω_n $\Rightarrow$ $\omega_n \geq \dfrac{1.8}{T_r^M}$

Poiche ω_n rappresenta la distanza dall'origine della coppia di poli, il vincolo $\omega_n \geq \omega_n^m = \frac{1.8}{T_r^M}$ si traduce in una regione ammissibile esterna ad una circonferenza di raggio $\frac{1.8}{T_r^M}$ (tale regione è ovviamente ristretta nel semipiano sinistro)



Il tempo di salita di **sistemi del primo e secondo ordine** con **poli reali** ha una diversa espressione.

	t_r
$F(s) = \dfrac{\mu}{1+\tau s}$	$2.2\ \tau$
$F(s) = \dfrac{\mu}{(1+\tau s)^2}$	$3.3\ \tau$

Una specifica sul transitorio del tipo

$$t_r \leq T_r^M$$

implica una corrispondente diseguaglianza su τ che assume una espressione differente per sistemi del primo ordine e del secondo ordine

$$\tau \leq \frac{T_r^M}{2.2}$$ Sistema del primo ordine

$$\tau \leq \frac{T_r^M}{3.3}$$ Sistema del secondo ordine

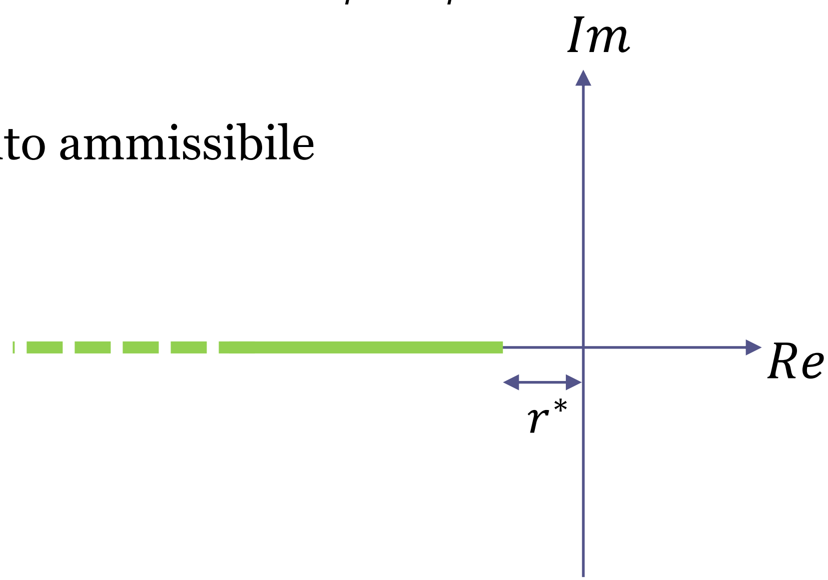
Le formule ricavate possono essere riscritte in funzione della distanza $r = \frac{1}{\tau}$ dall'origine del polo/dei poli.

$$r \geq \frac{2.2}{T_r^M} \qquad \text{Sistema del primo ordine}$$

$$r \geq \frac{3.3}{T_r^M} \qquad \text{Sistema del secondo ordine}$$

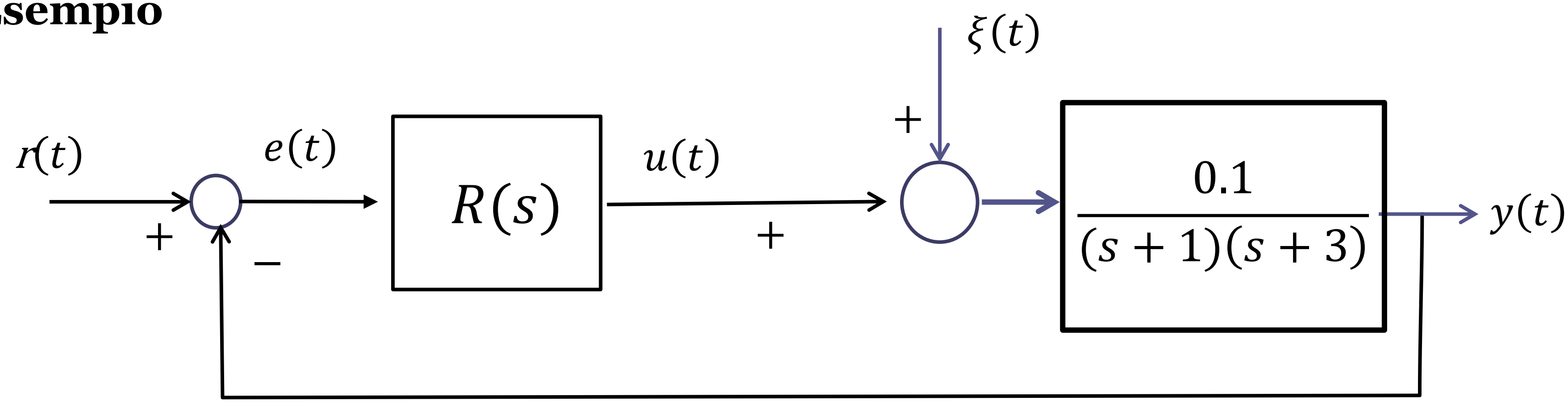
Tale espressione rende più evidente il significato geometrico di tale vincolo in termini di una regione ammissibile (un segmento del semiasse reale negativo il cui estremo destro dista dall'origine $\frac{2.2}{T_r^M}$ o $\frac{3.3}{T_r^M}$ in funzione del numero di poli dominanti)

Segmento ammissibile



$$r^* = \begin{cases} \dfrac{2.2}{T_r^M} & \text{Sistema del primo ordine} \\ \dfrac{3.3}{T_r^M} & \text{Sistema del secondo ordine} \end{cases}$$

Esempio



Progettare un regolatore in grado di garantire il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore nullo
- S2. Un disturbo a rampa unitaria deve indurre una perturbazione costante sull'uscita di ampiezza non superiore a 0.01
- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%
- S4. Tempo di salita non superiore a 1 secondo

La specifica S1 implica la realizzazione di un sistema di controllo di tipo 1. Poiché il processo non contiene poli nell'origine sarà necessario implementare un regolatore contenente un polo nell'origine ($\nu = 1$). La specifica S2 richiede che il regolatore contenga un polo nell'origine. Quindi dovremmo scegliere il regolatore nella forma seguente

$$R(s) = \frac{K_R}{s} R'(s) \qquad\qquad R'(0) = 1$$

La specifica S2 implica altresì un vincolo sul valore minimo del guadagno statico generalizzato del regolatore. Deriviamola applicando il teorema del valore finale

$$W_\xi^y(s) = \frac{\dfrac{0.1}{(s+1)(s+3)}}{1 + \dfrac{K_R}{s} R'(s) \dfrac{0.1}{(s+1)(s+3)}} = \frac{0.1s}{s(s+1)(s+3) + 0.1K_R R'(s)}$$

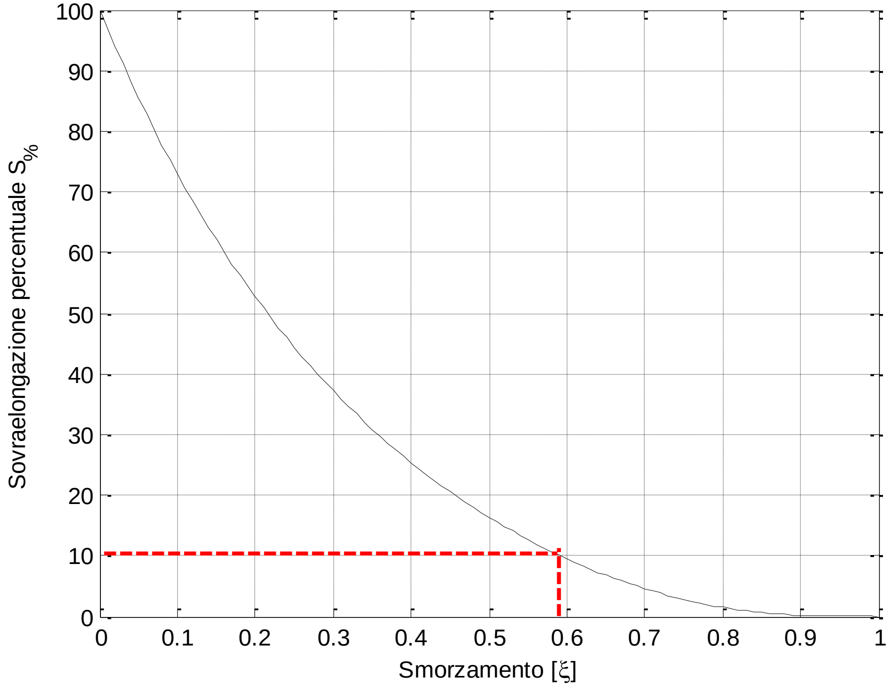
$$Y(s) = W_\xi^y(s) \frac{1}{s^2} = \frac{0.1}{s(s(s+1)(s+3) + 0.1K_R R'(s))}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{0.1}{s(s+1)(s+3)+0.1K_R R'(s)} = \frac{1}{K_R} \leq 0.01$$

$$K_R \geq \frac{1}{0.01} = 100$$

Ora analizziamo le specifiche sul transitorio

- **S3. Sovraelongazione non superiore al 10%**

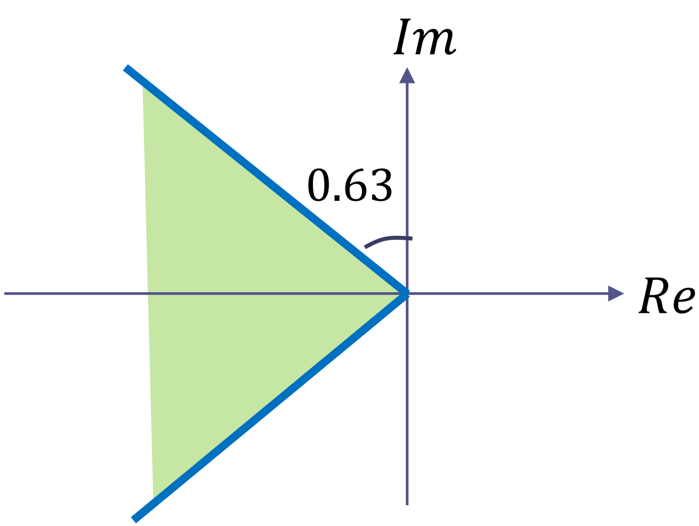


$S_{\%} \leq 10 \Rightarrow \xi \geq 0.59$

$$\beta \geq \beta^* = \tan^{-1}\left\{-\frac{1}{\pi}\ln\frac{S^*}{100}\right\} = 0.63\,rad$$

Ovviamente:

$$\sin(0.63) = 0.59$$



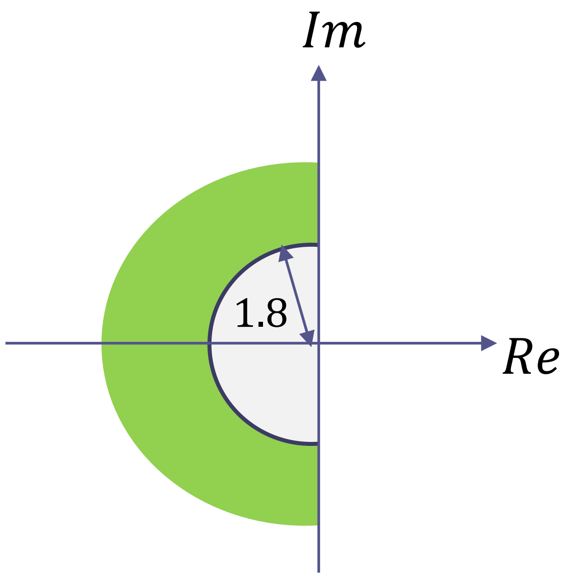
- **S4. Tempo di salita non superiore a 1 secondo**

Una specifica sul transitorio del tipo

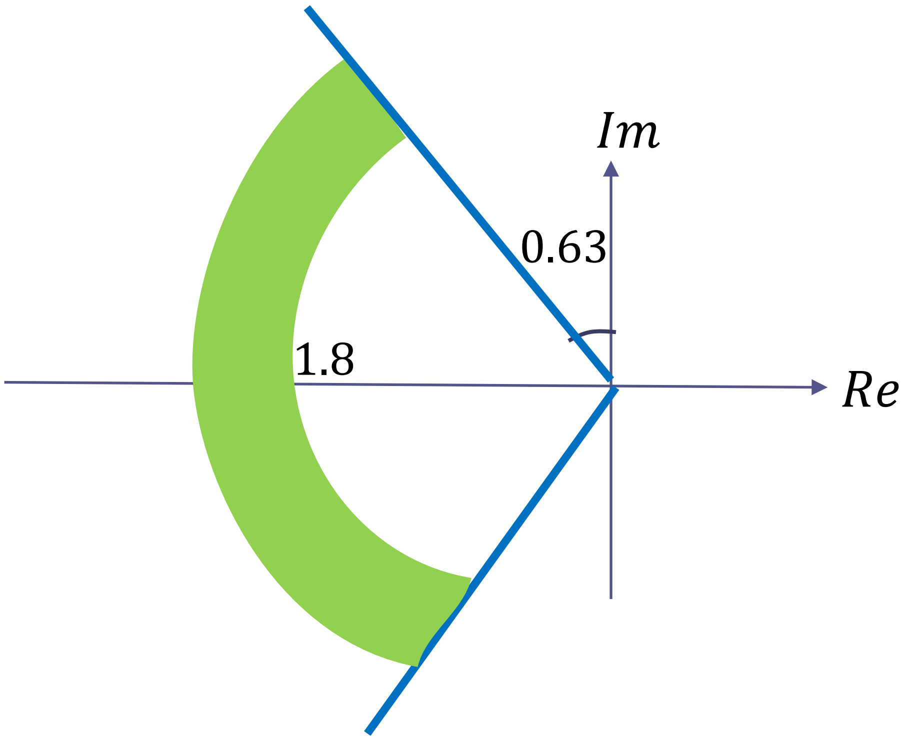
$$t_r \leq T_r^M = 1s$$

implica una corrispondente diseguaglianza su ω_n $\Rightarrow$ $\omega_n \geq \dfrac{1.8}{T_r^M} = 1.8\, rad/s$

Regione ammissibile:



La regione ammissibile derivante dalle specifiche S3 ed S4 è complessivamente la seguente (area verde in figura)



Ora dobbiamo ipotizzare una struttura per il regolatore, tracciare il relativo LdR e «sovrapporlo» alla regione ammissibile per i poli della FdT a ciclo chiuso.

Ora dobbiamo ipotizzare una struttura per il regolatore, tracciare il relativo LdR e «sovrapporlo» alla regione ammissibile per i poli della FdT a ciclo chiuso.

Il processo ha due poli in $s = -1$ ed $s = -3$.

Il regolatore deve contenere un polo nell'origine. Risulta conveniente sfruttare la possibilità di inserire uno zero e realizzare un regolatore con grado relativo nullo. Sovrapponiamo lo zero del regolatore al polo del processo più in bassa frequenza

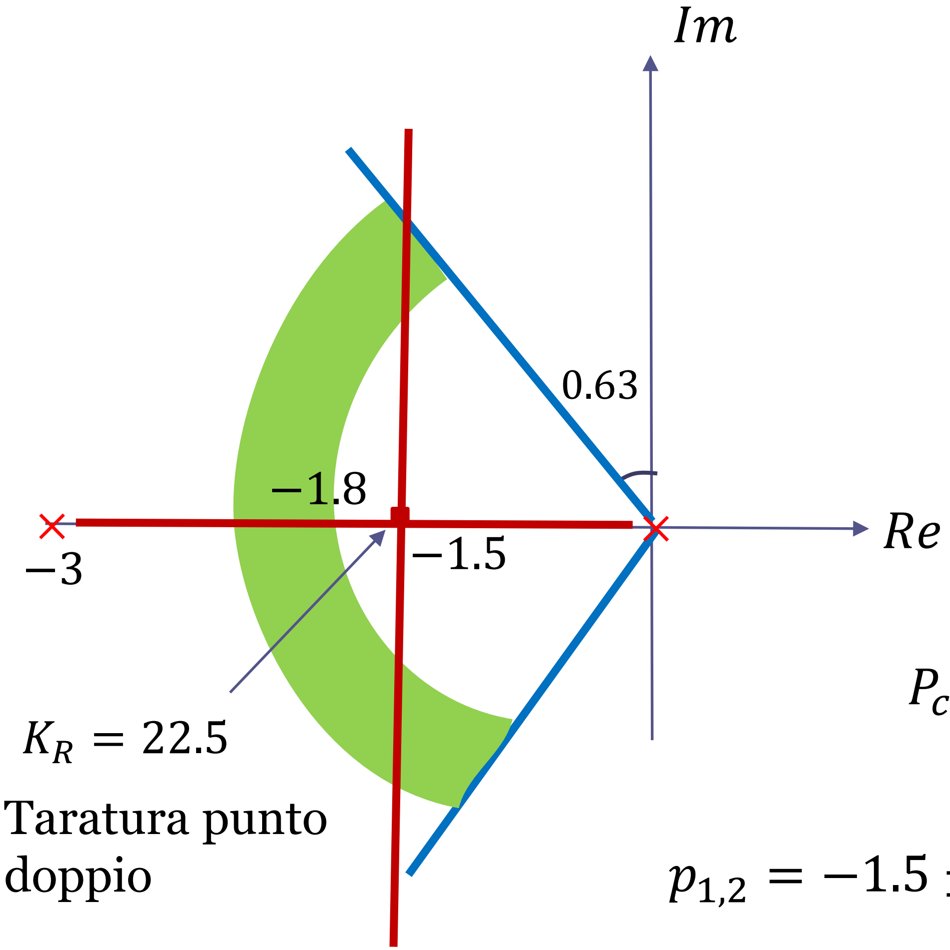
$$R(s) = \frac{K_R(s+1)}{s}$$

$$L(s) = \frac{\cancel{s+1}}{s} \frac{0.1}{\cancel{(s+1)}(s+3)} = \frac{0.1}{s(s+3)}$$

Cancellazione polo-zero

$$L(s) = \frac{0.1}{s(s+3)}$$

Impiegando il controllore proporzionale-integrale $R(s) = \frac{K_R(s+1)}{s}$ vi è un intervallo di valori del guadagno K_R tale che i poli a ciclo chiuso ricadono all'interno della regione ammissibile.



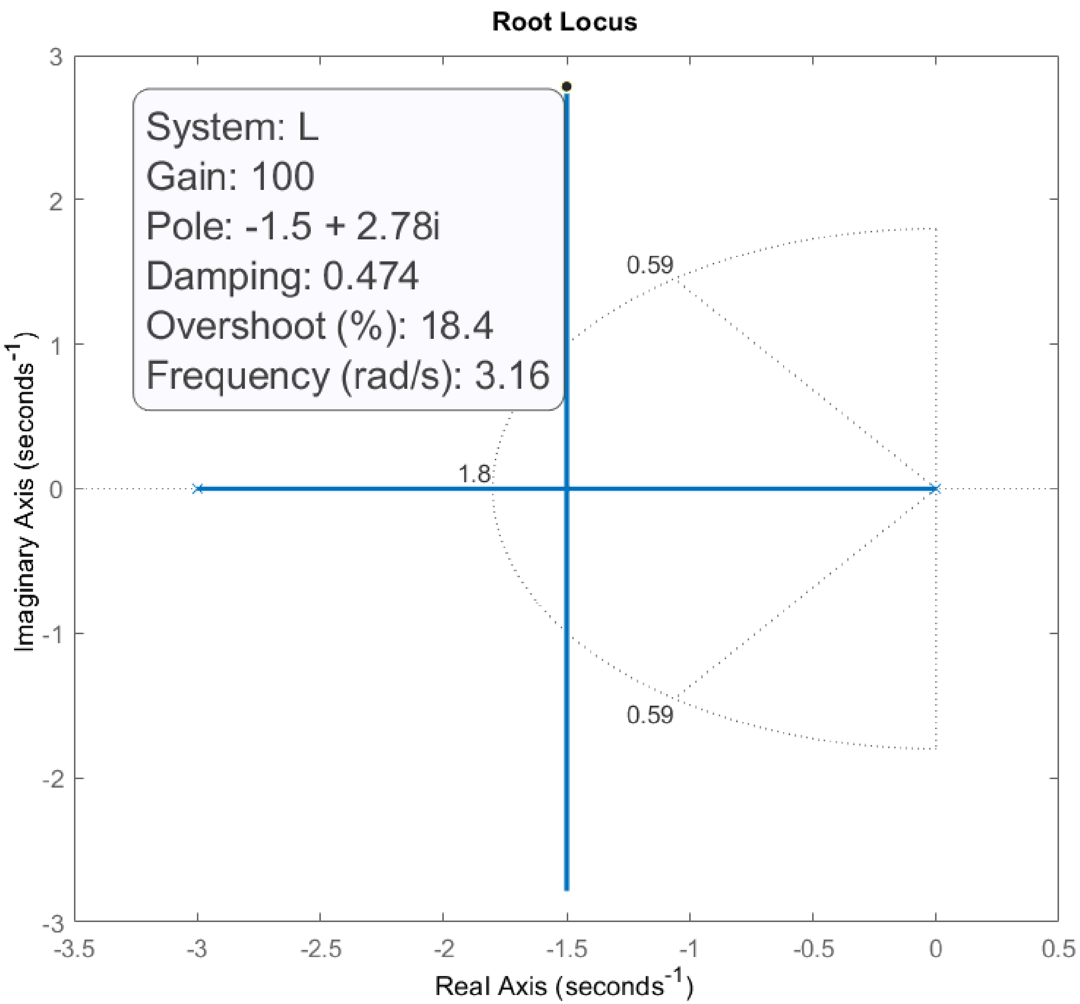
Ricordiamo però che il guadagno K_R deve essere maggiore o uguale a 100.

I poli a ciclo chiuso corrispondenti al valore $K_R = 100$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$P_{car}(s) = s^2 + 3s + 0.1K_R = s^2 + 3s + 10$$

$$p_{1,2} = -1.5 \pm j\,2.78 \qquad \xi = \frac{1.5}{\sqrt{1.5^2 + 2.78^2}} = 0.47$$

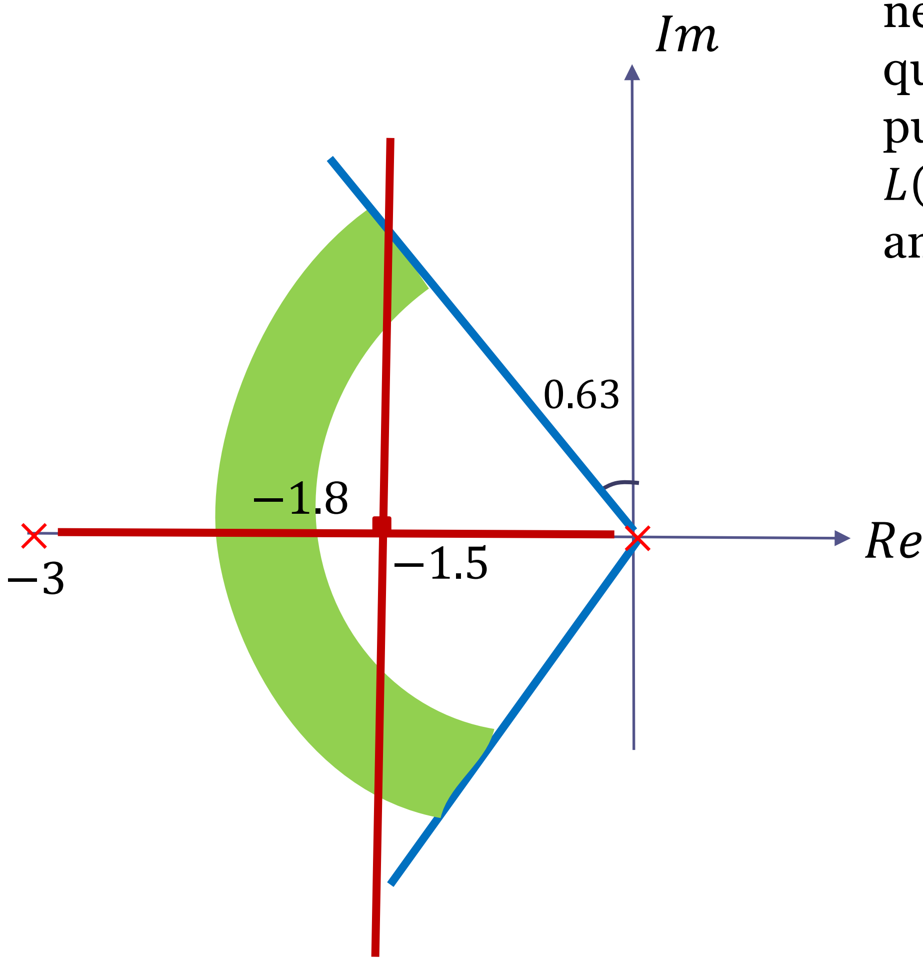
$$L(s) = \frac{0.1}{s(s+3)}$$



Questa figura realizzata con Matlab ci conferma che in corrispondenza del valore $K_R = 100$ i poli sono esterni alla regione ammissibile.

Appare quindi chiaro come impiegando il controllore proporzionale-integrale $R(s) = \frac{K_R(s+1)}{s}$ sotto il vincolo $K_R \geq 100$ risulta impossibile fare in modo che i poli a ciclo chiuso ricadano all'interno della regione ammissibile.

$$L(s) = \frac{0.1}{s(s+3)}$$



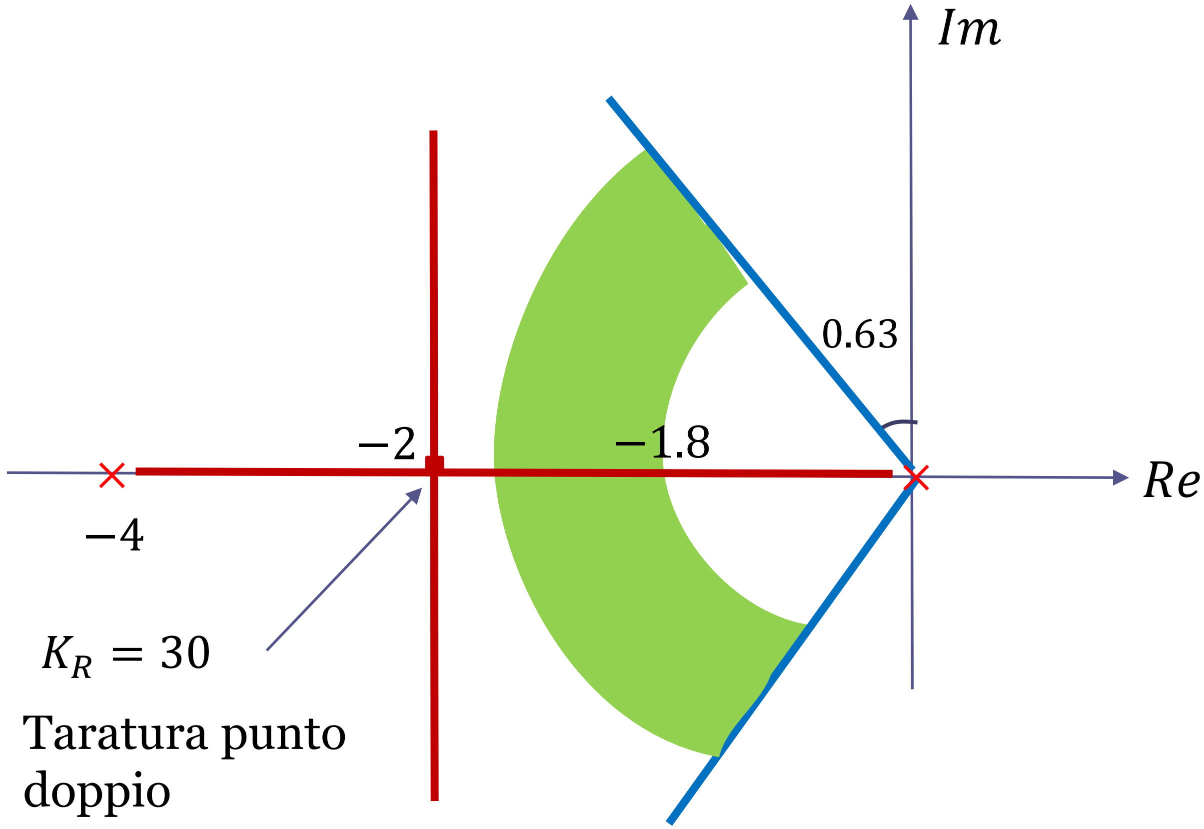
Un fattore certamente limitante è la presenza nella $L(s)$ del polo in -3 , per effetto del quale il punto doppio va a collocarsi nel punto -1.5 (a metà strada fra i due poli di $L(s)$) e cioè esternamente alla regione ammissibile

Se il polo fosse invece collocato più in alta frequenza, ad esempio in -4, si avrebbe il punto doppio in -2, e quindi i rami del luogo verrebbero maggiormente «attratti» all'interno della regione ammissibile

Aggiungiamo nel regolatore una ulteriore coppia polo-zero

E'possibile ottenere il LdR «desiderato» cancellando con uno zero del regolatore il polo del processo in -3 e inserendo un polo in -4

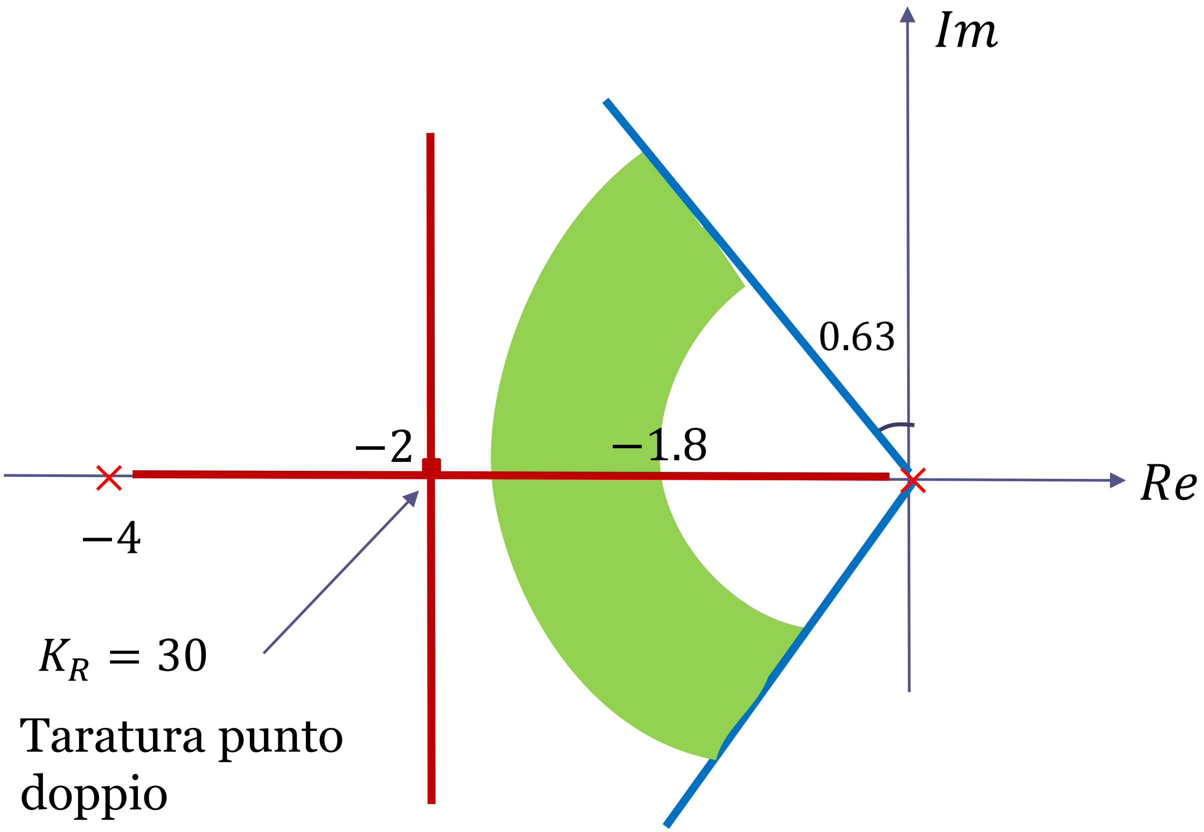
$$R(s) = K_R \frac{s+1}{s} \frac{4}{3} \frac{s+3}{s+4} \qquad L(s) = \frac{4}{3} \frac{\cancel{s+1}}{s} \frac{\cancel{s+3}}{s+4} \frac{0.1}{\cancel{(s+1)}\cancel{(s+3)}} = \frac{4}{3} \frac{0.1}{s(s+4)}$$



Doppia cancellazione polo-zero

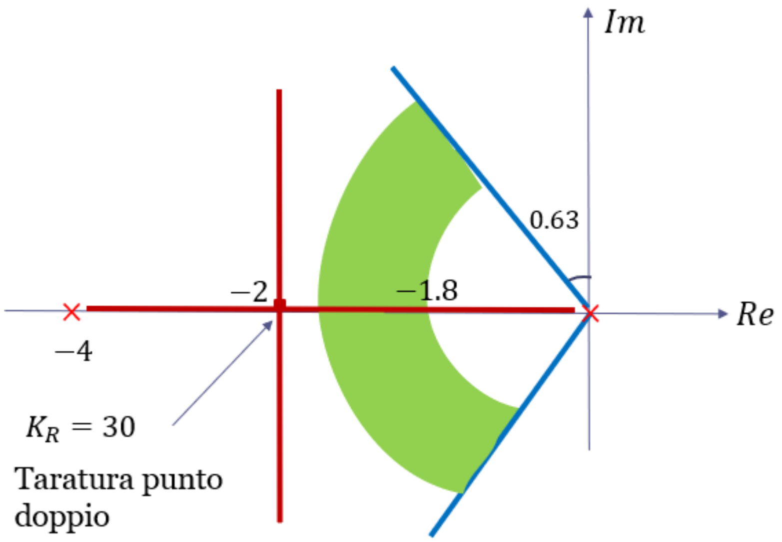
Nuovo LdR

Nuovo LdR



Dobbiamo nuovamente verificare che in corrispondenza del minimo valore consentito per il guadagno statico del controllore, pari a 100, i poli risultanti siano interni alla regione ammissibile.

Per verificare se ciò avvenga o meno, come già fatto in precedenza, calcoliamo i poli a ciclo chiuso in corrispondenza del valore $K_R = 100$ (sappiamo gia che sono complessi coniugati, e che la loro parte reale è pari a -2) e verifichiamo se il valore del loro smorzamento risulti maggiore di 0.59



$$P_{car}(s) = s(s+4) + \frac{4}{3}\, 0.1\, \mathrm{K_R} = \mathrm{s}^2 + 4\mathrm{s} + 0.133\, \mathrm{K_R} \qquad \mathrm{K_R} = 100$$

$$P_{car}(s) = \mathrm{s}^2 + 4\mathrm{s} + 13.3$$

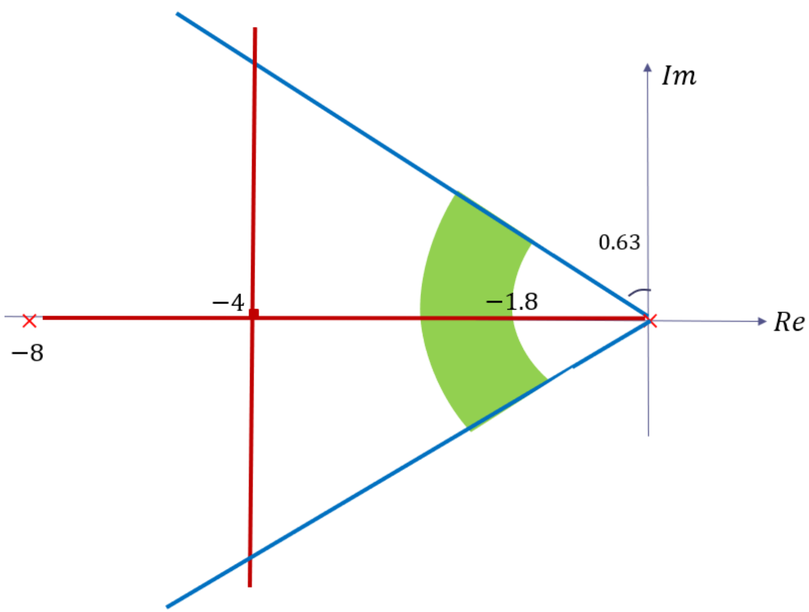
$$p_{1,2} = -2 \pm j\, 3.04 \qquad \xi = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3.04^2}} = 0.54 \qquad \xi < 0.59$$

Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati conseguente alla scelta $\mathrm{K_R} = 100$ è inferiore alla soglia, la coppia di poli risultante è pertanto esterna alla regione ammissibile.

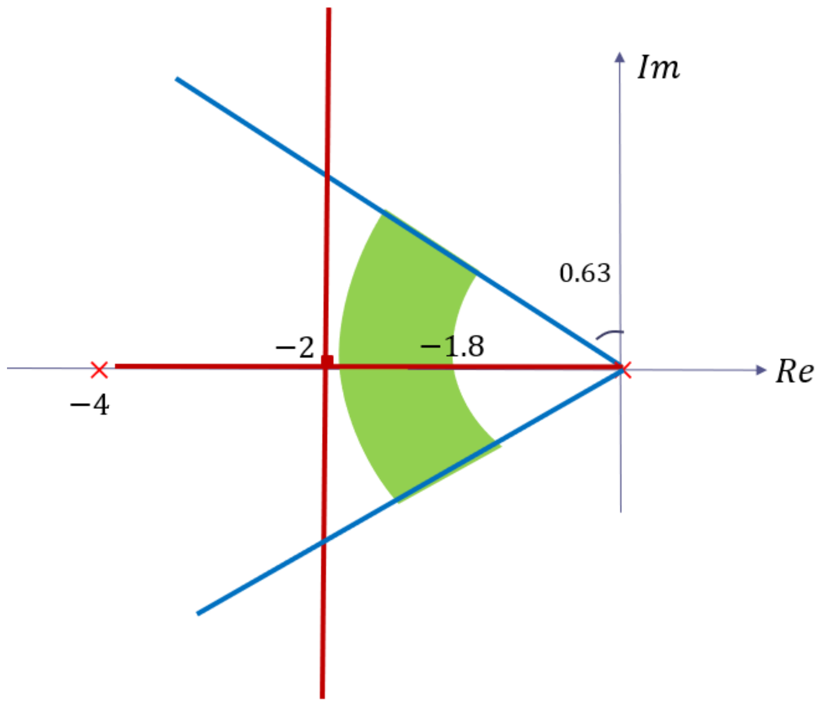
Bisogna ulteriormente rivedere la struttura proposta per il regolatore.

Appare ragionevole collocare ancora più in alta frequenza il polo del regolatore che prima avevamo posto in -4 per ottenere il punto doppio in -2. Possiamo tentare in -8 (v. figura in basso a sinistra) Il punto doppio va ora a collocarsi in -4 e vi è una escursione verticale consentita maggiore prima che la coppia di poli esca dalla regione ammissibile.

Nuova ipotesi di progetto



Precedente ipotesi di progetto

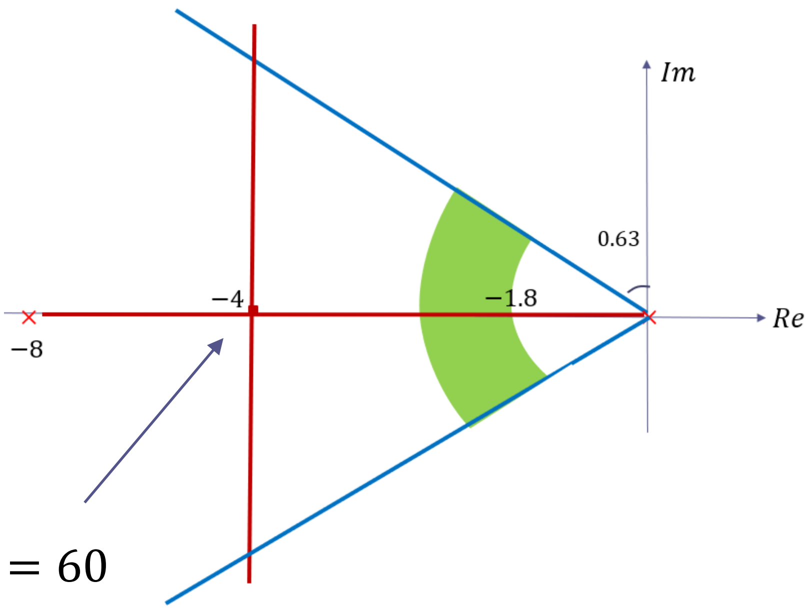


E'possibile ottenere il nuovo LdR «desiderato» cancellando con uno zero del regolatore il polo del processo in -3 e inserendo un polo in -8

$$R(s) = K_R \frac{s+1}{s}\frac{8}{3}\frac{s+3}{s+8} \qquad L(s) = \frac{8}{3}\frac{\cancel{s+1}}{s}\frac{\cancel{s+3}}{s+8}\frac{0.1}{\cancel{(s+1)}\cancel{(s+3)}} = \frac{8}{3}\frac{0.1}{s(s+8)}$$

Doppia cancellazione polo-zero

LdR risultante



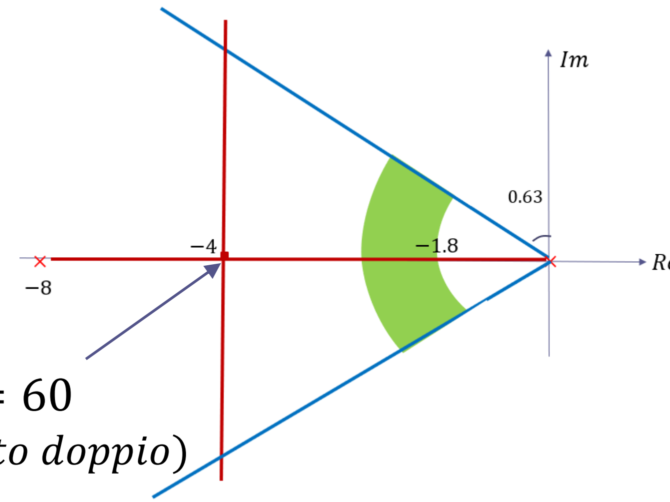
$K_R = 60$

$(taratura\ del\ punto\ doppio)$

Verifichiamo dove vanno a collocarsi i poli a ciclo chiuso in corrispondenza del minimo valore consentito per il guadagno statico del controllore, pari a 100, auspicando che ora giacciano all'interno della regione ammissibile.

La taratura del punto doppio fornisce come valore associato di guadagno $K_R = 60$

Calcoliamo i poli a ciclo chiuso in corrispondenza del valore $K_R = 100$ (sappiamo gia che sono complessi coniugati, e che la loro parte reale è pari a -4) e verifichiamo se il valore del loro smorzamento risulti maggiore di 0.59



$K_R = 60$
$(taratura\ del\ punto\ doppio)$

$$P_{car}(s) = s(s+8) + \frac{8}{3}\,0.1\,\mathrm{K_R} = \mathrm{s}^2 + 8\mathrm{s} + 0.266\,\mathrm{K_R} \qquad \mathrm{K_R} = 100$$

$$P_{car}(s) = \mathrm{s}^2 + 8\mathrm{s} + 26.6$$

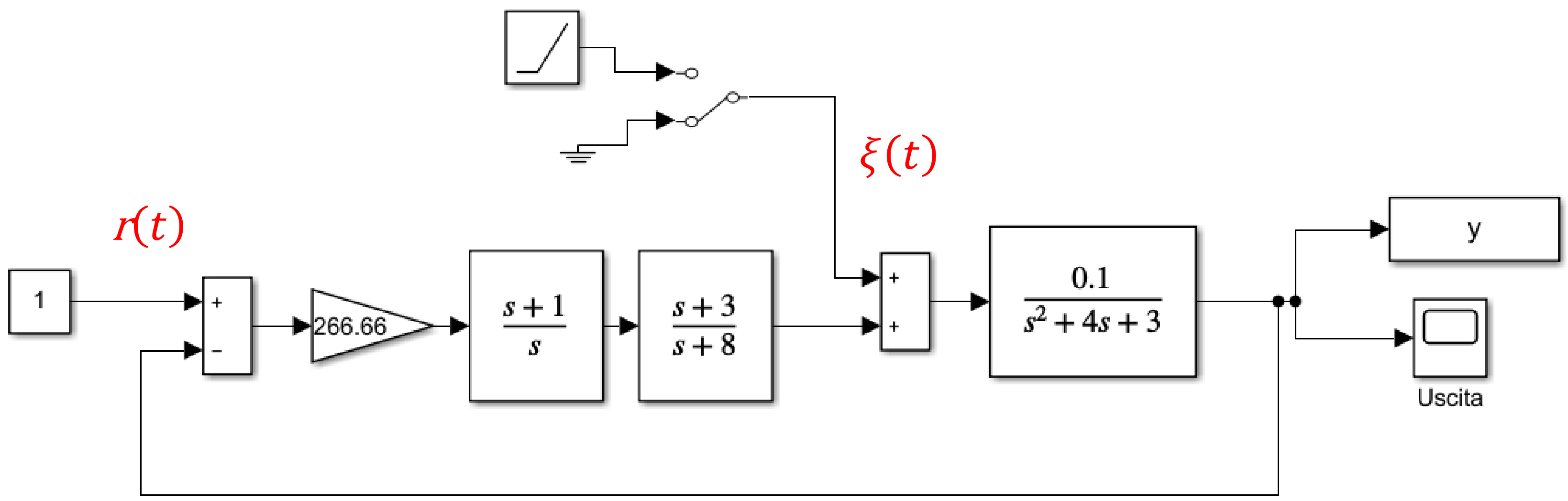
$$p_{1,2} = -4 \pm j\,3.25 \qquad \xi = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3.25^2}} = 0.77 \qquad \xi > 0.59$$

Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati conseguente alla scelta $\mathrm{K_R} = 100$ è superiore alla soglia di 0.59, la coppia di poli risultante è pertanto interna alla regione ammissibile.

Quindi il seguente regolatore risolve il problema di progetto

$$R(s) = 100\,\frac{s+1}{s}\,\frac{\frac{1}{3}s+1}{\frac{1}{8}s+1} = 266.66\,\frac{s+1}{s}\,\frac{s+3}{s+8}$$

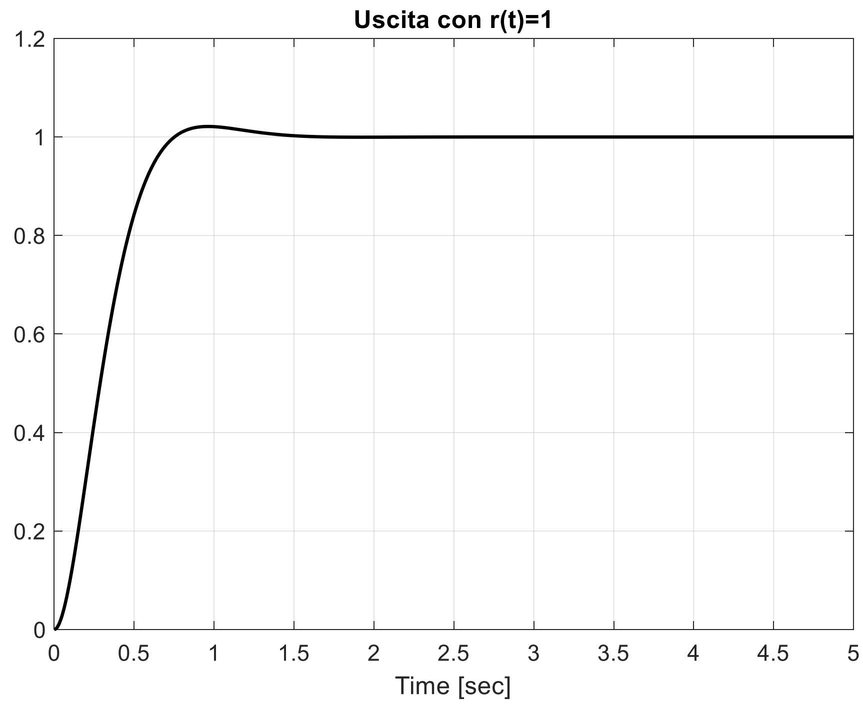
Verifichiamo mediante simulazione le prestazioni del sistema di controllo progettato



File: SintesiLdR02a.slx

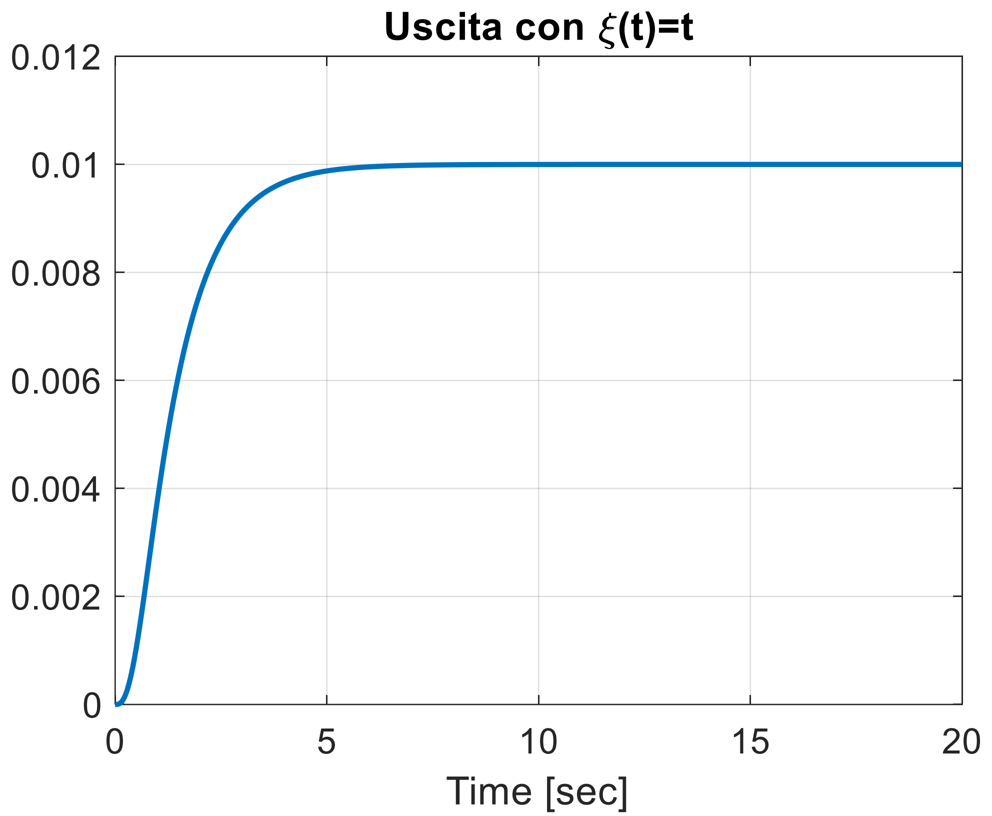
- S1. Un set-point costante deve essere riprodotto a regime con un errore nullo

$r(t) = 1$



- S2. Un disturbo a rampa unitaria deve indurre una perturbazione costante sull'uscita di ampiezza non superiore a 0.01

$\xi(t) = t$



- S3. Sovraelongazione non superiore al 10%
- S4. Tempo di salita non superiore a 1 secondo

$r(t) = 1$