

# Controlli automatici

## Tracciamento e interpretazione del luogo delle radici

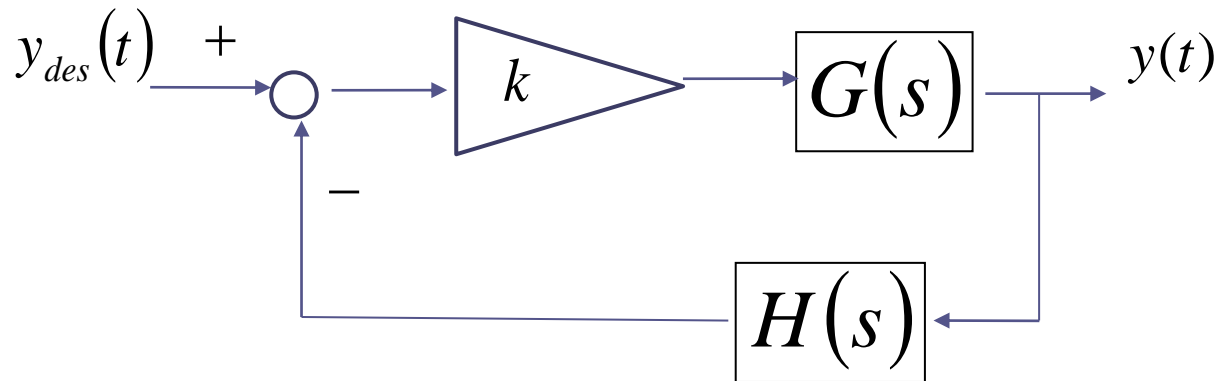
**Ing. Alessandro Pisano**  
apisano@unica.it

Il luogo delle radici nasce per risolvere il seguente problema:

Dati due polinomi  $P_1(s)$  e  $P_2(s)$ , determinare come variano, al variare del numero reale positivo  $k$ , le radici del polinomio

$$P(s) = P_1(s) + kP_2(s) \quad k \in [0, \infty)$$

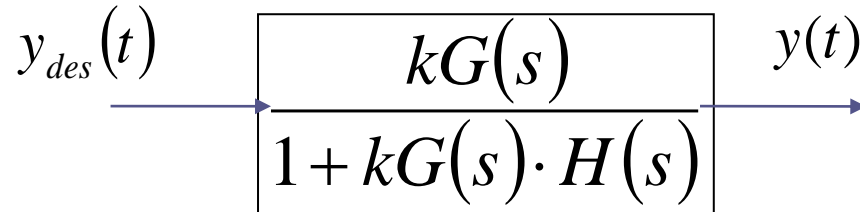
Nel contesto della teoria dei controlli, tale problema si incontra nel momento in cui si analizza il seguente sistema di controllo in retroazione



e ci si pone il problema di determinare la dipendenza dei poli della FdT a ciclo chiuso dal guadagno  $k$ .

**N.B.** La FdT  $G(s)$  “accorpa”, a meno del guadagno  $k$ , le FdT del regolatore e del processo. L'esempio di analisi del cruise control, sviluppato un po' più avanti, chiarirà bene questo aspetto.

## Schema equivalente



Siano

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \quad H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

La FdT a ciclo chiuso è

$$W_{y_{des}}^y(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s) \cdot H(s)} = \frac{k \frac{N_G(s)}{D_G(s)}}{1 + k \frac{N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)}} = \frac{kN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + kN_G(s)N_H(s)}$$

$$W_{y_{des}}^y(s) = \frac{kN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + kN_G(s)N_H(s)}$$

I **poli** della FdT a ciclo chiuso sono le radici del “**polinomio caratteristico**”

$$P_{car}(s) = D_G(s)D_H(s) + kN_G(s)N_H(s)$$

che può essere espresso nella forma

$$P_{car}(s) = P_1(s) + kP_2(s)$$

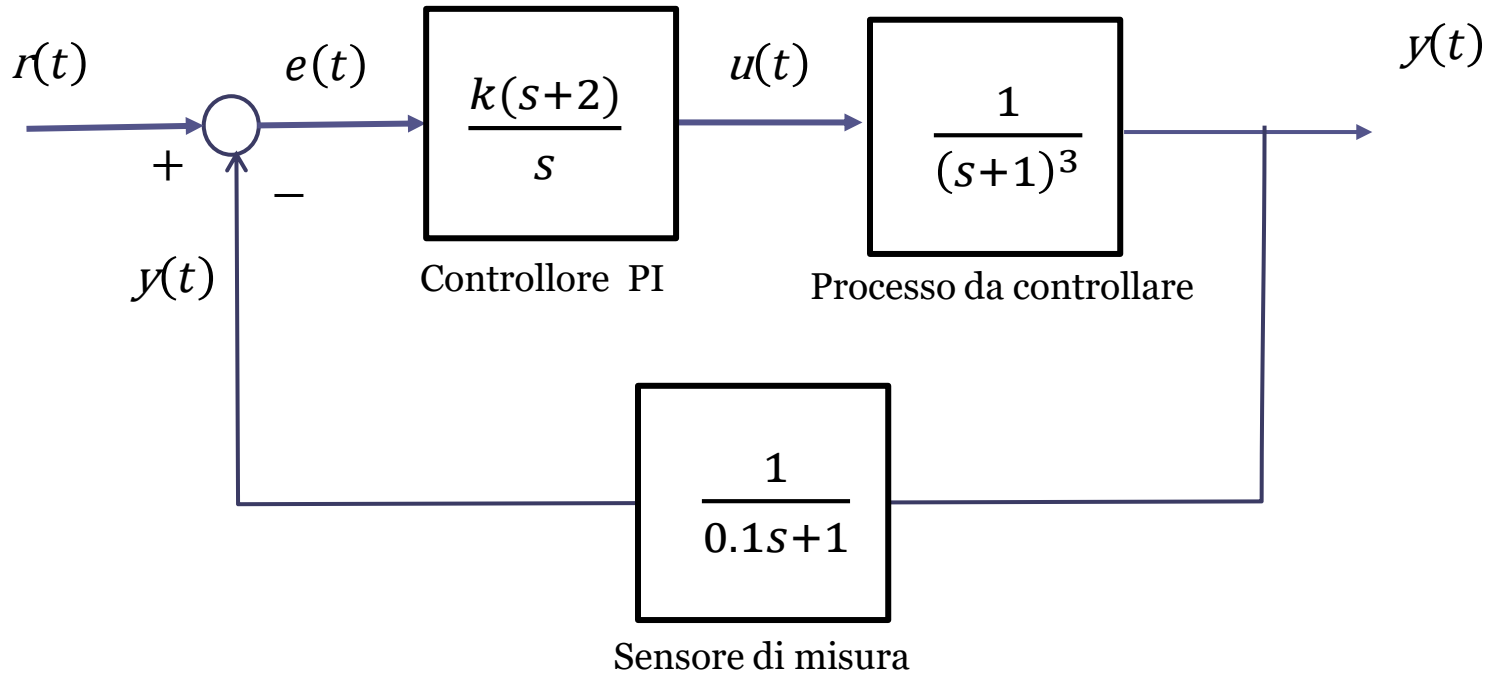
$$P_1(s) = D_G(s)D_H(s)$$

$$P_2(s) = N_G(s)N_H(s)$$

**NB** Gli zeri della FdT a ciclo chiuso non dipendono dal guadagno **k**

Gli zeri della FdT a ciclo chiuso sono fissi al variare di **k**, e sono costituiti dall'insieme degli **zeri della FdT  $G(s)$**  (che rappresenta la cascata tra la FdT del processo e la parte dinamica del regolatore) e dei poli **della FdT  $H(s)$**  (che rappresenta la dinamica del sensore di misura)

## Esempio



$$W_r^y(s) = \frac{\frac{k(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^3}}{1 + \frac{k(s+2)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \frac{1}{0.1s+1}} = \frac{k(s+2)}{s(s+1)^3(0.1s+1) + k(s+2)}$$

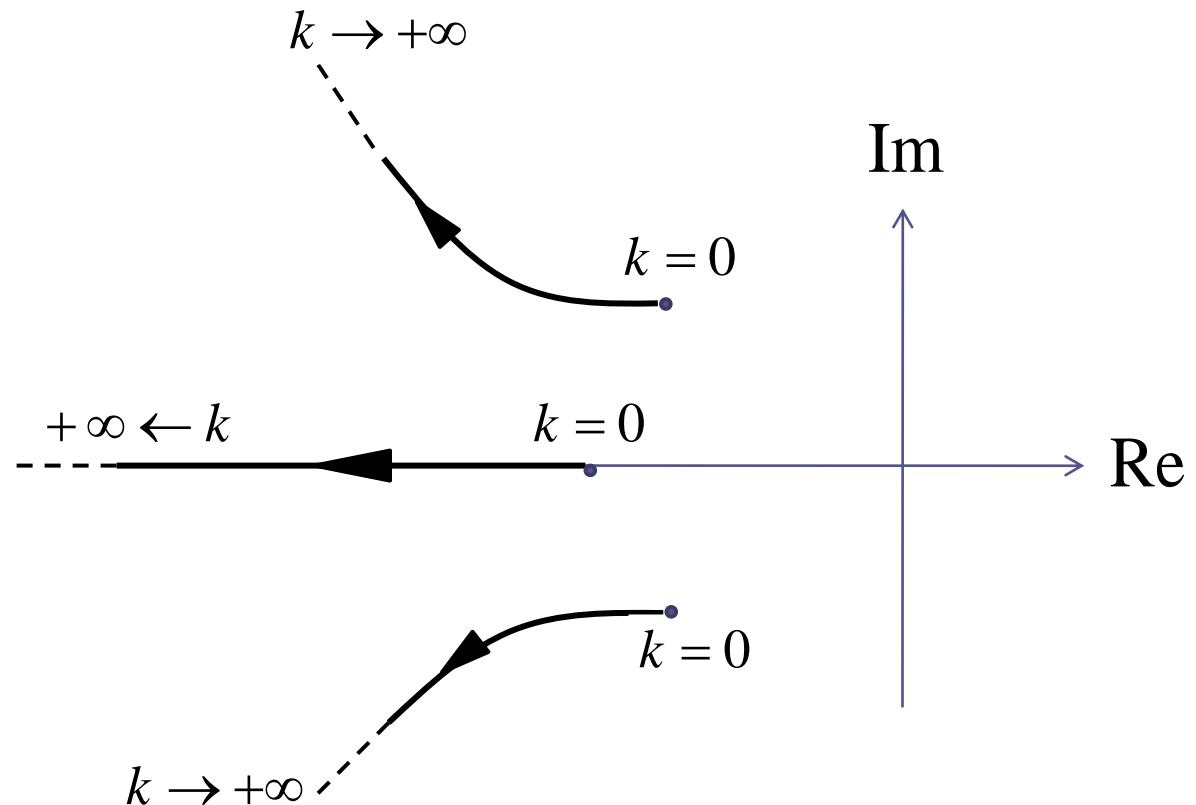
$$P_{car}(s) = s(s+1)^3(0.1s+1) + k(s+2)$$

Il LdR è una costruzione grafica che consiste nell'insieme delle “traiettorie” che i poli a ciclo chiuso (le  $n$  radici del polinomio  $P_{car}(s)$ ) percorrono nel piano complesso quando il parametro  $k$  varia tra zero e infinito.

Si avranno pertanto  **$n$  curve parametriche** nel piano, **orientate** secondo il verso crescente del parametro  $k$

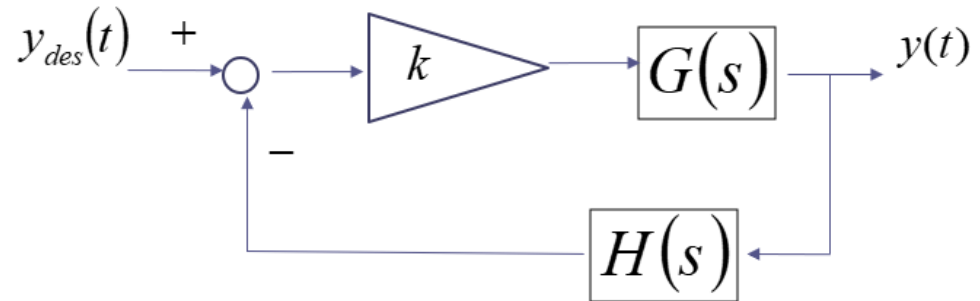
Es. Un possibile LdR  
per  $n=3$

Questo ipotetico andamento per i rami del LdR ci rivelerebbe che il sistema in esame è **asintoticamente stabile a ciclo chiuso per qualunque valore di  $k$** , e inoltre il sistema mostra una **risposta oscillatoria per qualunque valore di  $k$**



Operativamente, per tracciare il LdR è conveniente riferirsi alla **FdT a ciclo aperto** (escludendo dal ciclo il guadagno  $k$ )

$$L(s) = G(s) \cdot H(s)$$



parametrizzata nella maniera seguente (fattorizzazione poli-zeri, o “PZ”)

$$L(s) = \bar{k} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

$\bar{k}$  è il guadagno in alta frequenza della  $L(s)$

$$P_{car}(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) + k\bar{k}(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)$$

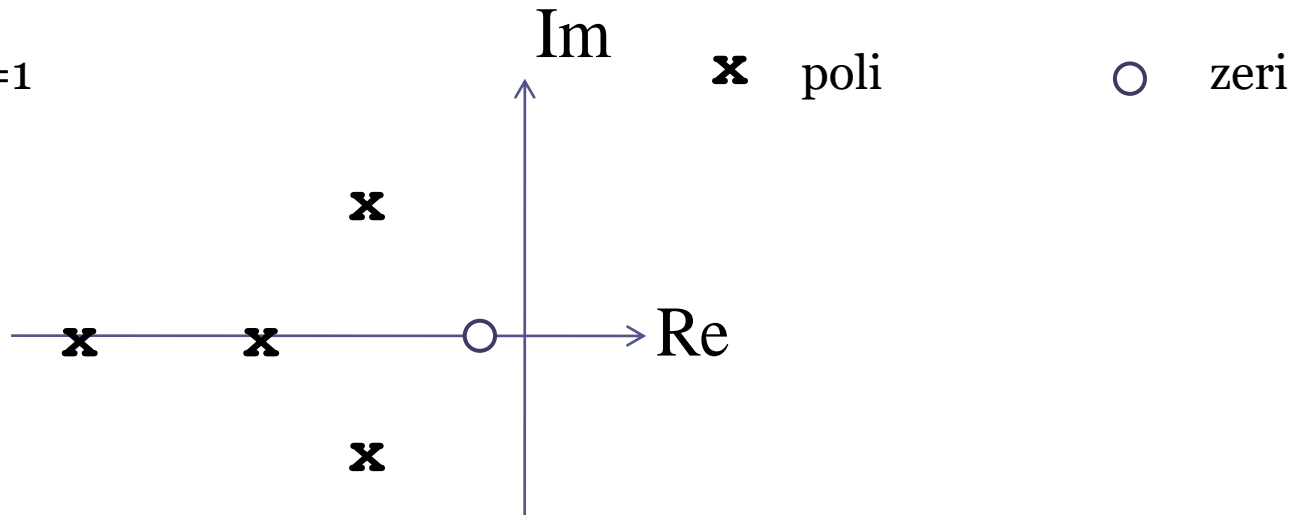
↓  
Grado  $n$

**Poli** della FdT a ciclo aperto  $L(s)$

**Zeri** della FdT a ciclo aperto  $L(s)$

La costruzione del luogo ha inizio **riportando sul piano complesso le posizioni dei poli  $p_i$  e degli zeri  $z_i$  della FdT  $L(s)$  a ciclo aperto**

Es.  $n=4$   $m=1$



I **punti di partenza** ( $k=0$ ) degli  $n$  rami del LdR sono gli  $n$  poli della Fdt a ciclo aperto identificati in figura.

**Cio non deve stupire perché:**

$$P_{car}(s) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) + k\bar{k}(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)$$

$k = 0$



Il luogo ha  $n$  rami, dei quali, per  $k \rightarrow +\infty$

$m$  convergono verso gli zeri

$n-m$  convergono verso **direzioni asintotiche** (una “stella” di semirette che si dipartono dal punto dell’asse reale – detto **CENTRO STELLA** - avente ascissa  $x_s$ )

Sia il luogo delle radici che l’insieme delle direzioni asintotiche risultano essere **simmetrici rispetto all’asse reale**.

## ASINTOTI

Centro stella

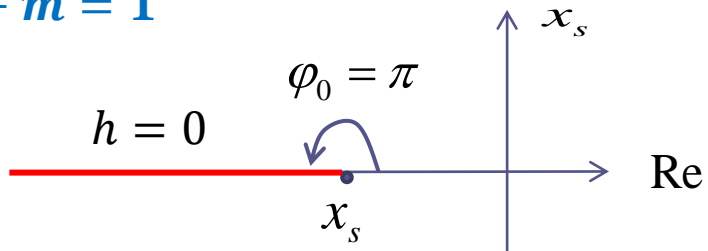
$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

Angoli formati con l’asse  
reale positivo

$$\varphi_h = \frac{(2h + 1)\pi}{n - m} \quad h = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

$$\varphi_h = \frac{(2h+1)\pi}{n-m} \quad h = 0, 1, \dots, n-m-1$$

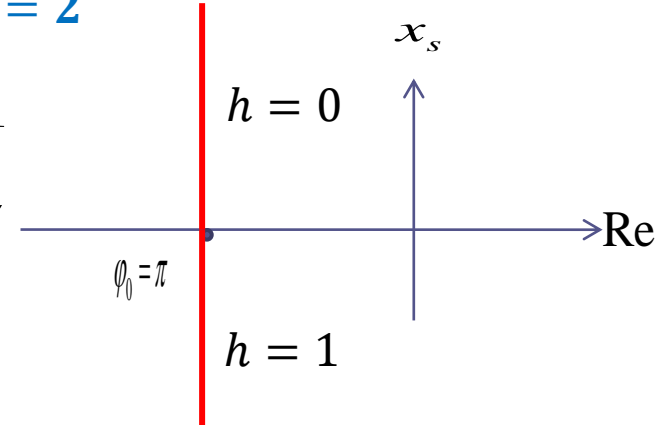
$$n-m=1$$



$$n-m=2$$

**Im**

**$x_s$**

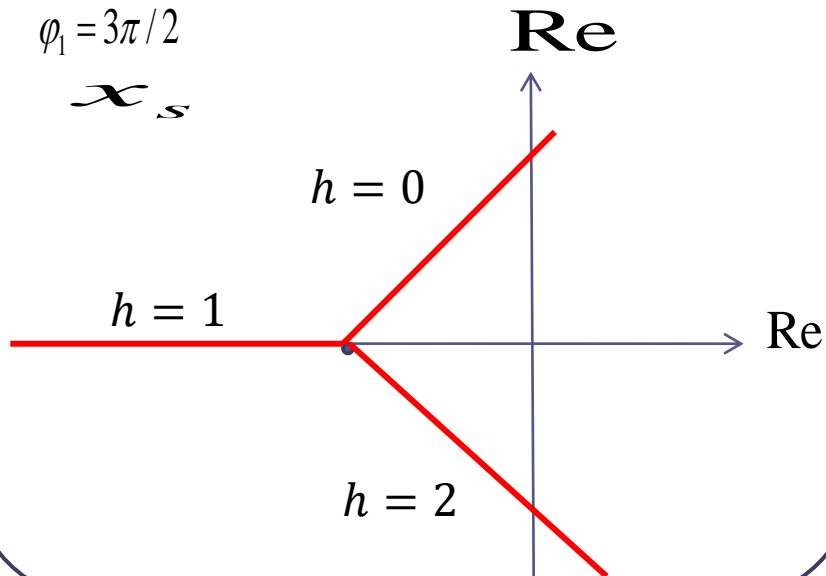


$$n-m=3$$

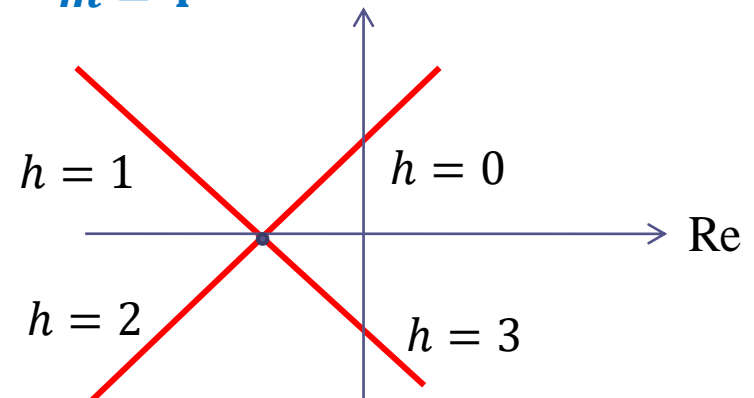
$$\varphi_0 = \pi/2$$

$$\varphi_1 = 3\pi/2$$

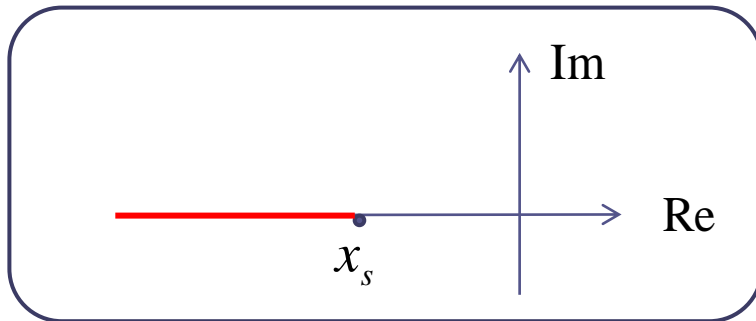
**$x_s$**



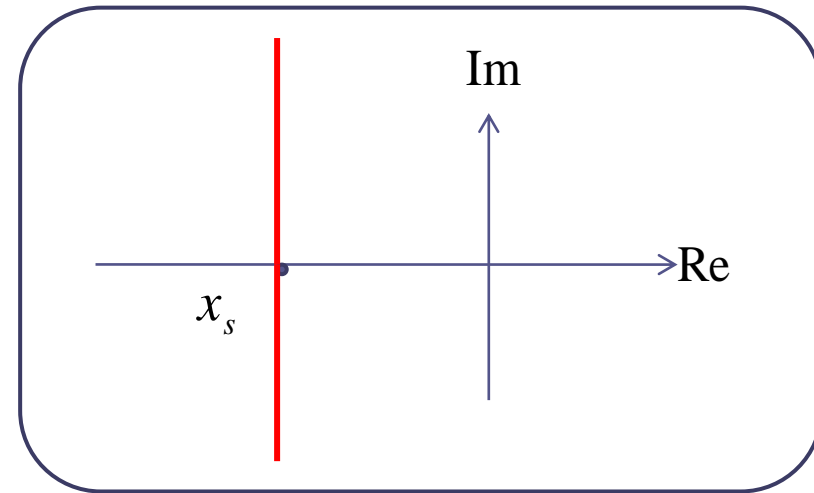
$$n-m=4$$



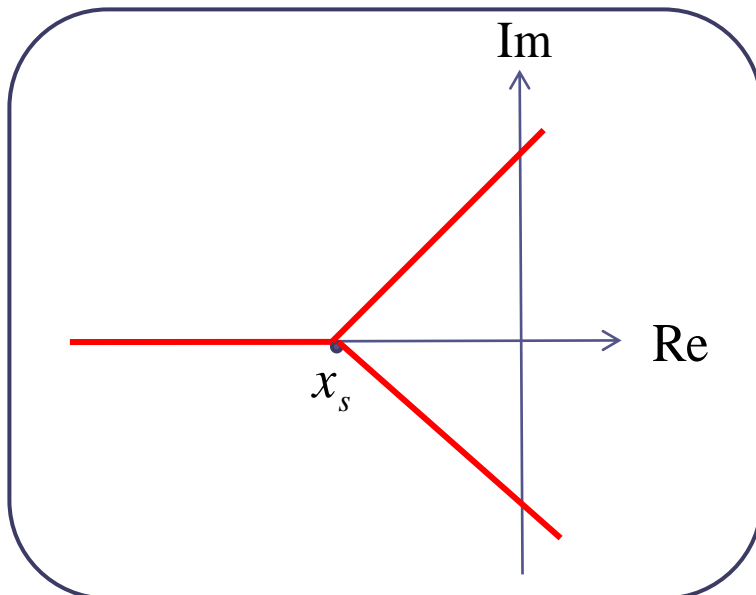
$$n - m = 1$$



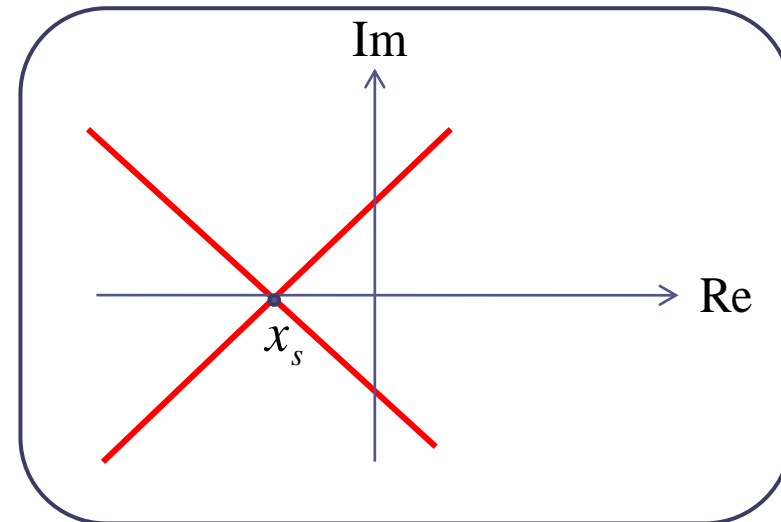
$$n - m = 2$$



$$n - m = 3$$



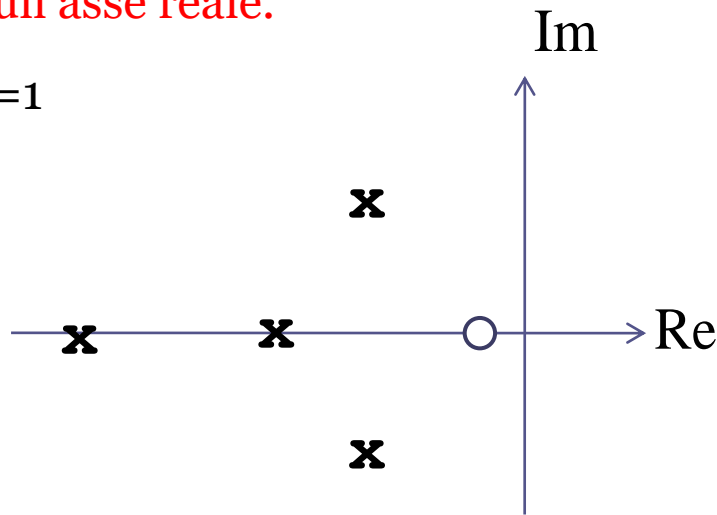
$$n - m = 4$$



**Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero DISPARI di poli e zeri della FdT a ciclo aperto  $L(s)$**

N.B. Nell'applicazione di questa regola, si considerano unicamente i poli e gli zeri della  $L(s)$  posizionati sull'asse reale.

Es.  $n=4$   $m=1$

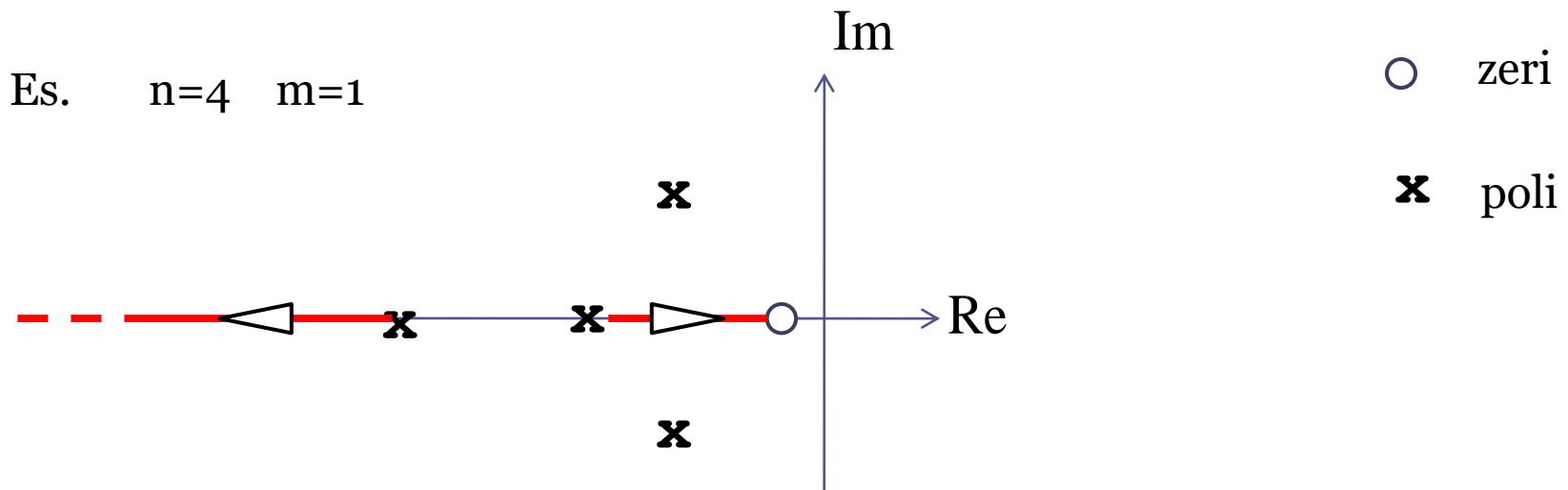


○ zeri

✕ poli

**Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e zeri della  $L(s)$**

**N.B.** Nell'applicazione di questa regola, si considerano unicamente i poli e gli zeri posizionati sull'asse reale.



I segmenti dell'asse reale identificati a seguito di tale proprietà sono tali che:

se uno di essi unisce un polo ad uno zero allora tale segmento **costituisce uno dei rami** del luogo delle radici.

se uno di essi parte da un polo e poi evolve verso meno infinito allora tale segmento **costituisce uno dei rami** del luogo delle radici.

Capita talvolta che due (o più) rami del luogo delle radici confluiscono l'uno verso l'altro fino a incontrarsi in un punto.

Tali punti vengono chiamati **punti doppi**.

Tutti i punti doppi  $s^*$ , **se ve ne sono**, soddisfano la relazione

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s^* - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s^* - z_i} = 0$$

detta **“equazione dei punti doppi”**

NB L'equazione dei punti doppi può fornire anche soluzioni aggiuntive “non ammissibili” (in quanto non appartenenti al luogo delle radici) che vanno scartate.

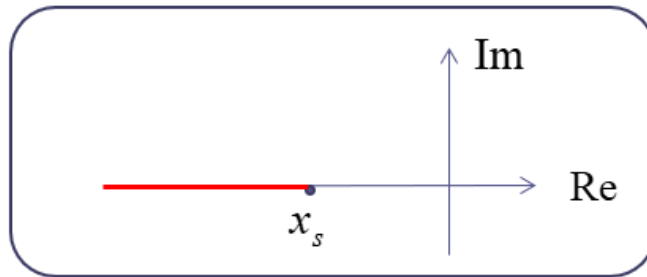
**L'insieme di tutte le “regole di tracciamento” date consente di definire in maniera alquanto attendibile l'andamento del luogo**

## Lista delle regole di tracciamento

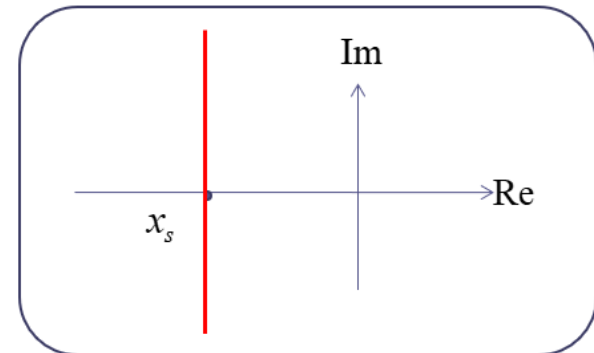
1. Si riporta sul piano complesso le posizioni dei poli  $p_i$  e degli zeri  $z_i$  della  $L(s)$
2. Gli  $n$  rami partono per  $k=0$  dai poli  $p_i$  e convergono, per valori di  $k$  tendenti a  $+\infty$ , verso gli zeri  $z_i$  o verso le direzioni asintotiche

3. Centro stella degli asintoti
 
$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$
4. Direzioni asintotiche

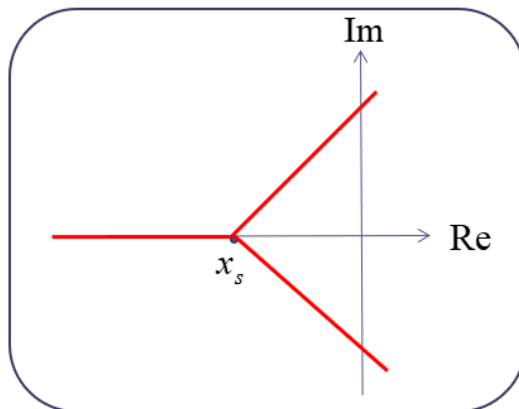
$$n - m = 1$$



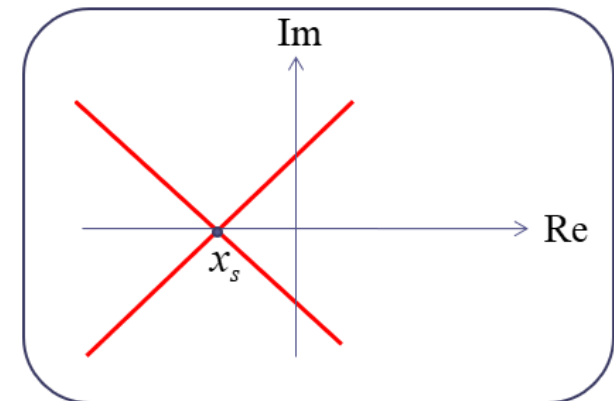
$$n - m = 2$$



$$n - m = 3$$



$$n - m = 4$$

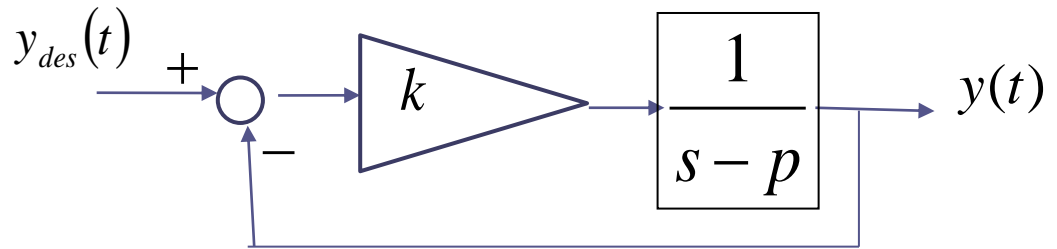


5. Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.
6. Appartengono al luogo delle radici tutti i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e zeri. Se qualcuno di tali segmenti unisce un polo ad uno zero, oppure se va da un polo verso meno infinito, allora è uno dei rami del luogo delle radici.
7. Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s^* - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s^* - z_i} = 0$$

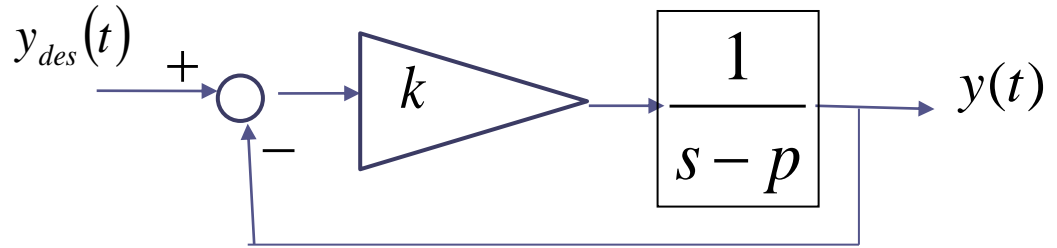
## Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s - p}$$



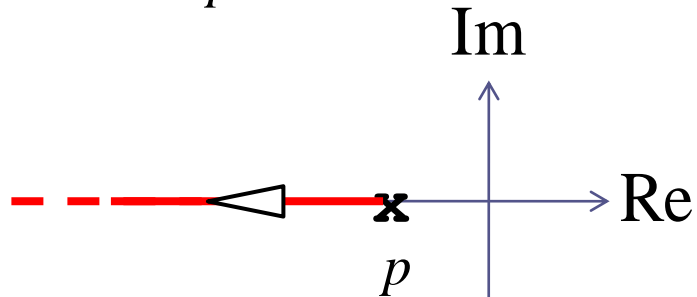
## Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s - p}$$



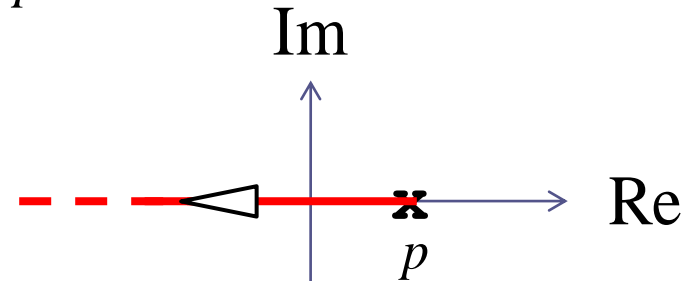
Due casi:

$$p < 0$$



“Velocizzazione” della dinamica del sistema a ciclo chiuso

$$p > 0$$



Stabilizzazione di un sistema instabile a ciclo aperto ( $k > p$ )

Appartiene al luogo il segmento alla sinistra del polo, ed è anche uno dei rami del luogo (l'unico ramo in questo caso)

$$W_{y_{des}}^y(s) = \frac{k}{s - p + k}$$

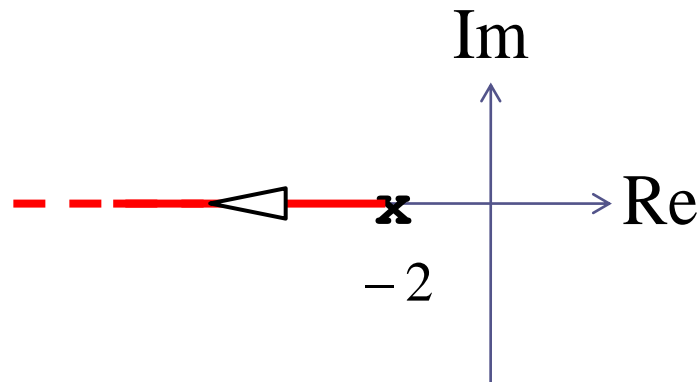
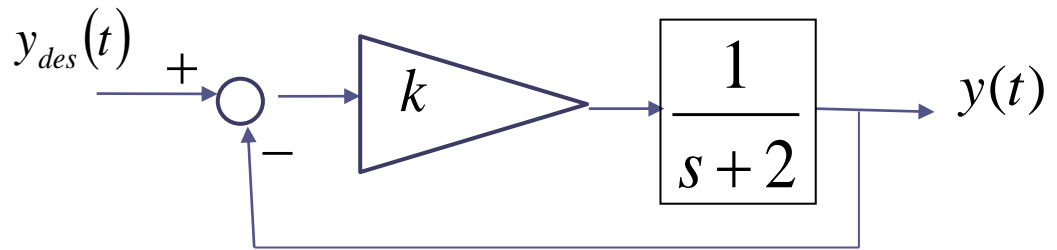
$$P_{car}(s) = s - p + k$$

$$s = p - k$$

## Esempio (cont.)

$$L(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$p = -2$$



Polo della FdT a ciclo chiuso  
e relativa costante di tempo

$$s = -(2+k)$$

$$\tau = \frac{1}{2+k}$$

FdT a ciclo chiuso

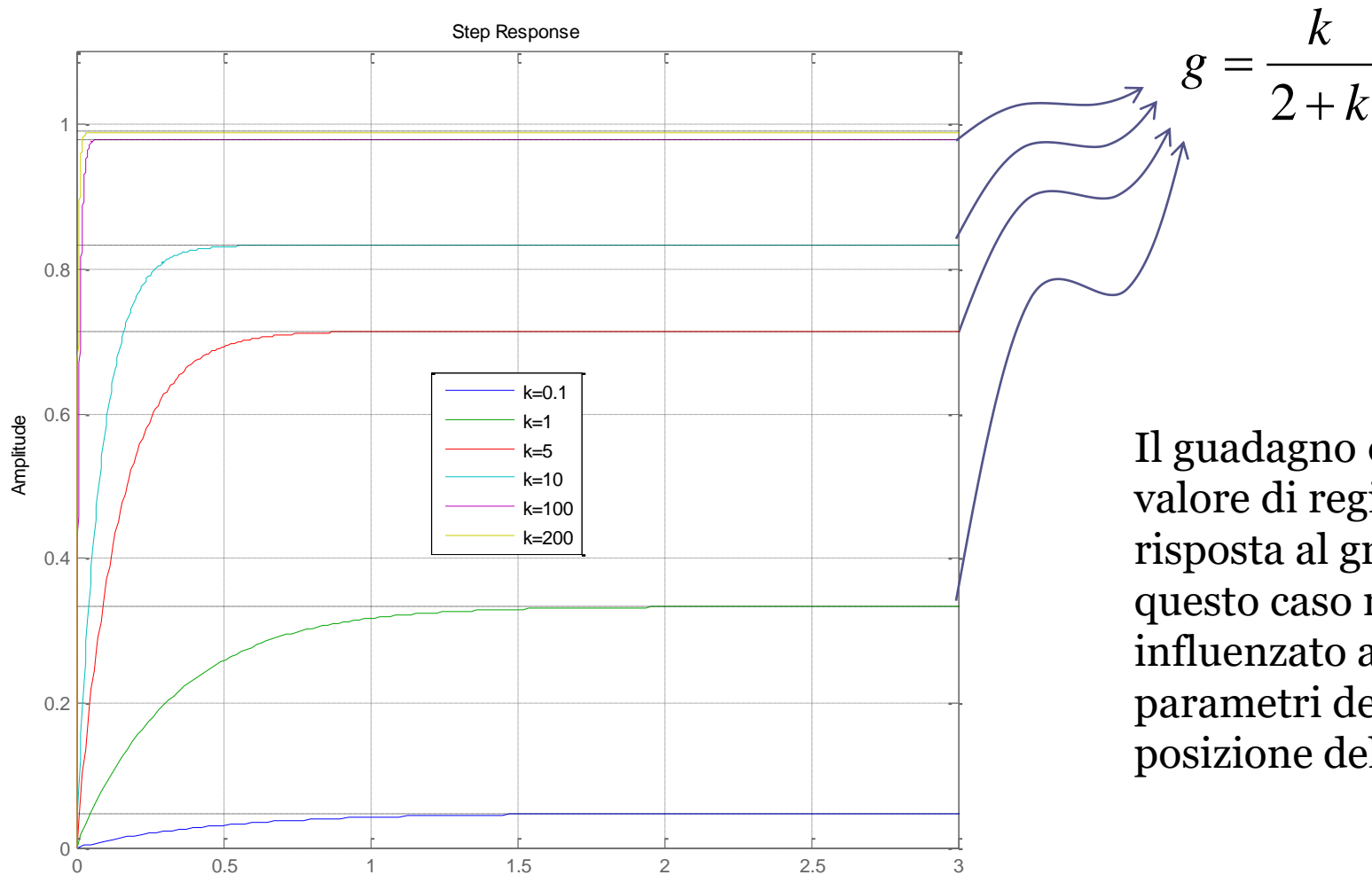
$$W_{y_{des}}^y(s) = \frac{k}{s+2+k}$$

Guadagno statico della  
FdT a ciclo chiuso

$$g = W_{y_{des}}^y(0) = \frac{k}{2+k}$$

Il guadagno statico della FdT  
a ciclo chiuso dipende da  $k$ , e  
tende ad 1 per  $k$  che tende a  
infinito

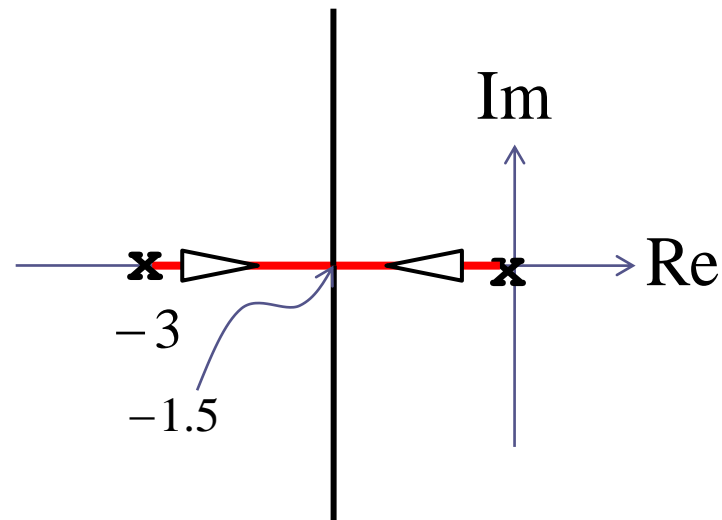
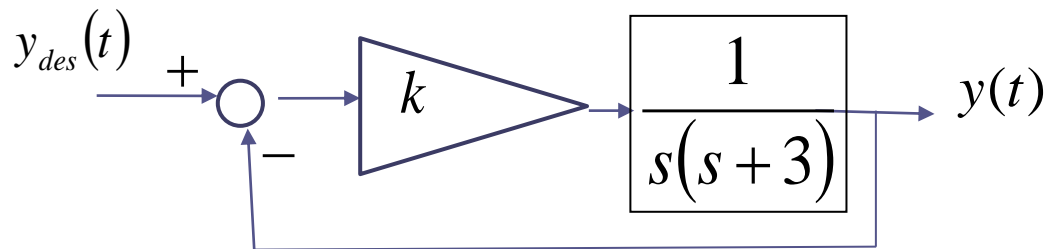
Ci attendiamo che al crescere di  $k$  la risposta sarà **sempre monotona crescente**, con **tempi di assestamento via via più ridotti** a seguito dell'allontanamento dall'origine del polo a ciclo chiuso (cui corrisponde una riduzione della costante di tempo associata). Il valore di regime delle risposte è differente al variare di  $k$ .



Il guadagno determina il valore di regime della risposta al gradino, e in questo caso risulta influenzato anche dai parametri del sistema (la posizione del polo in  $-2$ )

## Es. 2

$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$



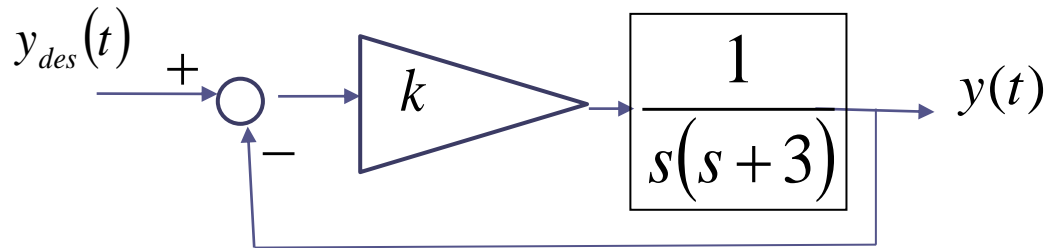
Appartiene al LdR il segmento che unisce i due poli

Ci sarà necessariamente un punto doppio compreso tra 0 e -3.

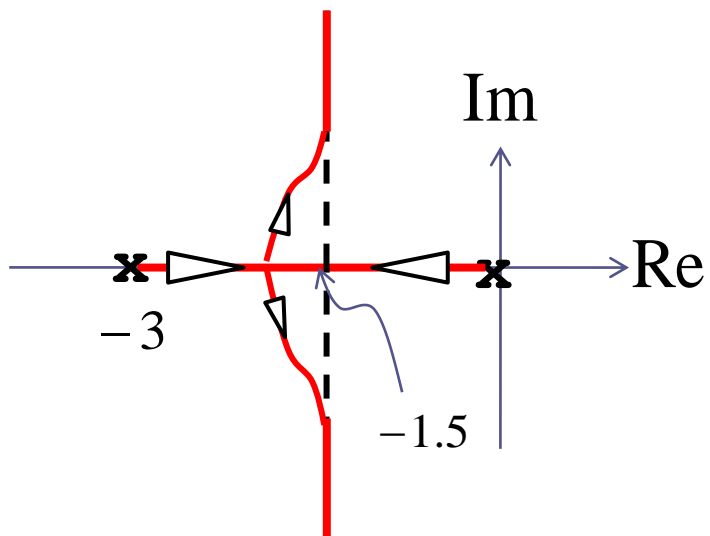
Centro stella  $x_s = \frac{-3-0}{2} = -1.5$

Asintoti a + e - 90 gradi

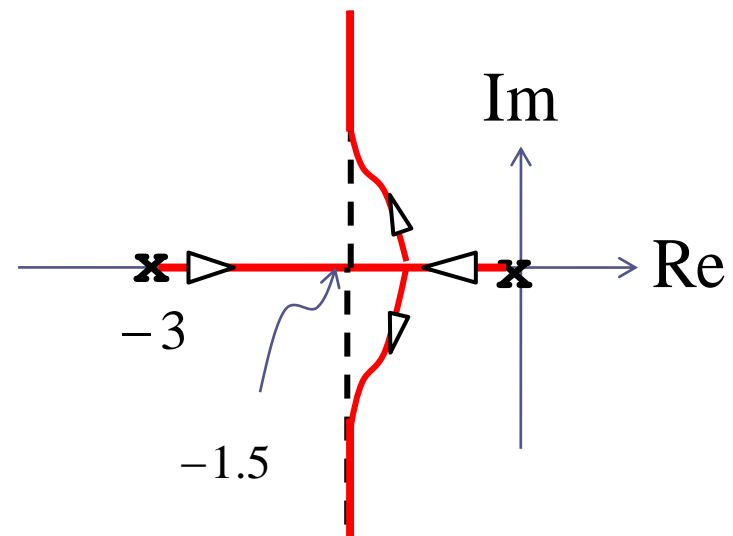
$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$



Se il punto doppio sta a  
**sinistra del centro stella**  
si avra un LdR:



Se il punto doppio sta a  
**destra del centro stella**  
si avra un LdR:



Equazione dei punti doppi

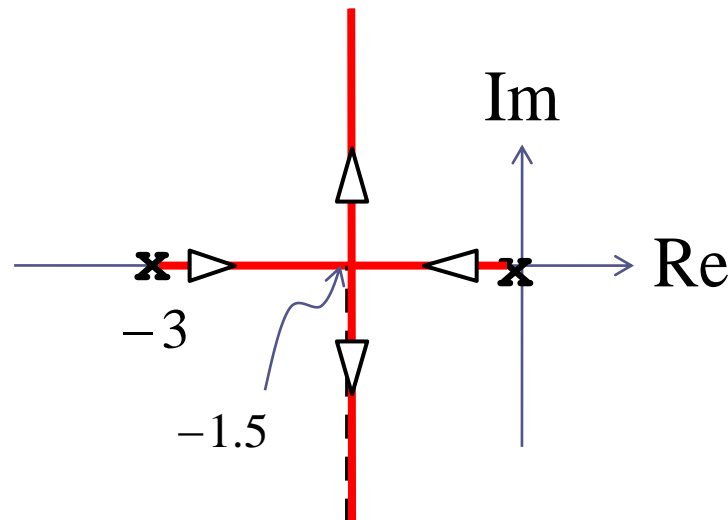
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s^* - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s^* - z_i} = 0 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = -3$$

$$\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^* + 3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{s^* + 3 + s^*}{s^*(s^* + 3)} = \frac{2s^* + 3}{s^*(s^* + 3)} = 0 \Leftrightarrow s^* = -3/2 = -1.5$$

I punto doppio si trova a **meta strada tra i due poli**.

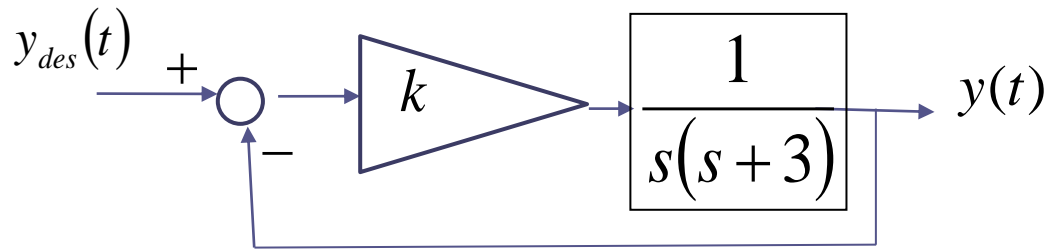
Per FdT  $L(s)$  con 2 poli reali e senza zeri, come il sistema a ciclo aperto  $L(s)$  dell'esempio, questo vale sempre.

I rami del LdR avranno il seguente andamento



**Interpretazione**

$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$



$$W_{y_{des}}^y(s) = \frac{k}{s(s+3)+k}$$

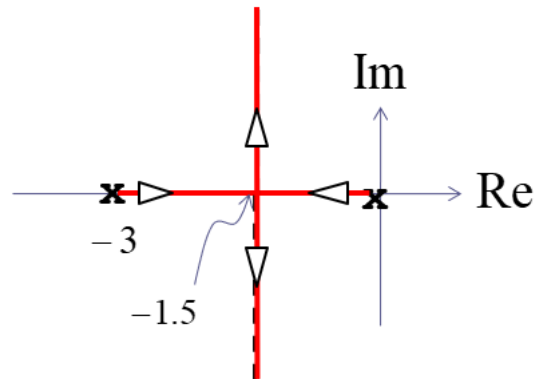
$$P_{car}(s) = s^2 + 3s + k$$

$$p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - k}$$

Per  $k < 9/4 = 2.25$  abbiamo a ciclo chiuso due poli reali distinti

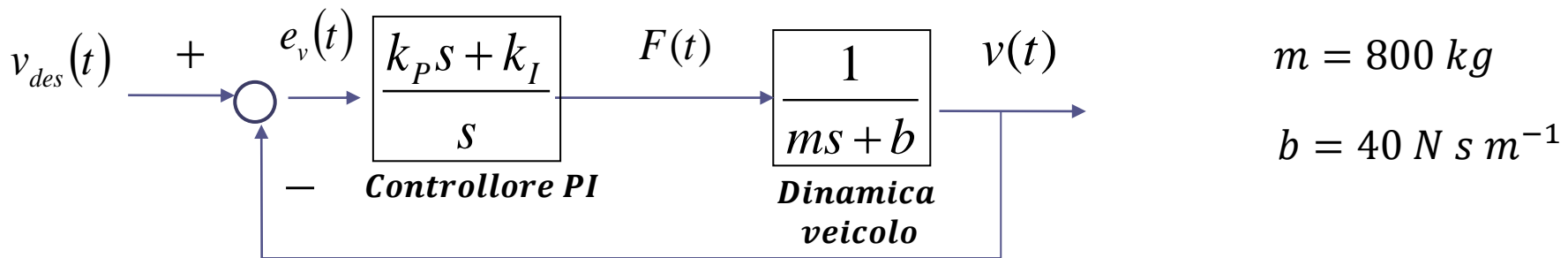
Per  $k = 2.25$  abbiamo a ciclo chiuso due poli reali coincidenti (entrambi pari a  $-3/2$ )

Per  $k > 2.25$  abbiamo a ciclo chiuso due poli complessi coniugati (entrambi con parte reale pari a  $-3/2$ )





## Esempio Cruise control



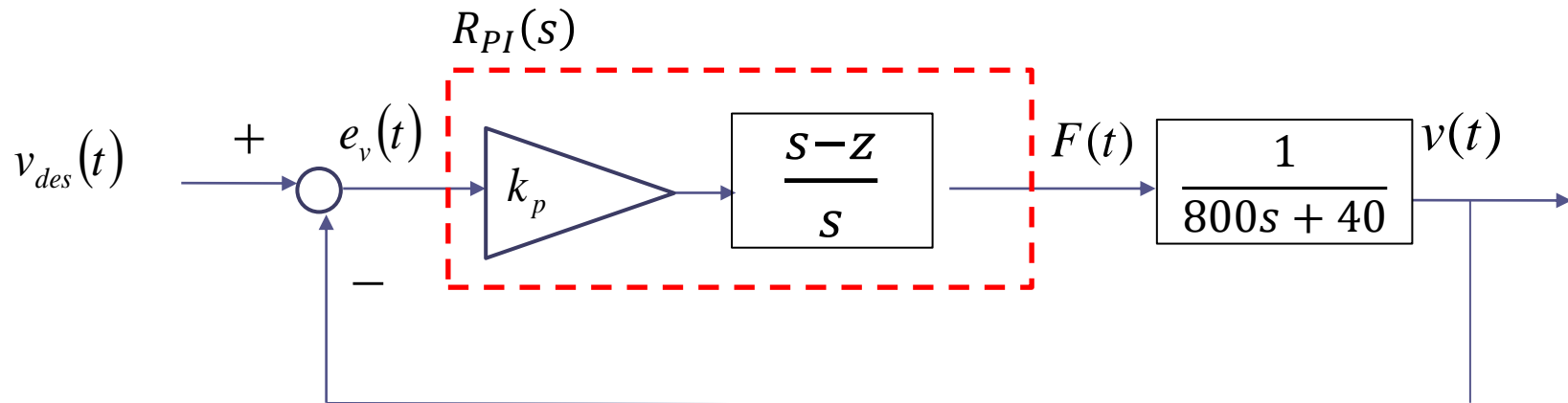
Il regolatore PI può essere espresso come segue:

$$R_{PI}(s) = \frac{k_P s + k_I}{s} = k_P \frac{s + k_I / k_P}{s}$$

Riscriviamo la FdT del regolatore in funzione del guadagno proporzionale  $k_p$  e del rapporto  $k_i / k_p$ , che definisce la posizione dello zero del regolatore e che pertanto chiamiamo  $z$

$$R_{PI}(s) = k_P \frac{s - z}{s} \quad z = -\frac{k_I}{k_P}$$

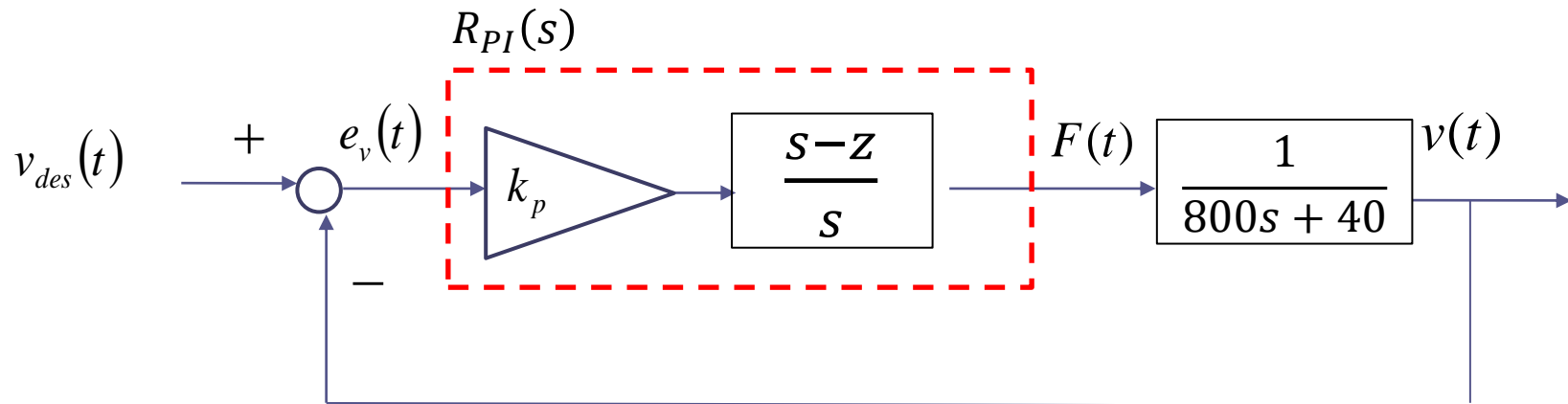
Vediamo come può essere applicato lo strumento di analisi del LdR per la scelta dei due parametri di progetto  $k_p$  e  $z$ .



Il regolatore  $R_{PI}(s)$  è stato decomposto nella serie fra il guadagno puro  $k_p$  e la sua «parte dinamica»  $\frac{s-z}{s}$ , che ne definisce la distribuzione di zeri e poli.

Ora ipotizzeremo diverse scelte per il posizionamento dello zero del regolatore (cioè per il parametro  $z$ ), ed in corrispondenza di queste possibili scelte analizzeremo, mediante il LdR, la variazione dei poli della FdT a ciclo chiuso in funzione del guadagno proporzionale  $k_p$

Il guadagno proporzionale  $k_p$  è il parametro variabile  $k$  rispetto al quale si desidera “tracciare” il luogo delle radici, analizzando così la dipendenza dei poli della FdT a ciclo chiuso del sistema di controllo dal guadagno  $k_p$  sotto l’ipotesi che il rapporto tra le costanti proporzionale ed integrale, che abbiamo chiamato  $z$ , venga mantenuto costante.



La FdT a ciclo chiuso è:

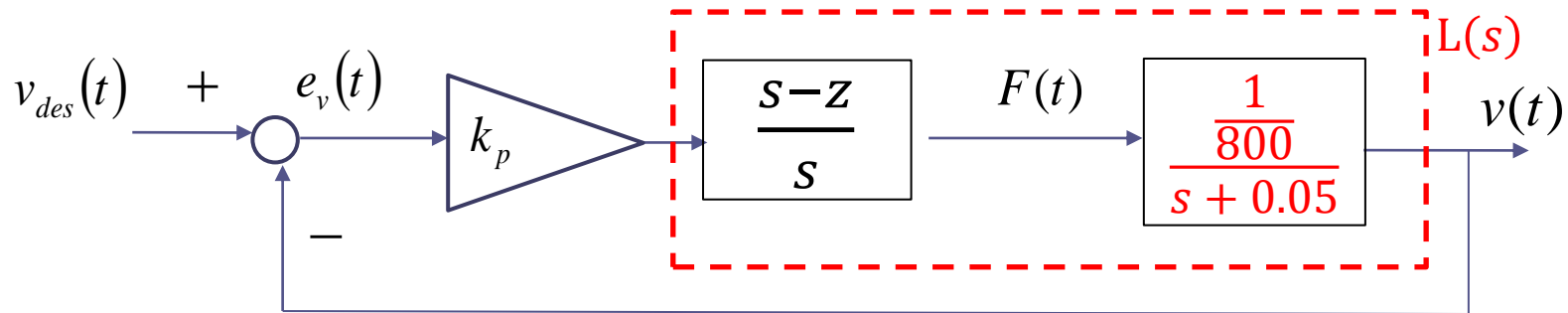
$$F_{v_{des}}^v(s) = \frac{k_p \frac{s-z}{s} \frac{1}{800s+40}}{1 + k_p \frac{s-z}{s} \frac{1}{800s+40}} = \frac{k_p(s-z)}{s(800s+40) + k_p(s-z)}$$

Osserviamo come nella FdT a ciclo chiuso sia presente uno **zero** nel punto  $z = -\frac{k_I}{k_P}$  la cui posizione non viene influenzata dal guadagno  $k_p$  purché si scelga  $k_I$  in modo che il rapporto fra  $k_I$  e  $k_P$  rimanga costante e pari a  $-z$ .

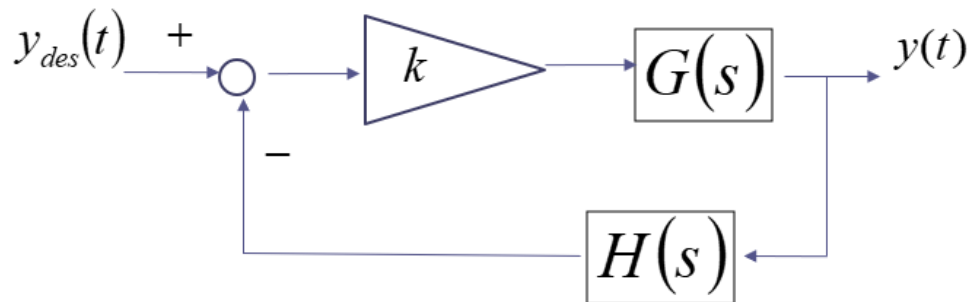
I poli della FdT a ciclo chiuso sono le radici del polinomio caratteristico che corrisponde al denominatore della FdT a ciclo chiuso

$$P_{car}(s) = s(800s+40) + k_p(s-z) = 800s^2 + (40+k_p)s - k_pz$$

Notiamo come la rappresentazione del sistema di controllo alla quale siamo giunti



combacia con lo schema generale che abbiamo introdotto in precedenza



$$G(s) = \frac{s-z}{s} \frac{1}{s+0.05}$$

$$H(s) = 1$$

Individuiamo pertanto, secondo la procedura suggerita, la FdT  $L(s)$  a ciclo aperto dalla quale sia stato scorporato il guadagno variabile  $k_p$

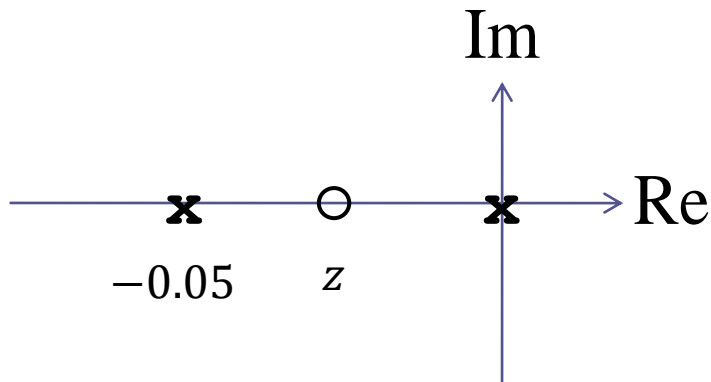
$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{s-z}{s} \frac{1}{s+0.05} = \frac{1}{800} \frac{s-z}{s} \frac{1}{s+0.05}$$

$\frac{1}{800}$  è il guadagno in alta frequenza della  $L(s)$

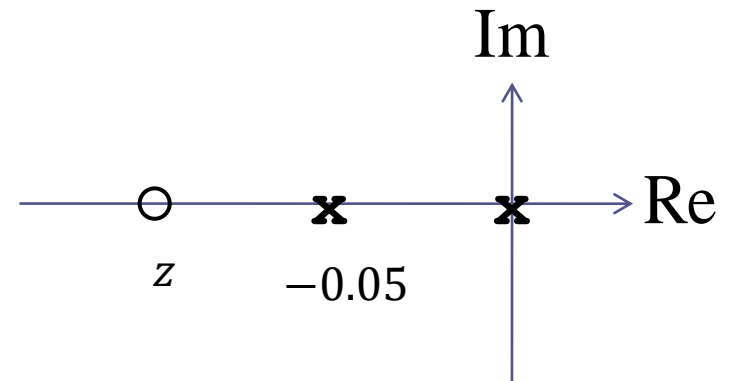
$$L(s) = \frac{1}{800} \frac{s-z}{s} \frac{1}{s+0.05}$$

Il primo passo nel tracciamento del luogo delle radici è riportare sul piano le posizioni dei poli e degli zeri della  $L(s)$ . Seguiamo in parallelo due strade differenti:

Caso A: collochiamo lo zero del regolatore più in **bassa frequenza** rispetto al polo del processo

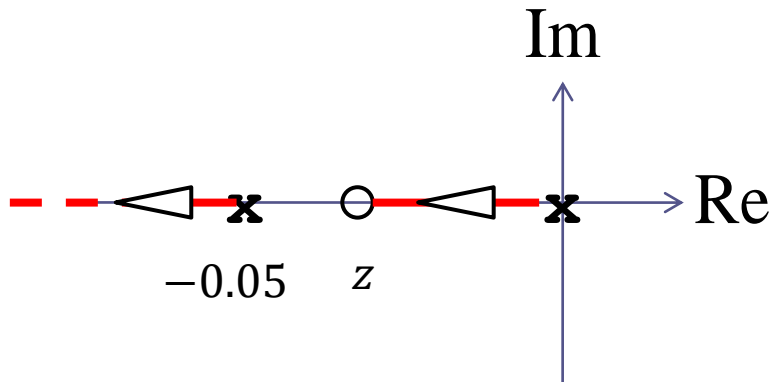


Caso B: collochiamo lo zero del regolatore più in **alta frequenza** rispetto al polo del processo

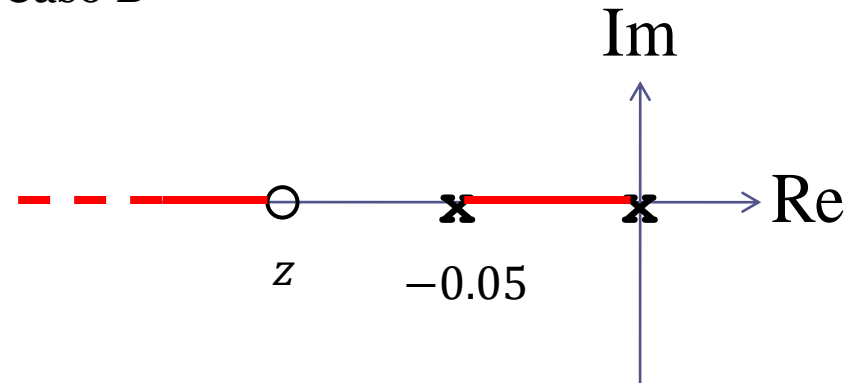


«Appartengono al LdR i segmenti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli o zeri reali»

Caso A

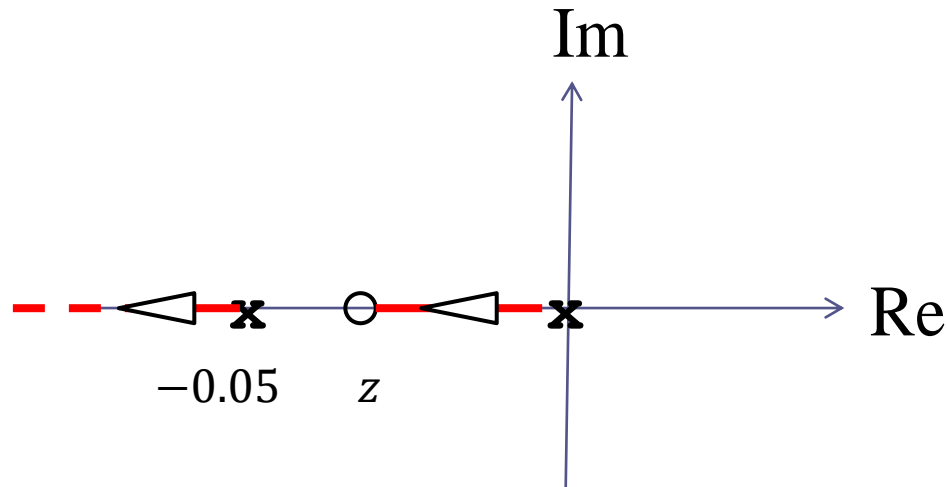


Caso B



«Se tali segmenti uniscono un polo ad uno zero oppure vanno da un polo verso meno infinito allora costituiscono uno dei rami del LdR.»

Sulla base di tale regola, i due segmenti in rosso nel LdR a sinistra sono i due rami del luogo. Il tracciamento del LdR corrispondente alla situazione di sinistra (lo zero del regolatore posizionato più in bassa frequenza rispetto al polo del processo in  $-0.05$ ) è pertanto concluso. Interpretiamone i risultati



Collocando lo zero del regolatore più in bassa frequenza rispetto al polo del processo si ottiene una risposta al gradino a ciclo chiuso **monotona per ogni valore di  $k_p$** . Inoltre la risposta diventa arbitrariamente rapida al crescere di  $k_p$ . Al crescere di  $k_p$  si effettua una cancellazione polo zero via via più accurata.

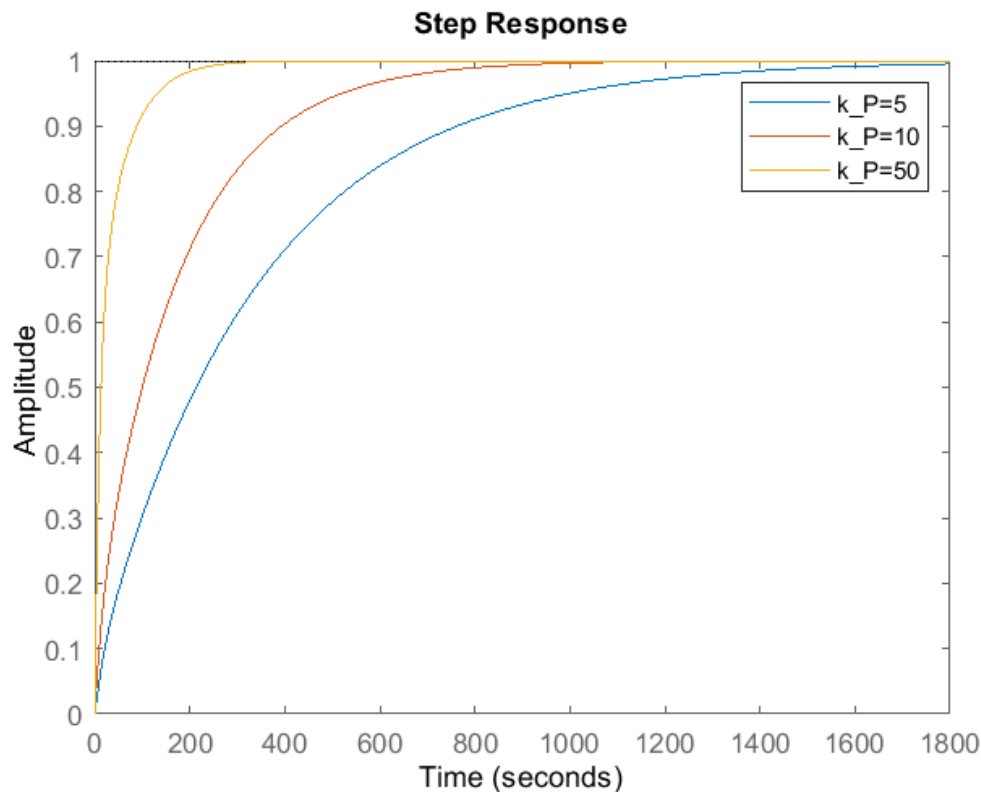
NB nella FdT a ciclo chiuso sarà sempre presente uno zero in  $z$ , indipendentemente dal valore del guadagno variabile  $k_p$ .

Verifichiamo mediante simulazione le conclusioni teoriche

$$z = -0.025$$

$$k_P = 5, 10, 50$$

Il valore di regime della risposta a ciclo chiuso ad un set point di velocità costante unitario è sempre pari ad uno in conseguenza del fatto che il guadagno statico della FdT a ciclo chiuso fra il set point e l'uscita vale 1



$$F_{vdes}^v(s) = \frac{k_P(s - z)}{s(800s + 40) + k_P(s - z)}$$



$$F_{vdes}^v(0) = 1$$

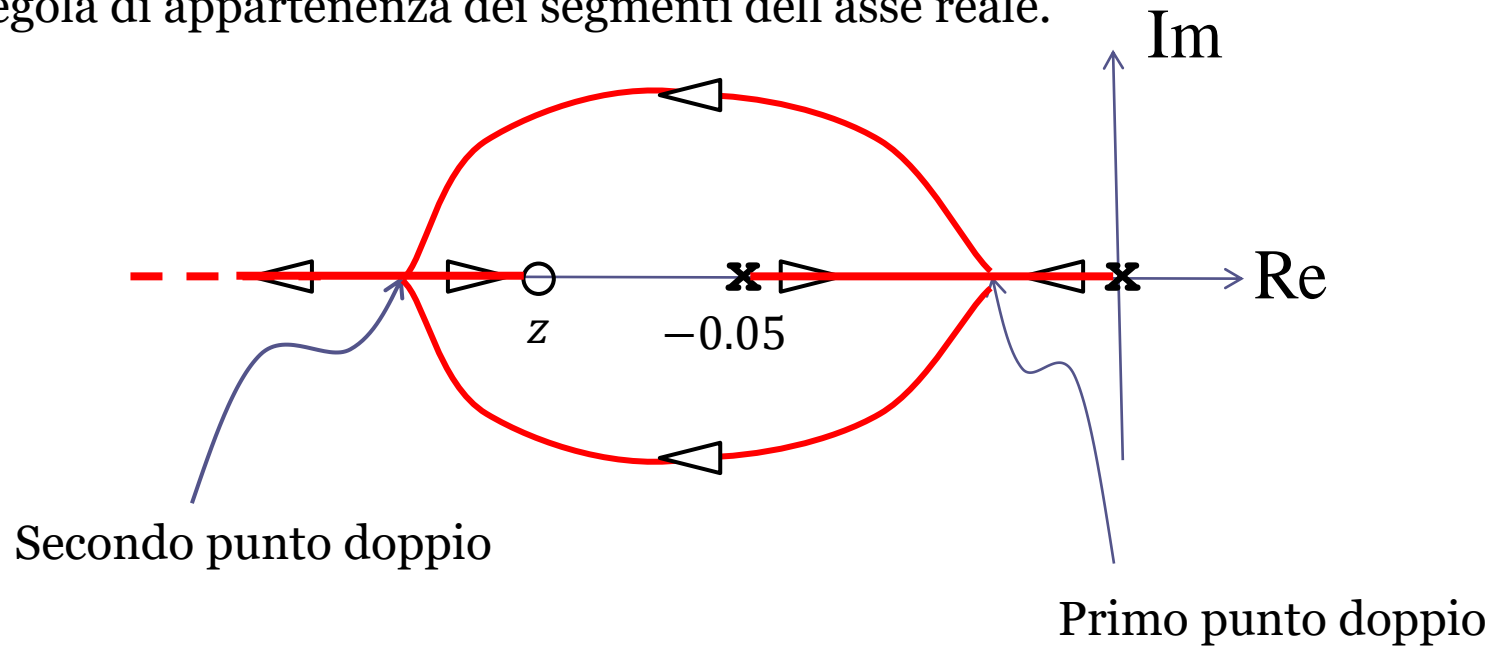
```
s=tf('s')
z=-0.025;
kp=5;
W5=kp*(s-z)/(s*(800*s+40)+kp*(s-z))

kp=10;
W10=kp*(s-z)/(s*(800*s+40)+kp*(s-z))

kp=50;
W50=kp*(s-z)/(s*(800*s+40)+kp*(s-z))

step(W5,W10,W50)
legend('k_P=5','k_P=10','k_P=50')
```

Ora completiamo il tracciamento del LdR nel caso B in cui lo zero del regolatore viene collocato più in **alta frequenza** rispetto al polo del processo. Applichiamo la regola di appartenenza dei segmenti dell'asse reale.

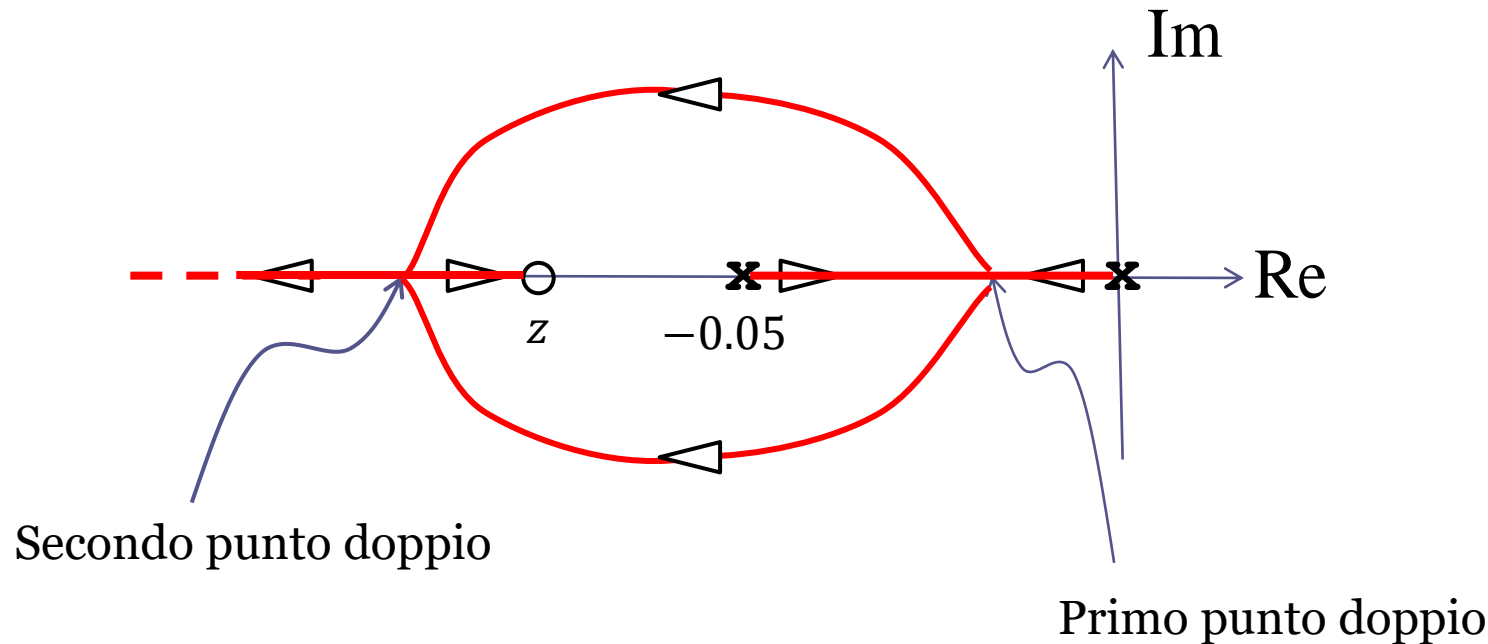


I segmenti dell'asse reale che appartengono al LdR non sono, in questo caso, rami del LdR

Ci sarà un primo punto doppio nel segmento che unisce l'origine al polo in  $-0.05$

I rami successivamente lasciano l'asse reale per farvi ritorno in corrispondenza di un secondo punto doppio posizionato alla sinistra dello zero. Successivamente, un ramo evolve verso lo zero, ed un ramo va verso meno infinito.

## INTERPRETAZIONE



Il sistema di controllo è **asintoticamente stabile a ciclo chiuso per qualunque valore di  $k_p$** , ma vi è un **intervallo di valori in corrispondenza dei quali la risposta è oscillatoria**.

Per valori di  $k_p$  minori di quello associato al primo punto doppio sono presenti a ciclo chiuso due poli reali negativi ed uno zero in alta frequenza. La risposta è pertanto monotona crescente, e sarà piuttosto **lenta** perché i poli sono entrambi molto vicini all'origine.

Per valori di  $k_p$  maggiori di quello associato al secondo punto doppio si hanno due poli reali negativi ed uno zero più in bassa frequenza rispetto ad entrambi i poli. Ciò implica una **sovraelongazione** della risposta a ciclo chiuso.

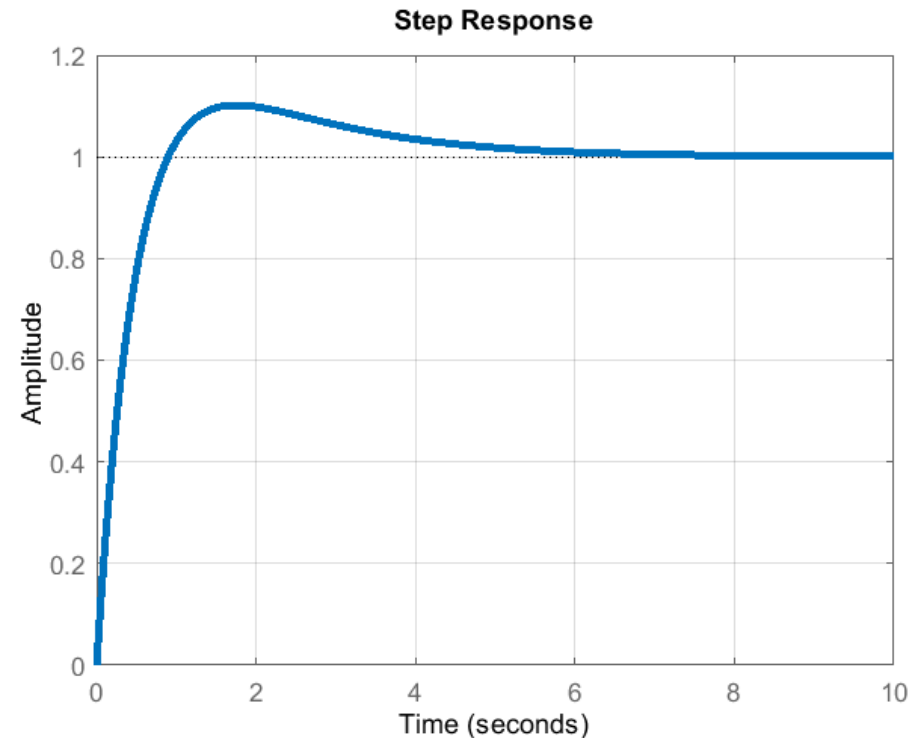
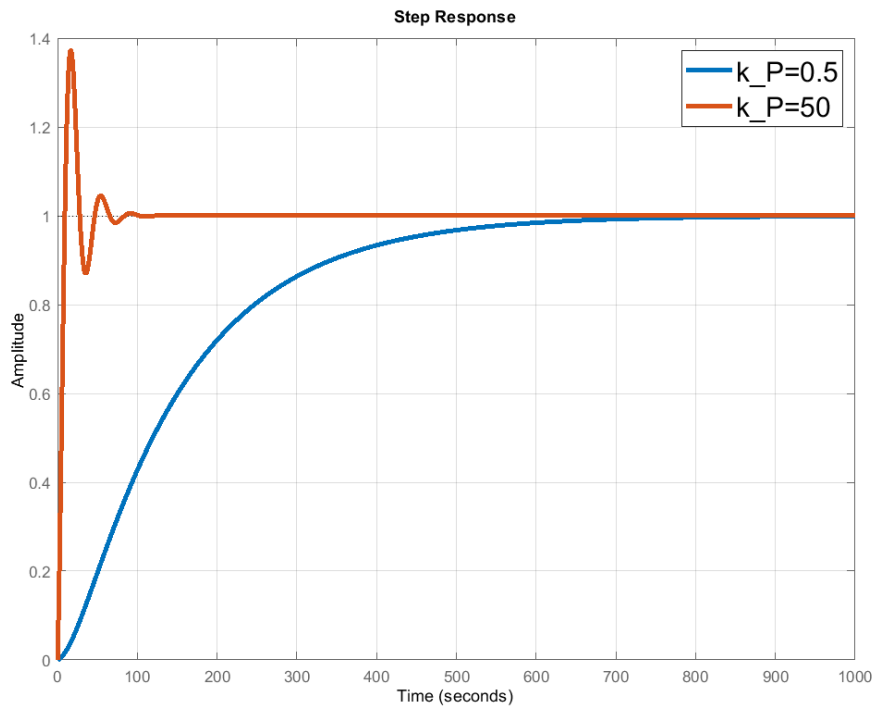
Verifichiamo mediante simulazione le conclusioni teoriche

$$z = -0.5$$

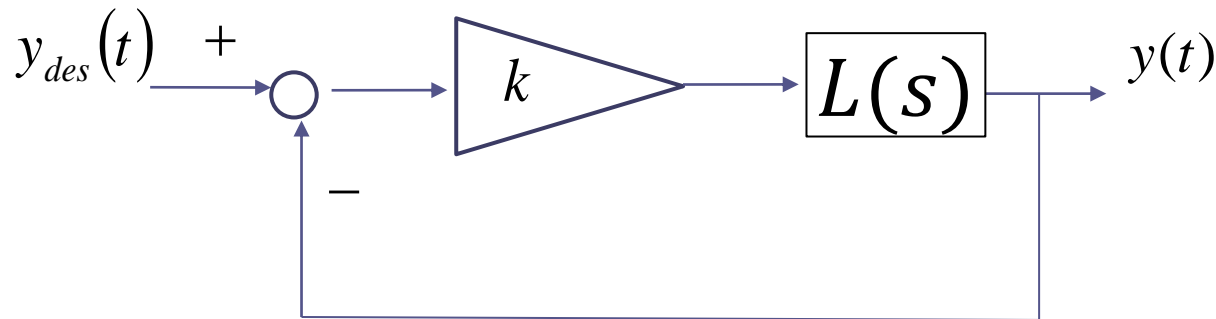
In corrispondenza del valore scelto di  $z$ , i valori di  $k_P$  associati al primo ed al secondo punto doppio sono rispettivamente pari a 1.05 e 1518 (impareremo a breve come determinarli)

$$k_P = 0.5, 50$$

$$k_P = 2000$$



**ESEMPIO** Con riferimento al seguenti sistema in retroazione



$$L(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$n = 3$       ordine della  $L(s)$

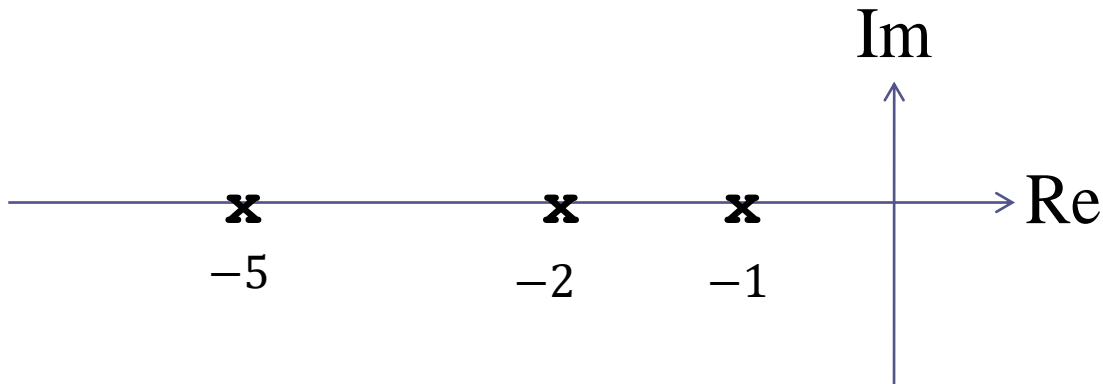
$m = 0$       grado del numeratore della  $L(s)$

$p_1 = -1$        $p_1 = -2$

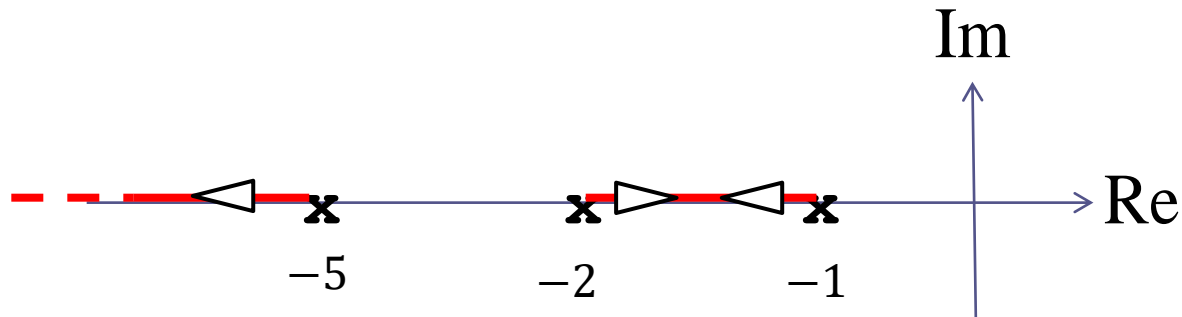
$p_1 = -5$       poli della  $L(s)$

Tracciare il luogo delle radici e valutare di conseguenza le proprietà di stabilità a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta del sistema di controllo al variare del guadagno  $k$ .

## Mappa poli-zeri di $L(s)$



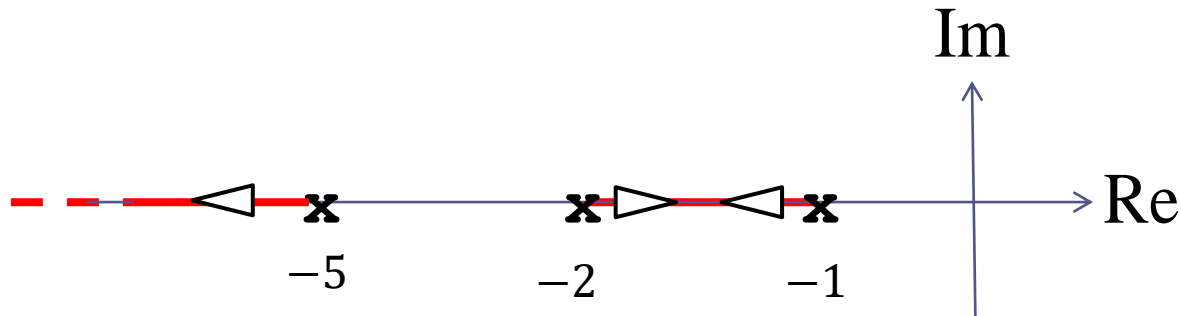
## Regola della appartenenza al LdR dei segmenti dell'asse reale



Il segmento che va dal polo in  $-5$  verso meno infinito è uno dei rami del LdR.

Il segmento che unisce i due poli in  $-1$  e  $-2$  invece non è un ramo del luogo.

I due rami che partono rispettivamente dai poli in  $-1$  e  $-2$  vanno l'uno verso l'altro e si incontrano in un punto doppio appartenente all'intervallo  $-2, -1$  per poi abbandonare l'asse reale e convergere verso gli asintoti.



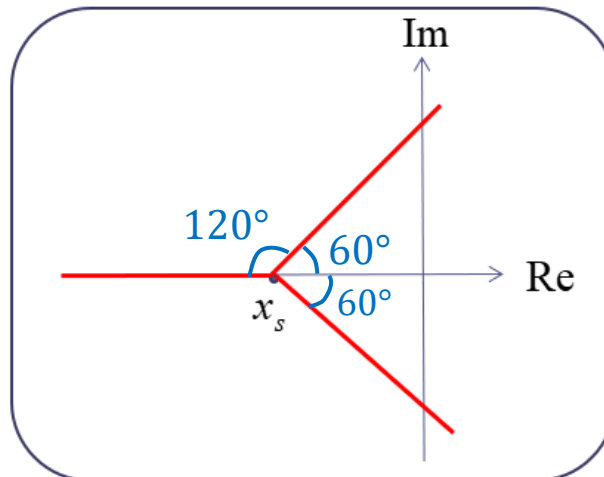
Individuiamo il centro stella e tracciamo gli asintoti.

Ascissa del  
centro stella:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

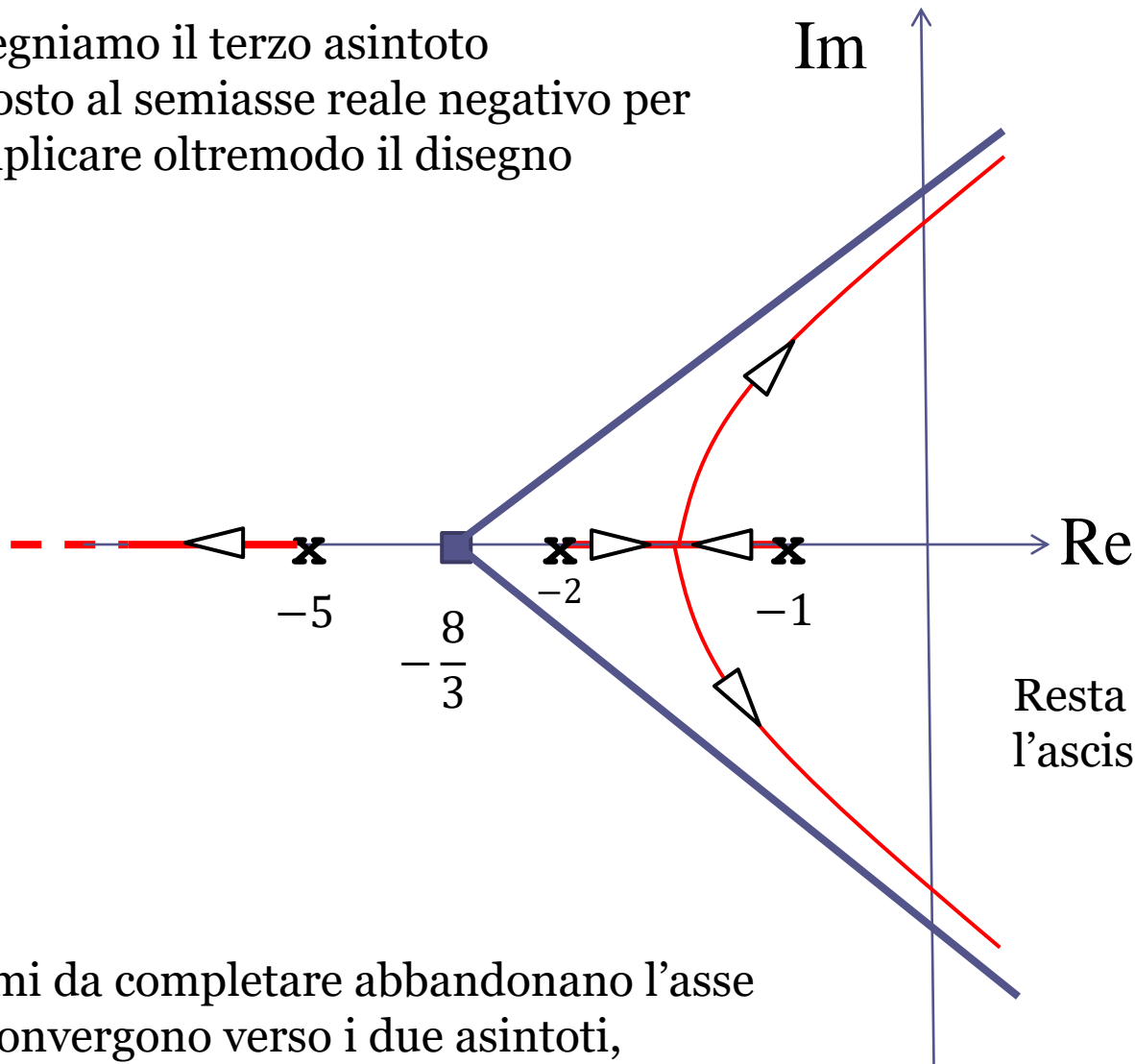
$$x_s = \frac{-1 - 2 - 5}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$n - m = 3$$



Asintoti a +60, 180, e - 60 gradi

Non disegniamo il terzo asintoto  
sovrapposto al semiasse reale negativo per  
non complicare oltremodo il disegno



Resta da determinare  
l'ascissa del punto doppio

I due rami da completare abbandonano l'asse  
reale e convergono verso i due asintoti,  
confluendo quindi verso il semipiano destro per  
valori del guadagno sufficientemente elevati.

## Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s^* - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s^* - z_i} = 0$$

$$p_1 = -1 \quad p_2 = -2 \quad p_3 = -5$$

$$\frac{1}{s^* + 1} + \frac{1}{s^* + 2} + \frac{1}{s^* + 5} = 0$$



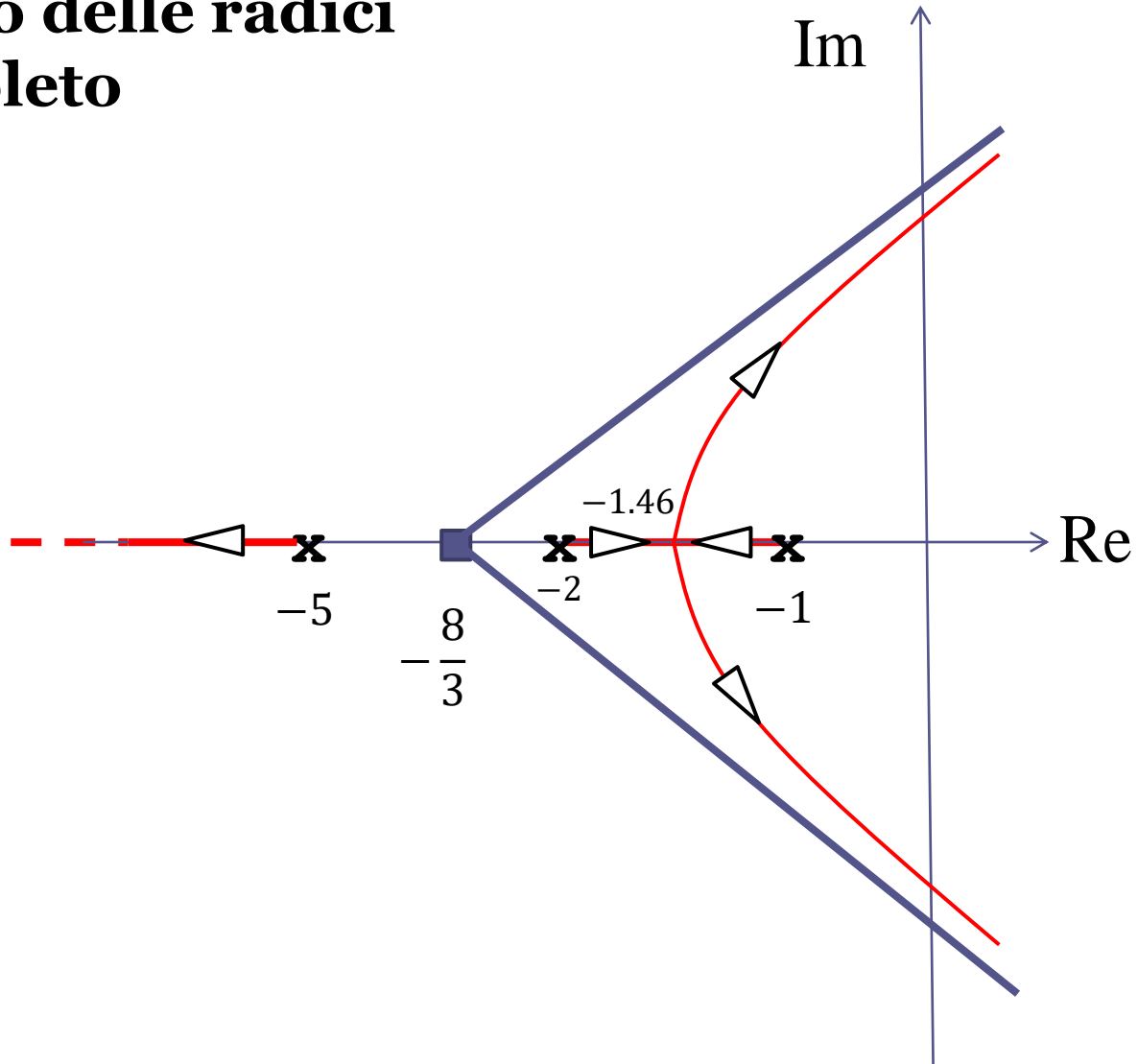
$$\frac{(s^* + 2)(s^* + 5) + (s^* + 1)(s^* + 5) + (s^* + 1)(s^* + 2)}{(s^* + 1)(s^* + 2)(s^* + 5)} = 0$$

$$(s^* + 2)(s^* + 5) + (s^* + 1)(s^* + 5) + (s^* + 1)(s^* + 2) = 3s^2 + 16s + 7$$

Il polinomio  $3s^2 + 16s + 7$  ammette le radici  $r_1 = -1.46$  e  $r_2 = -3.86$

Fra le due radici  $r_1$  e  $r_2$  è accettabile unicamente  $r_1$  in quanto il punto  $-3.86$  non appartiene al LdR. Il punto doppio sta pertanto nel punto  $-1.46$

# Luogo delle radici completo



## Interpretazione

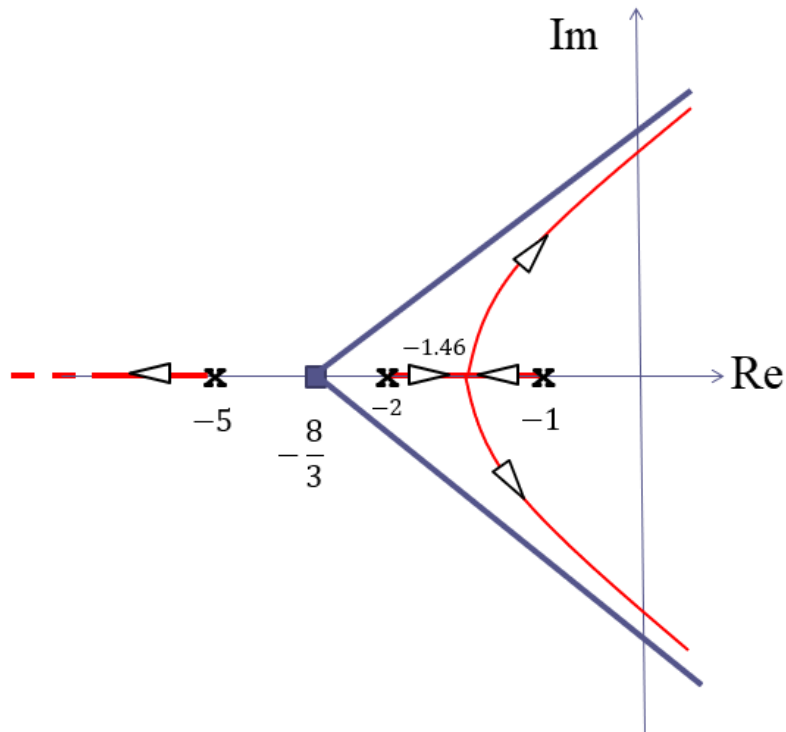
Esiste un valore limite per il guadagno  $k$  (**guadagno critico**  $k_{cr}$ ) al di sopra del quale il sistema a ciclo chiuso diventa instabile.

Tale valore può essere determinato applicando al polinomio caratteristico della FdT a ciclo chiuso il criterio di Routh Hurwitz.

$$P_{car}(s) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 + k$$

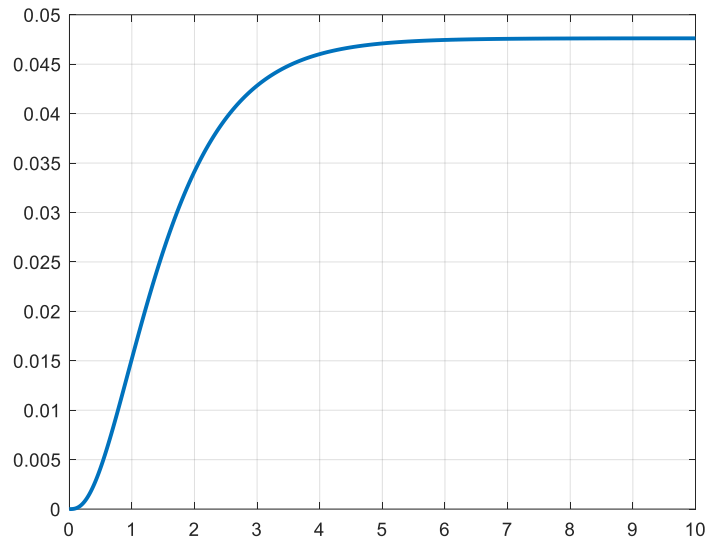
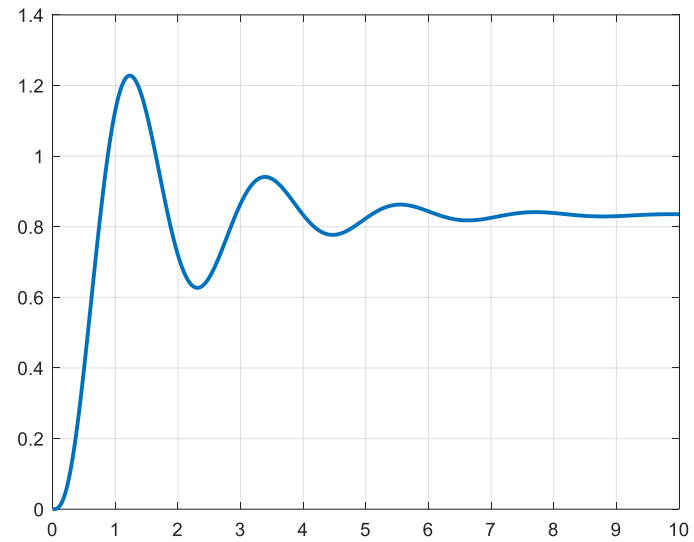
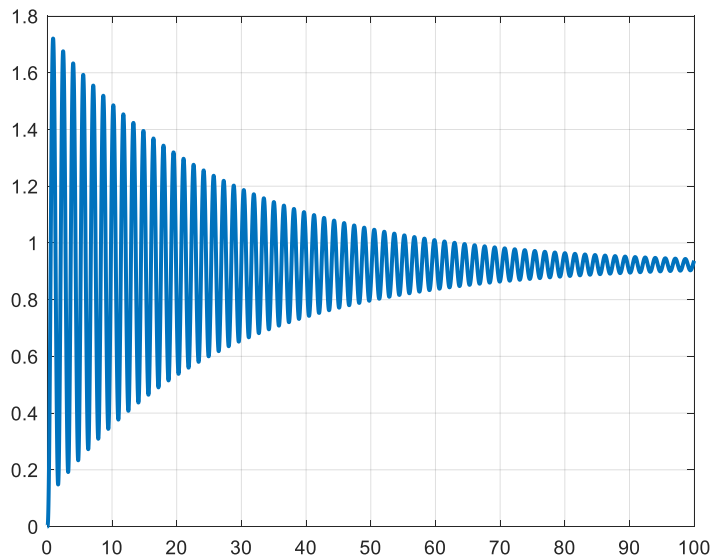
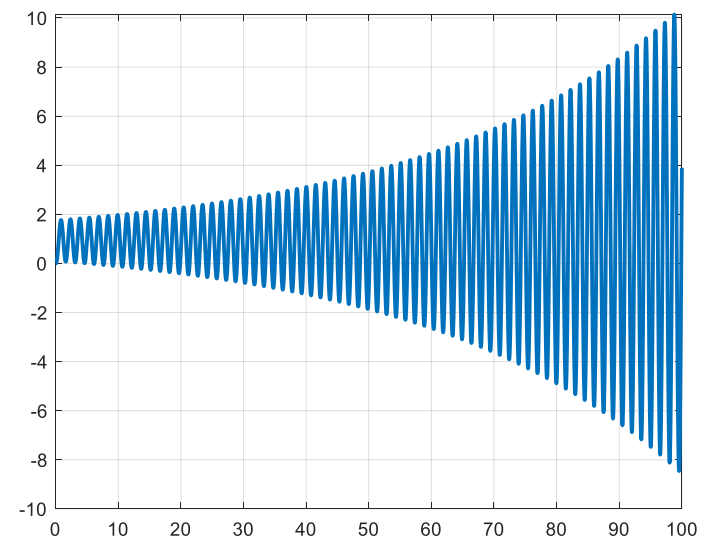


$$k_{cr} = 126$$



Per valori sufficientemente piccoli di  $k$  la risposta al gradino a ciclo chiuso è monotona crescente, e diventa progressivamente più rapida all'aumentare di  $k$

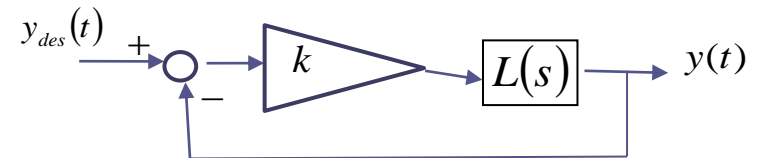
Superato il valore di  $k$  associato al punto doppio (che ancora non sappiamo determinare, ma che vale **0.88**) due fra i tre poli a ciclo chiuso diventano complessi coniugati, e nella risposta compaiono pertanto delle **oscillazioni**. Lo smorzamento della coppia di poli complessi coniugati decresce progressivamente all'aumentare di  $k$  da 0.88 fino a 126. In corrispondenza di  $k = 126$  si ha una coppia di poli immaginari puri (limite di stabilità).

$k = 0.5$  $k = 50$  $k = 120$  $k = 130$ 

## Taratura del luogo delle radici

Il problema della **taratura del luogo delle radici** consiste nella **determinazione del valore del guadagno  $k$  associato ad un determinato punto  $P$  del luogo delle radici**

$$L(s) = \bar{k} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$



### Formula di taratura

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n}{r_1 r_2 \dots r_m}$$

$$\rho_i = \text{dist}(P, p_i)$$

$$r_i = \text{dist}(P, z_i)$$

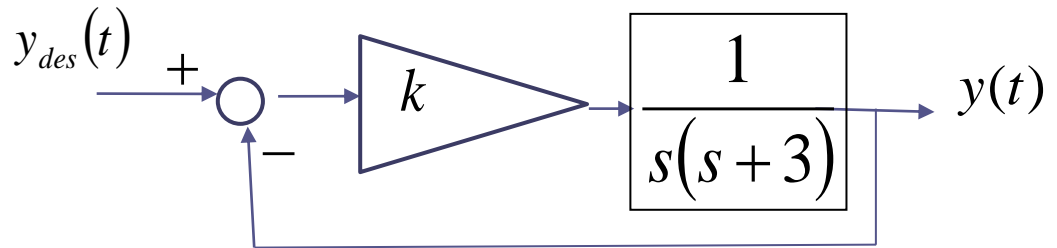
$\text{dist}(P, p_i)$

Distanza del punto  $P$  dal generico polo  $p_i$  della  $L(s)$

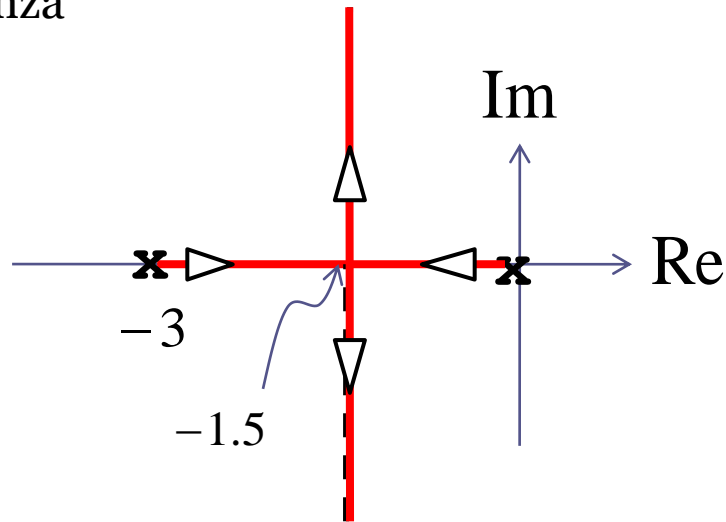
$\text{dist}(P, z_i)$

Distanza del punto  $P$  dal generico zero  $z_i$  della  $L(s)$

$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$



LdR tracciato in precedenza



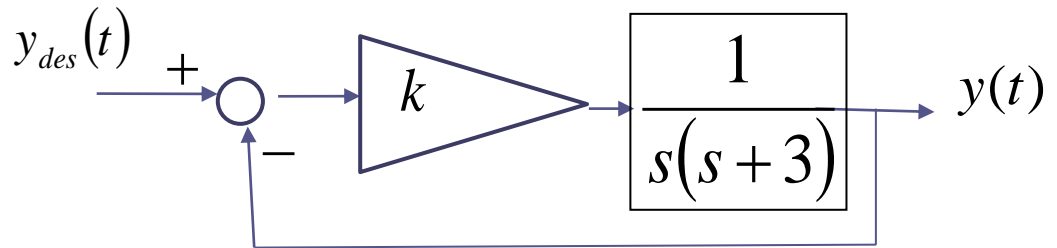
$$W_{y_{des}}^y(s) = \frac{k}{s(s+3)+k}$$

$$P_{car}(s) = s^2 + 3s + k$$

$$s_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - k}$$

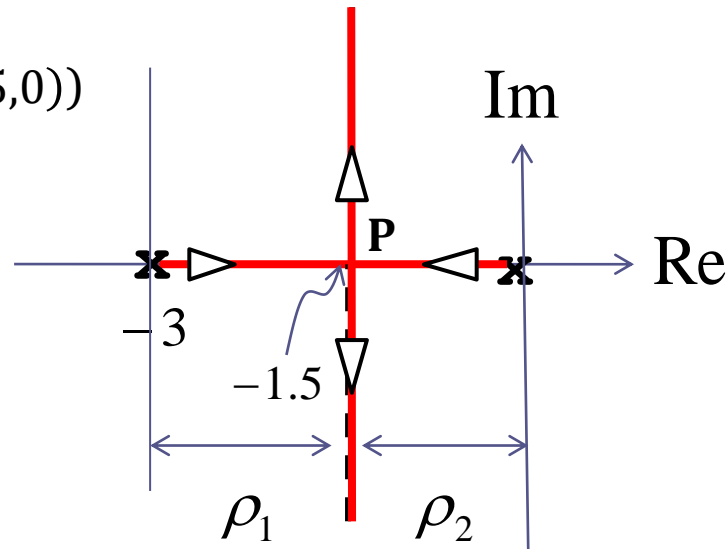
Per  $k = 2.25$  abbiamo a ciclo chiuso due poli reali coincidenti (entrambi pari a  $-3/2$ )

$$L(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$



Facciamo la taratura del punto doppio ( $P \equiv (-1.5, 0)$ )

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n}{r_1 r_2 \dots r_m}$$



$$\rho_1 = \rho_2 = 1.5$$

$$\bar{k} = 1 \quad \text{HFG della } L(s)$$

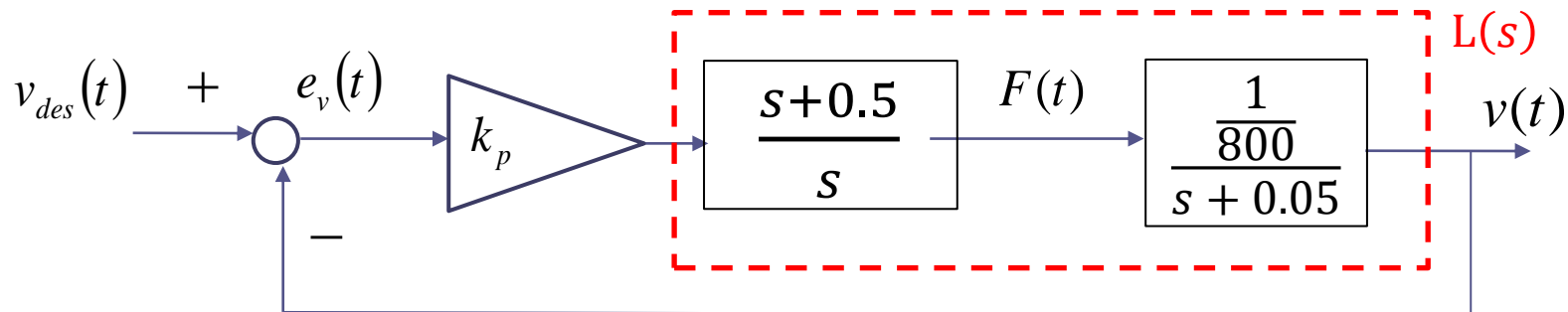
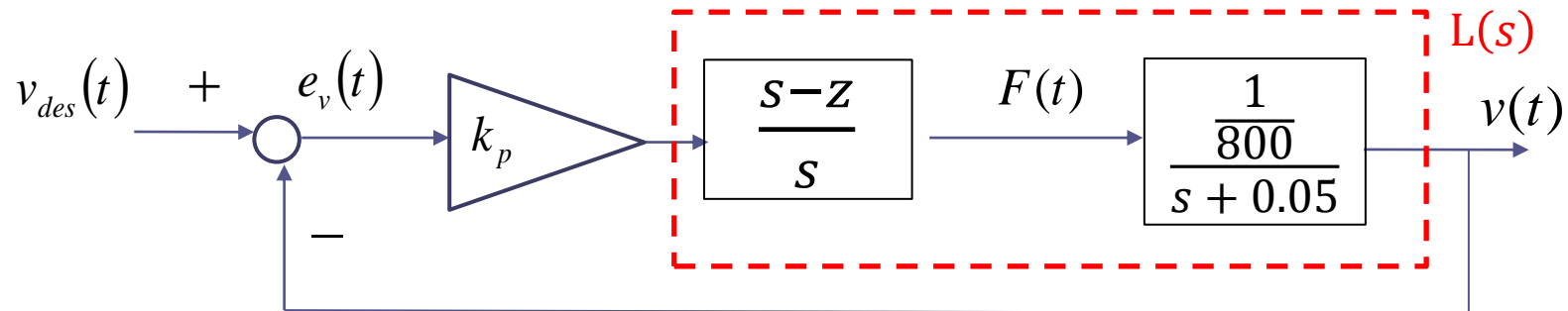
$$\rho_i = \text{dist}(P, p_i)$$

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \rho_1 \rho_2$$

$$k = (1.5) \cdot (1.5) = 2.25$$

~~$$r_i = \text{dist}(P, z_i)$$~~

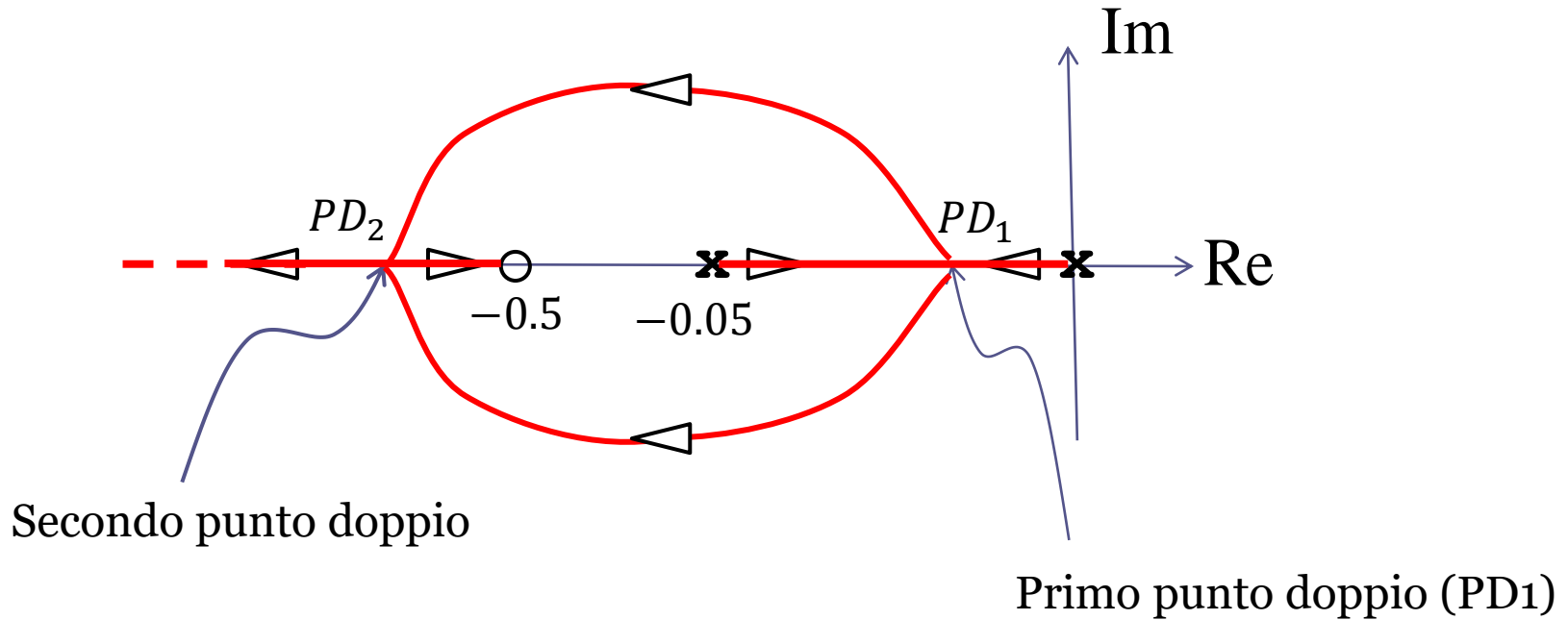
Ritorniamo all'esempio del **cruise control**, valutato in corrispondenza del valore di  $z = -0.5$



$$L(s) = \frac{1}{800} \frac{s+0.5}{s} \frac{1}{s+0.05}$$

$\bar{k} = \frac{1}{800}$  è il guadagno in alta frequenza della  $L(s)$

Il luogo delle radici, tracciato in precedenza, presenta due punti doppi  $PD_1$  e  $PD_2$



### Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{s^* - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s^* - z_i} = 0 \quad p_1 = 0 \quad p_2 = -0.05 \quad z_1 = -0.5$$

$$\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^* + 0.05} - \frac{1}{s^* + 0.5} = 0$$

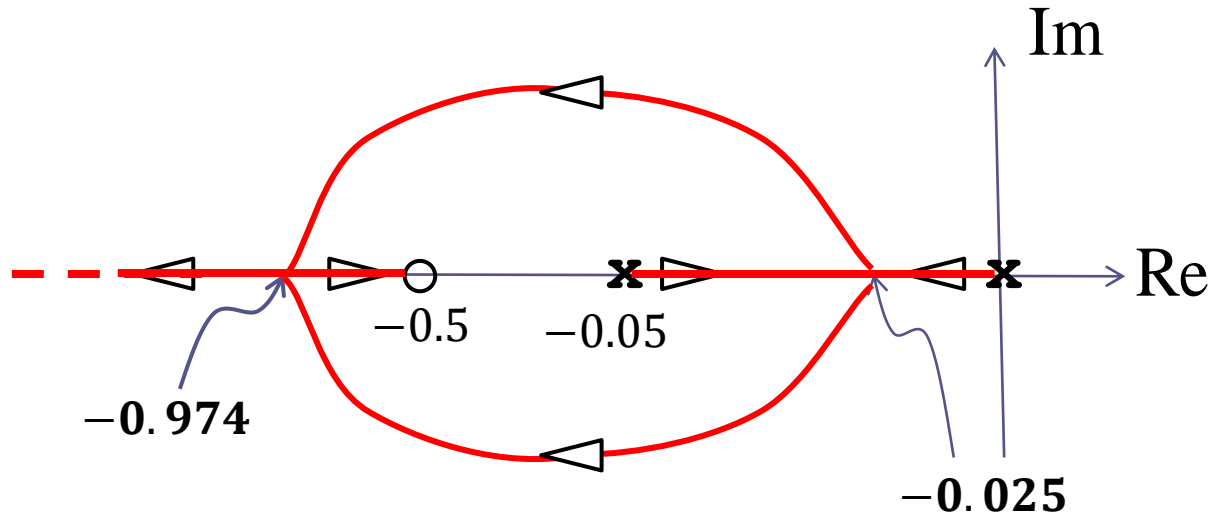
Esplicitiamo il numeratore della eq. dei punti doppi

$$\frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^* + 0.05} - \frac{1}{s^* + 0.5} = \frac{(s^* + 0.05)(s^* + 0.5) + s^*(s^* + 0.5) - s^*(s^* + 0.05)}{s^*(s^* + 0.05)(s^* + 0.5)} = 0$$

$$(s^* + 0.05)(s^* + 0.5) + s^*(s^* + 0.5) - s^*(s^* + 0.05) = (s^*)^2 + s^* + 0.025$$

Le radici del numeratore sono:  $q_1 = -0.025$        $q_2 = -0.974$

Sono quindi queste le coordinate dei 2 punti doppi.



Ora tarriamo i due punti doppi.

Iniziamo dal punto doppio più prossimo all'origine, al quale è associato un valore di guadagno inferiore rispetto al secondo punto doppio collocato più in alta frequenza

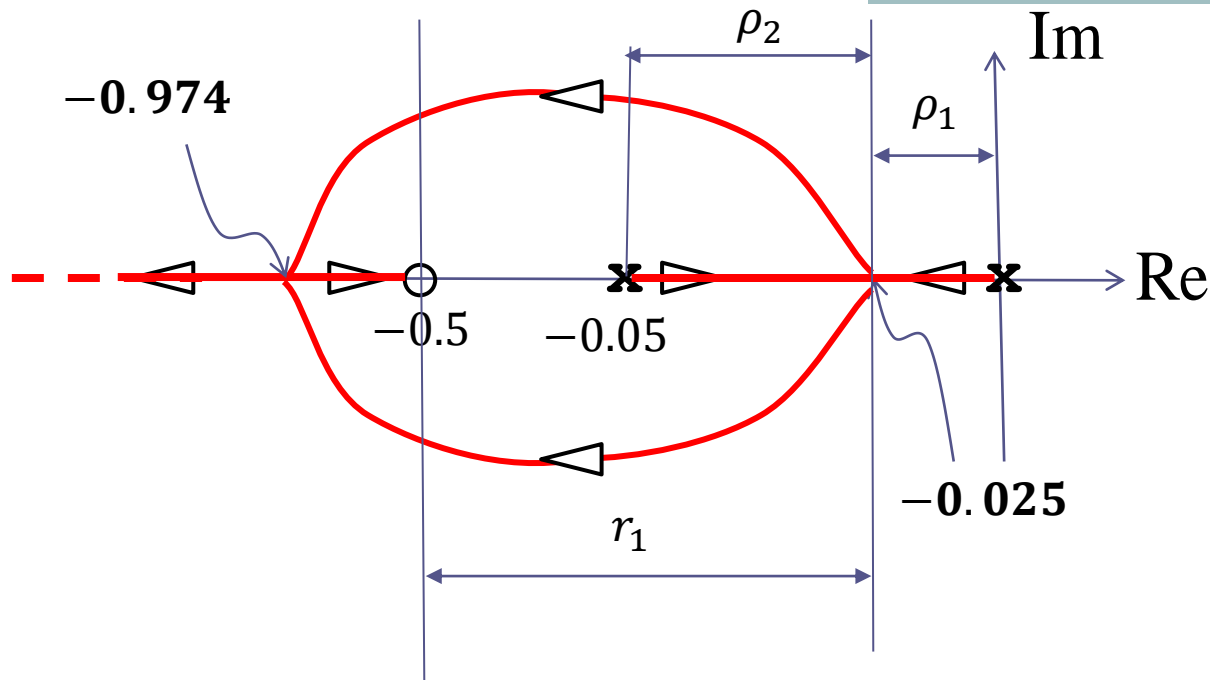
### Formula di taratura

$$\bar{k} = \frac{1}{800} \quad \text{Guadagno in alta frequenza della } L(s)$$

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1}$$

$\rho_i$  Distanze del punto da tarare dai **poli** della  $L(s)$

$r_i$  Distanze del punto da tarare dagli **zeri** della  $L(s)$



**Formula di taratura del punto doppio in  $-0.025$**

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1}$$

$$\bar{k} = \frac{1}{800}$$

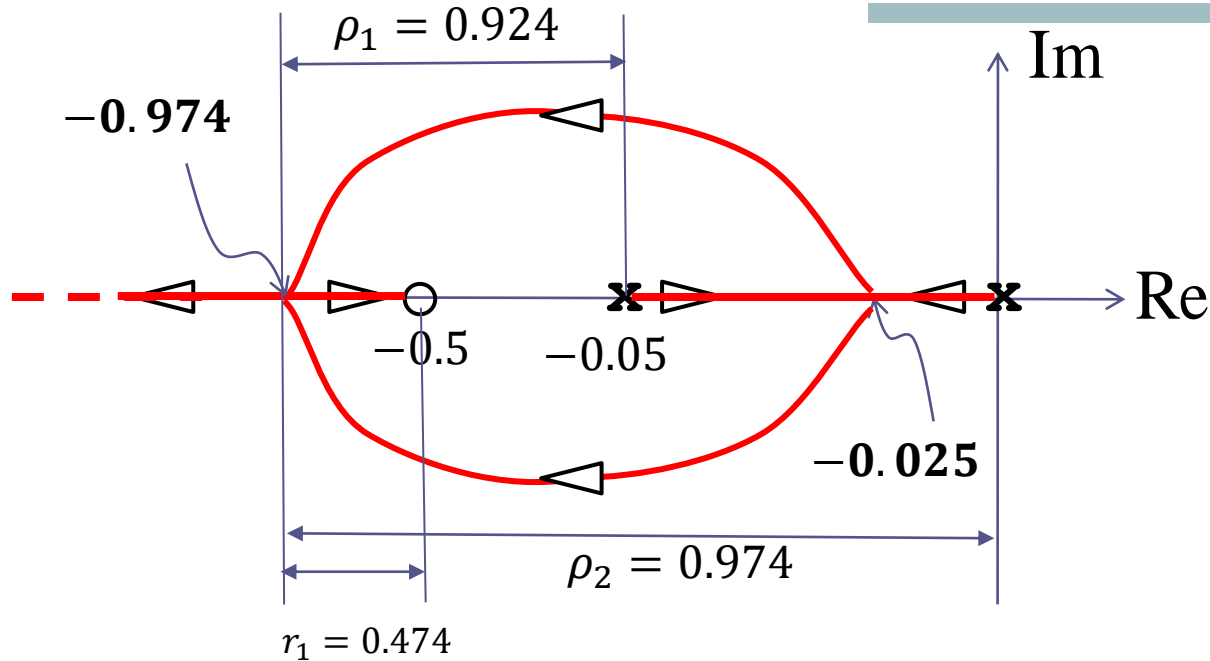
Guadagno in alta frequenza della  $L(s)$

$$\rho_1 = 0.025$$

$$\rho_2 = 0.025$$

$$r_1 = 0.475$$

$$k = 800 \frac{0.025 \cdot 0.025}{0.475} = 1.05$$



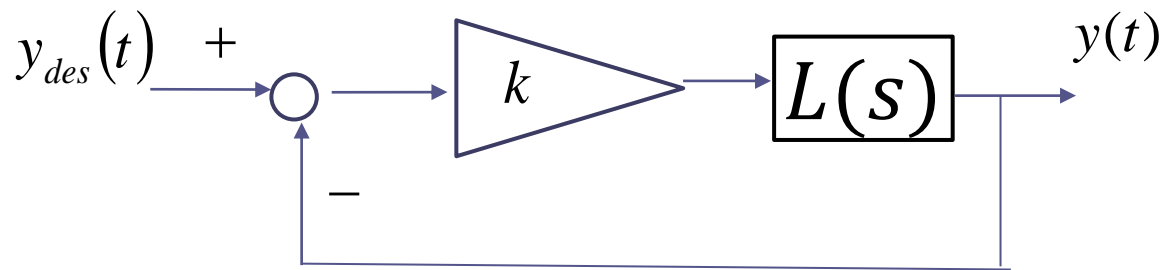
### Formula di taratura del punto doppio in $-0.974$

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1} \quad \bar{k} = \frac{1}{800} \quad \text{Guadagno in alta frequenza della } L(s)$$

$$\rho_1 = 0.924 \quad \rho_2 = 0.974 \quad r_1 = 0.474$$

$$k = 800 \frac{0.924 \cdot 0.974}{0.474} = 1518$$

**ESEMPIO** Ritorniamo all'esempio precedentemente trattato

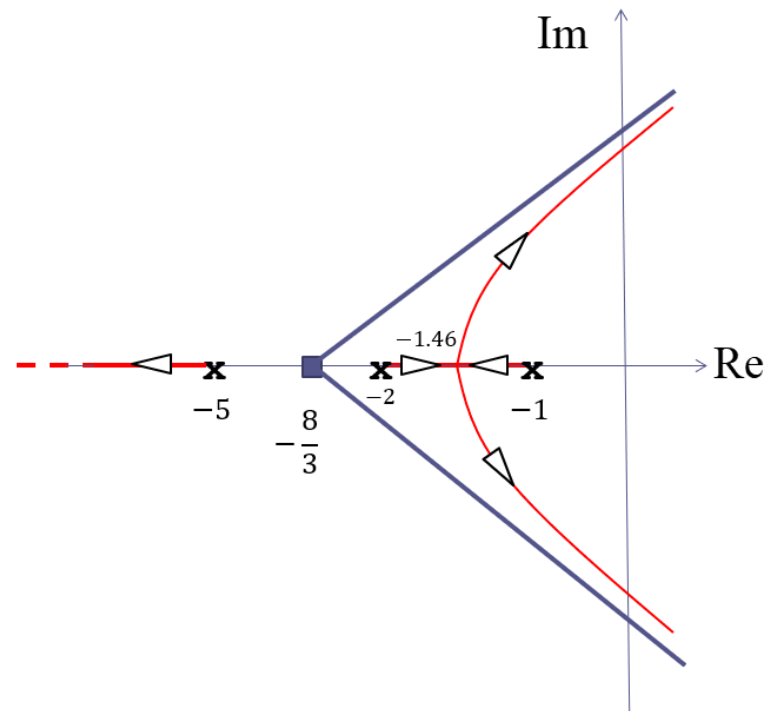


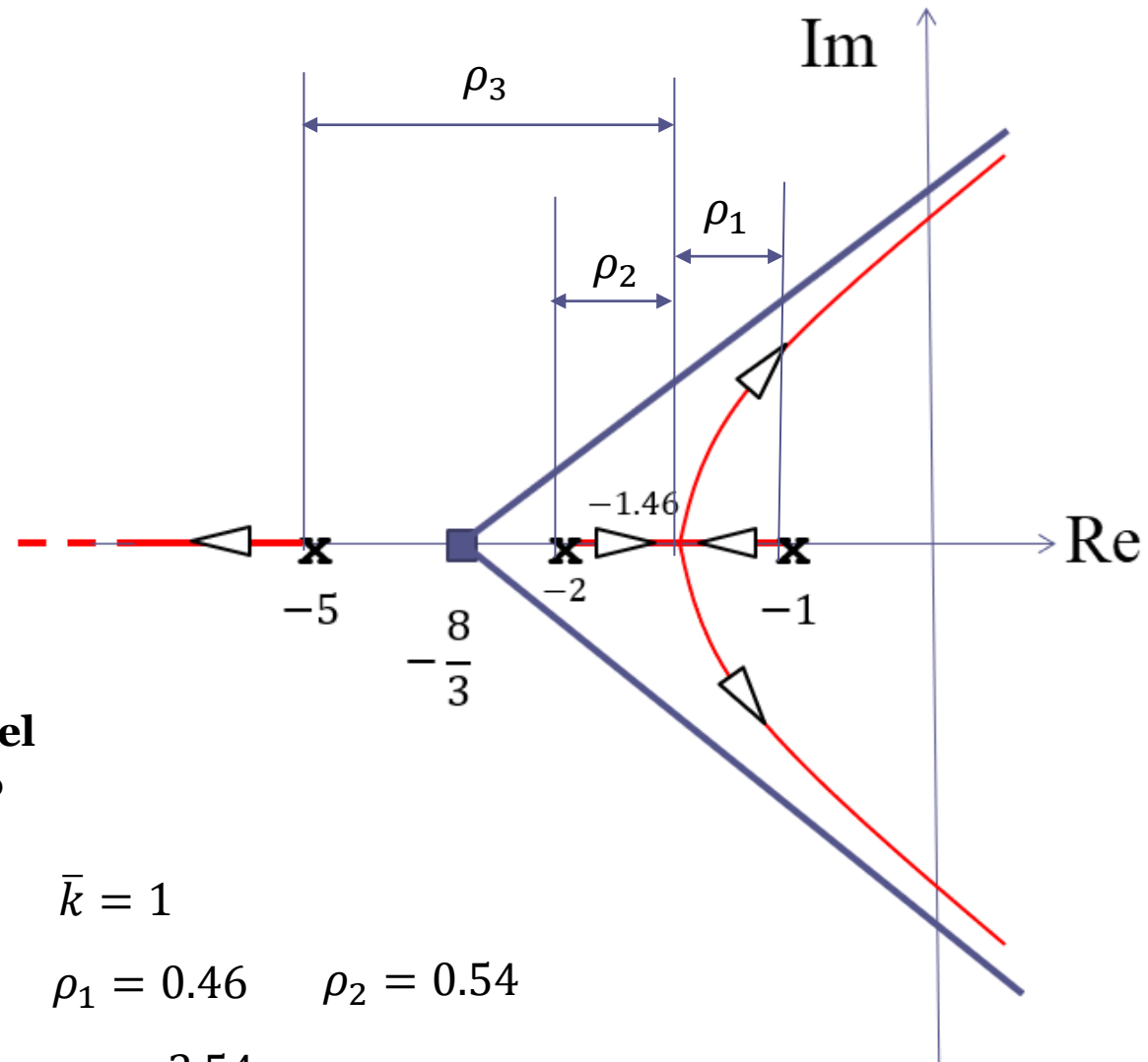
$$L(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

$\bar{k} = 1$  Guadagno in  
alta frequenza  
della  $L(s)$

con riferimento al quale era stato  
tracciato il seguente LdR

Togliamo il punto doppio in  $-1.46$   
per identificare il valore del  
guadagno  $k$  oltre il quale si  
inducono oscillazioni nella  
risposta al gradino a ciclo chiuso





**Formula di taratura del punto doppio in  $-1.46$**

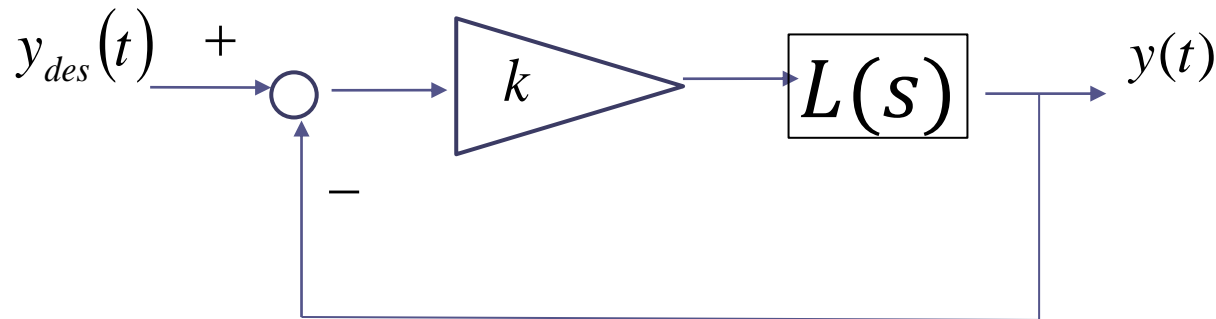
$$k = \frac{1}{\bar{k}} \rho_1 \rho_2 \rho_3$$

$$\bar{k} = 1$$

$$\rho_1 = 0.46 \quad \rho_2 = 0.54$$

$$\rho_3 = 3.54$$

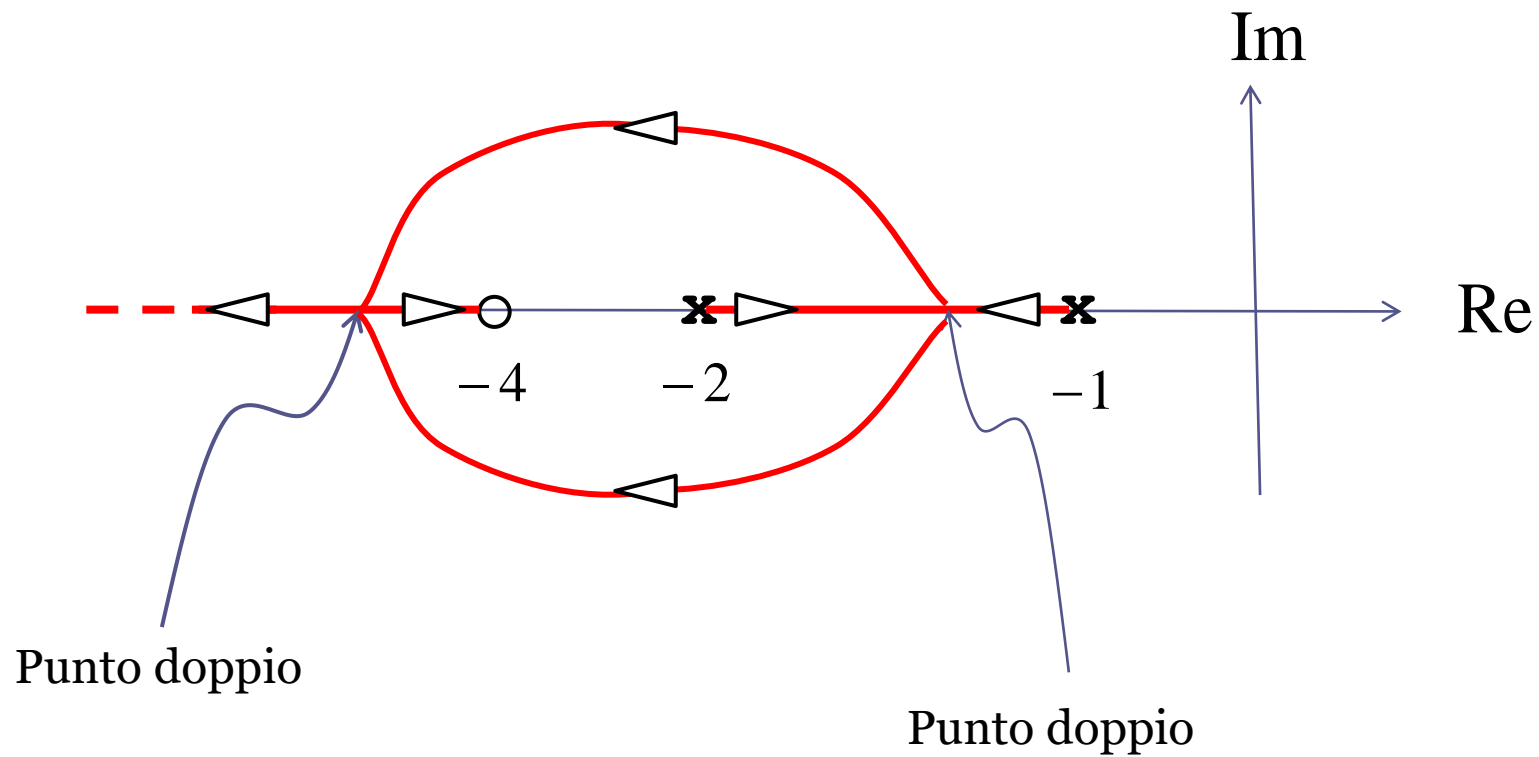
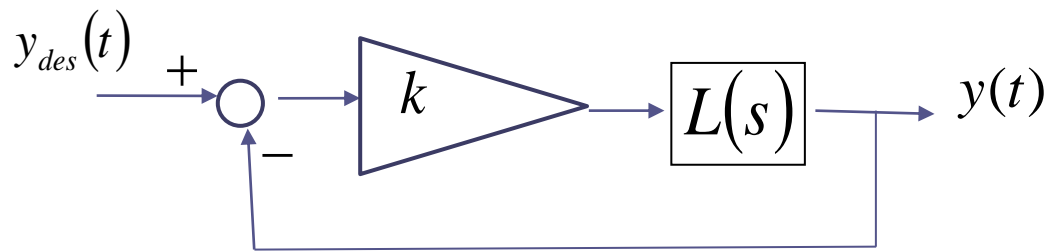
$$k = 0.46 \cdot 0.54 \cdot 3.54 = 0.879$$

**ESEMPIO** Con riferimento al seguente sistema in retroazione

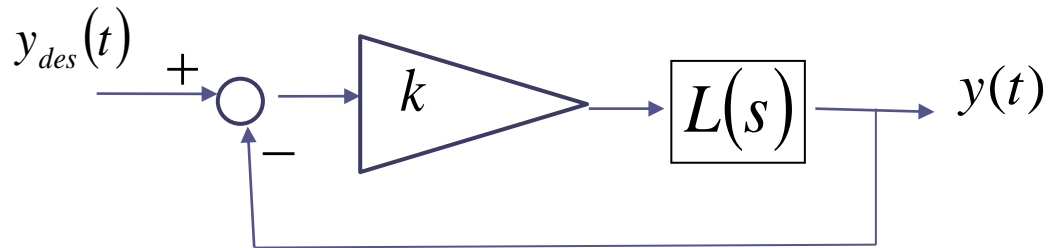
$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

Tracciare il luogo delle radici e valutare di conseguenza le proprietà di stabilità a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta del sistema di controllo al variare del guadagno  $k$ .

$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$



$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$



Equazione dei punti doppi

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s^* - z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s^* - p_i} = 0$$

$$\frac{1}{s^* + 4} - \frac{1}{s^* + 1} - \frac{1}{s^* + 2} = 0$$



$$-\frac{s^{*2} + 8s^* + 10}{(s^* + 1)(s^* + 2)(s^* + 4)} = 0$$

$$s^{*2} + 8s^* + 10 = 0$$



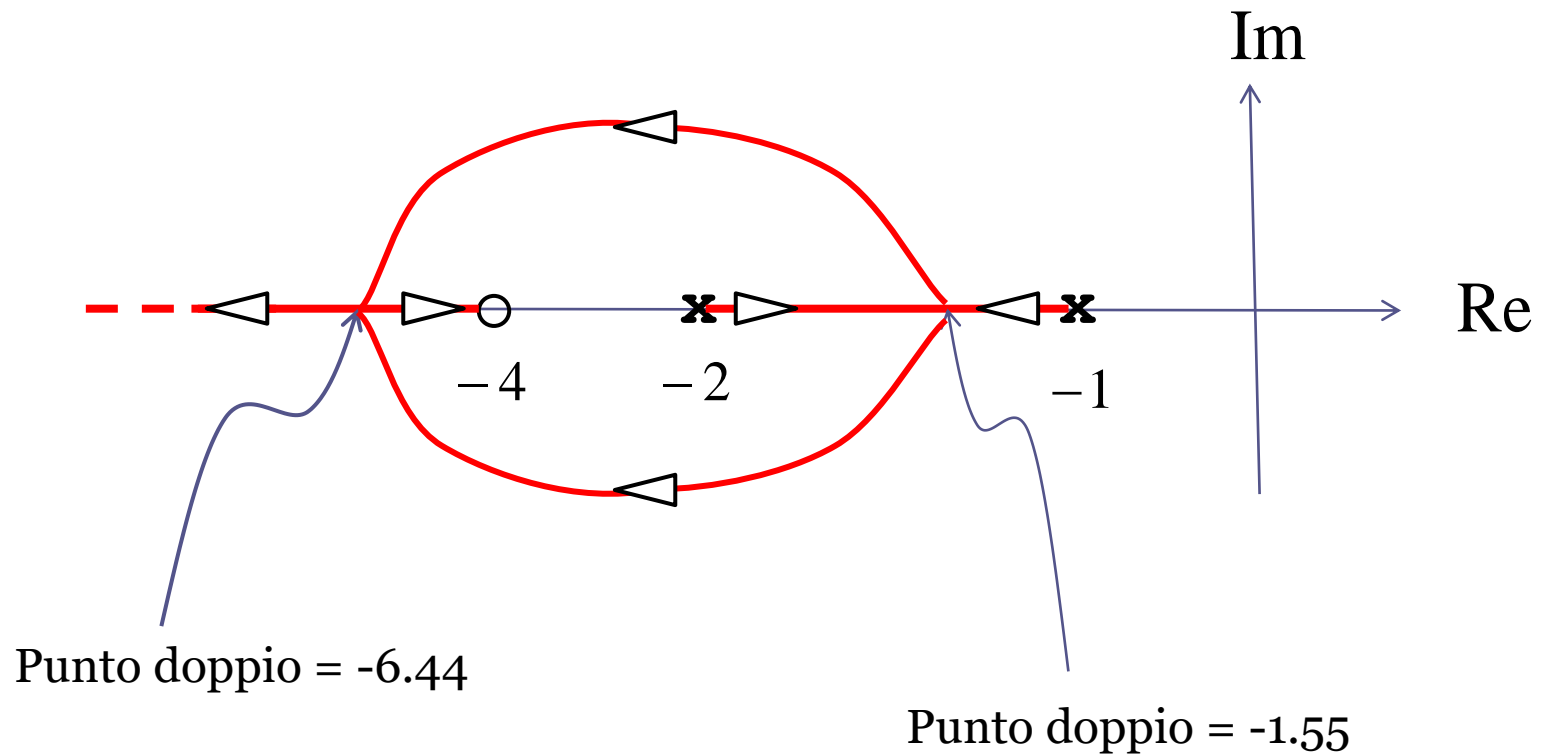
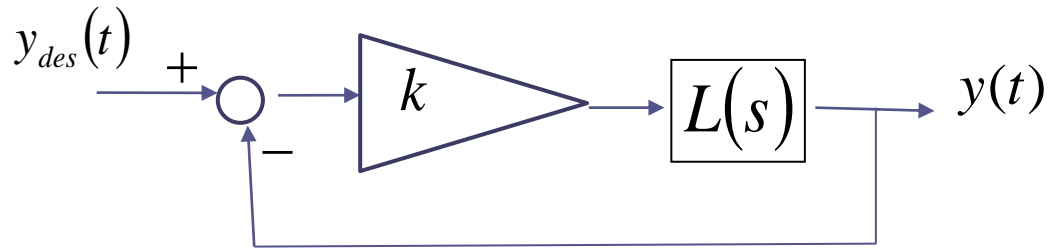
$$s_1 = -1.55$$

$$s_2 = -6.44$$

Entrambi OK

$$L(s) = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$

$$\bar{k} = 2$$



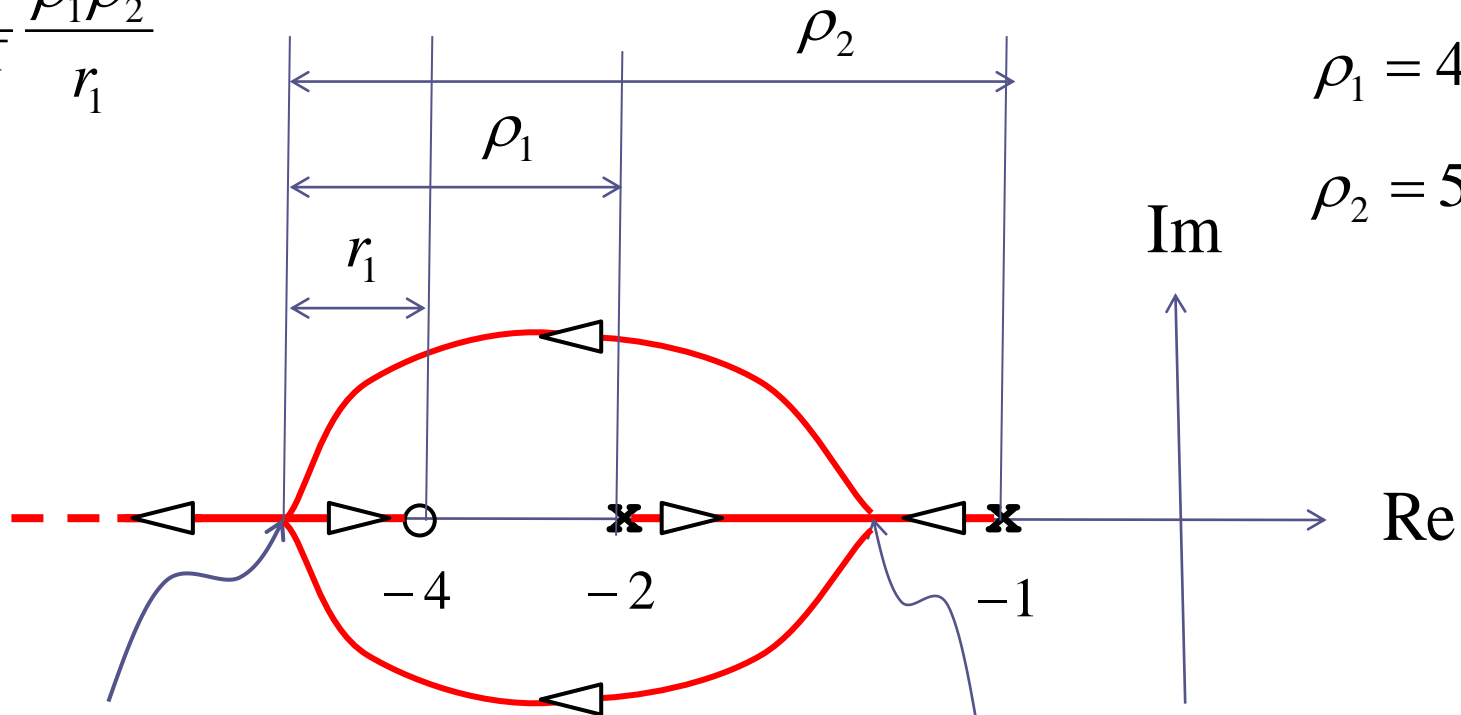
Per quale valore di  $k$  i due poli sono pari entrambi a -6.44 ?

$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1}$$

$$r_1 = 2.44$$

$$\rho_1 = 4.44$$

$$\rho_2 = 5.44$$



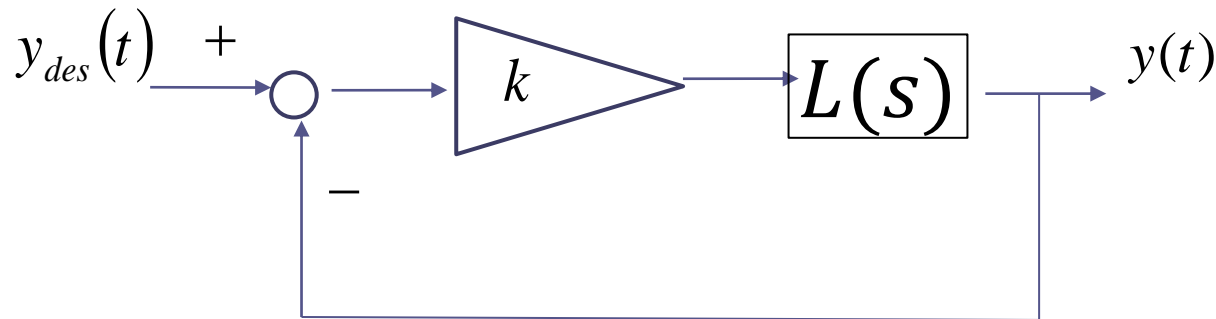
Punto doppio = -6.44

Punto doppio = -1.55

Taratura del  
punto doppio in -6.44



$$k = \frac{1}{\bar{k}} \frac{\rho_1 \rho_2}{r_1} = \frac{1}{2} \frac{(4.44) \cdot (5.44)}{(2.44)} = 4.94$$

**ESERCIZI** Con riferimento ai seguenti sistemi in retroazione

$$L(s) = \frac{5(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

$$L(s) = \frac{5(s+2)}{s^2 + 2s + 3}$$

Tracciare il luogo delle radici e valutare di conseguenza le proprietà di stabilità a ciclo chiuso e le caratteristiche della risposta del sistema di controllo al variare del guadagno  $k$ .