Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Serie numeriche

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

LU 11 OTT 2021

SERIE NUMERICHE

ESEMPIO:

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

DOVE $k!$ DENOTA IL FATTORIALE DI $k \in \mathbb{N}$ CHE SI PUÒ DEFINIRE PONENDO

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ k! = 1 \cdot \ldots \cdot k, & \text{SE } k \geq 1 \end{cases}$$

OPPURE, EQUIVALENTEMENTE,

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (k+1)! = k! \cdot (k+1), & k \geq 0 \end{cases}$$

LA FORMULA COLORATA ESPRIME LA PROPRIETÀ PRINCIPALE DEI FATTORIALI. AD ESEMPIO, ESSA PERMETTE DI SCRIVERE

$$\frac{(k+1)!}{k!} = k+1$$

ALCUNI VALORI NUMERICI:

k	0	1	2	3	4	5	6
$k!$	1	1	2	6	24	120	720

POSSIAMO QUINDI SVILUPPARE IL SIMBOLO DI SOMMATORIA E SCRIVERE

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} =$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots$$

LA SOMMA DI UNA SERIE NON È UN'OPERAZIONE ALGEBRICA (PERCHÉ IL NUMERO DEGLI ADDENDI È INFINITO) MA FA INTERVENIRE IL CONCETTO DI LIMITE DI UNA SUCCESSIONE.

IN GENERALE, DATA UNA SUCCESSIONE (a_n), PER DEFINIRE LA SOMMA

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

SI CONSIDERANO INNANZITUTTO LE SOMME RIDOTTE O SOMME PARZIALI

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

CHE SI POSSONO ANCHE SCRIVERE

$$S_n = a_0 + \ldots + a_n$$

SI HA, OVVIAMENTE,

$$S_{n+1} = a_0 + \ldots + a_n + a_{n+1}$$

E QUINDI $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$.

SI HA, INOLTRE $S_0 = a_0$

LU 11 OTT 2021

DEFINIZIONE: SE ESISTE IL LIMITE

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S,$$

FINITO O INFINITO, SI SCRIVE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S$$

ED S SI CHIAMA SOMMA DELLA SERIE. SE $S \in \mathbb{R}$ SI DICE CHE LA SERIE È CONVERGENTE, SE $S = \pm\infty$ SI DICE CHE LA SERIE È DIVERGENTE. SE, INFINE, LA SUCCESSIONE DELLE SOMME S_n NON AMMETTE LIMITE, LA SERIE SI DICE INDETERMINATA.

ESEMPIO: PONIAMO $a_n = 0$ PER OGNI n, COSICCHÉ $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ PER OGNI n, E PERCIÒ $\sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$ (LA SERIE CONVERGE BANALMENTE).

ESEMPIO: PONIAMO $a_n = 1$ PER OGNI n, COSICCHÉ $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1$

$$= a_0 + \ldots + a_n = 1 + \ldots + 1 = n+1$$

QUINDI $\sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty$ (LA SERIE DIVERGE BANALMENTE).

ESEMPIO: PONIAMO $a_n = (-1)^n$ COSICCHÉ $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k =$

$$= 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \\ 1, & \text{SE } n \text{ È PARI} \end{cases}$$

SI RAMMENTI CHE

$$S_{2k} = S_{2k-1} + a_{2k}$$
$$= 0 + (-1)^{2k} = 1.$$

SICCOME LA SUCCESSIONE (S_n) NON AMMETTE LIMITE, LA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

È INDETERMINATA.

IMPORTANZA DELLE SERIE: SAPENDO CHE $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \in \mathbb{R}$, SI USA $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ COME SURROGATO (APPROSSIMAZIONE) DI S.

AD ESEMPIO (JPEG), LA SOMMA S RAPPRESENTA UN'IMMAGINE E S_n È L'IMMAGINE COMPRESSA.

LU 11 OTT 2021

LA SERIE INDETERMINATA $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k$

È UN CASO PARTICOLARE $(q=-1)$

DELLA SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

DOVE LA BASE $q \in \mathbb{R}$ VIENE DETTA RAGIONE DELLA SERIE. LE SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} 0^k$ E $\sum_{k=0}^{+\infty} 1$ CORRISPONDONO AI CASI $q=0$ E $q=1$.

LE SERIE GEOMETRICHE SONO TRA QUELLE (POCHE) ALLE QUALI SI PUÒ APPLICARE LA DEFINIZIONE DI SOMMA.

INFATTI È NOTO DALL'ANTICHITÀ CHE

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{SE } q \neq 1, \\ n+1, & \text{SE } q=1 \end{cases}$$

VEDERE GLI ELEMENTI DI EUCLIDE, LIBRO IX, PROPOSIZIONE 35.

SVOLGIAMO UNA DIMOSTRAZIONE VALIDA PER $q \neq 1$, AVENDO GIÀ ESAMINATO IL CASO $q=1$.

MOLTIPLICANDO AMBO I MEMBRI PER $q-1 \neq 0$, L'UGUAGLIANZA DA VERIFICARE $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

DIVENTA

$$(1-q)\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}$$

E CIOÈ $\sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k =$

$$= q^0 + q + q^2 + \dots + q^n + \\ -q - q^2 - \dots - q^n - q^{n+1}$$

$$= 1 - q^{n+1}.$$

PROCEDIAMO QUINDI A TROVARE IL $\lim_{n\to+\infty} S_n$. SE $q=1$ SAPPIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$.

SE, INVECE, $q \in (-1,1) \cup (1,+\infty)$ TROVIAMO

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{SE } q>1 \\ \dfrac{1}{1-q}, & \text{SE } q \in (-1,1) \end{cases}$$

QUINDI LA SERIE GEOMETRICA CONVERGE SE $q \in (-1,1)$ E DIVERGE SE $q \geq 1$ E SI PUÒ SCRIVERE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{PER } q \in (-1,1)$$

VERIFICHIAMO L'UGUAGLIANZA NEL CASO PARTICOLARE $q=0$. IL SECONDO MEMBRO VALE EVIDENTEMENTE 1. IL PRIMO MEMBRO SI RIDUCE A $\sum_{k=0}^{+\infty} 0^k =$

$= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$ E L'UGUAGLIANZA È SODDISFATTA.

INFINE, SE $q \leq -1$ LA SUCCESSIONE $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ NON AMMETTE LIMITE, QUINDI LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ È INDETERMINATA.

MA 12 OTT 2021

PROBLEMA: PERCHÉ S_n NON AMMETTE LIMITE? SIAMO SICURI?

IL CASO $q=-1$ È STATO GIÀ ESAMINATO IN DETTAGLIO. CONSIDERIAMO ALLORA $q<-1$ ED OSSERVIAMO CHE

$$S_{2k} = \frac{1-q^{2k+1}}{1-q} = \frac{1-(-|q|)^{2k+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-(-1)^{2k+1}|q|^{2k+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1+|q|^{2k+1}}{1-q}$$

RICORDANDO CHE $b=|q|>1$ E CHE $1-q>2>0$, SI DEDUCE CHE

$$\lim_{k\to+\infty} S_{2k} = +\infty.$$

VOLTIAMOCI INDIETRO, E VERIFICHIAMO CON $q=-2$, CHE $S_0 = \frac{1-(-2)^1}{1-(-2)} = 1$, $S_2 = \frac{1-(-2)^3}{3} = 3$, $S_4 = \frac{1-(-2)^5}{3} = 11$.

POSSIAMO DIRE CHE LA SUCCESSIONE (S_n) CONTIENE UNA SOTTOSUCCESSIONE CHE DIVERGE A $+\infty$: ESSA È (S_{2k}).
COME NELLA LEZIONE DEL 01/10, SE NE DEDUCE CHE LA SUCCESSIONE (S_n) È ILLIMITATA SUPERIORMENTE. NE SEGUE CHE (S_n) NON CONVERGE AD UN LIMITE FINITO, E NEMMENO PUÒ DIVERGERE A $-\infty$, PERCHÉ IN TAL CASO SAREBBE SUPERIORMENTE LIMITATA (SI RAGIONA COME IL 07/10).

PER CONCLUDERE, BASTA VERIFICARE CHE $S_n \not\to +\infty$. A TAL FINE BASTA VERIFICARE CHE S_n È ILLIMITATA INFERIORMENTE, E QUESTO È VERO PERCHÉ

$$S_{2k-1} = \frac{1-q^{2k}}{1-q} \longrightarrow -\infty.$$

PROBLEMA: STUDIARE LA CONVERGENZA DELLA SERIE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 q^k \quad \text{DOVE } q \in \mathbb{R} \text{ E}$$

a_0 UN PARAMETRO FISSATO IN $\mathbb{R}$.

OSSERVIAMO INNANZITUTTO CHE SE $a_0 = 0$ SI HA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 q^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$.

PER STUDIARE IL CASO GENERALE, APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE E CONSIDERIAMO LA SOMMA RIDOTTA

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = a_0 S_n$$

QUINDI, SE $a_0 \neq 0$, SI HA

$$\sum_{k=0}^{n} a_0 q^k = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_0)\cdot\infty, & \text{SE } q \geq 1 \\ \dfrac{a_0}{1-q}, & \text{SE } q \in (-1,1) \end{cases}$$

SE, INFINE, $a_0 \neq 0$ E $q \leq -1$ LA SERIE È INDETERMINATA.

TEOREMA: SE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$

ALLORA PER OGNI $\lambda \in \mathbb{R}$ RISULTA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k = \lambda S = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

SE, INVECE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \pm\infty$ ALLORA

PER OGNI $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ SI HA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k = \operatorname{sgn}(\lambda) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

DIMOSTRAZIONE: SI RAGIONA COME SOPRA.

MA 12 OTT 2021

PROBLEMA: STUDIARE LA CONVERGENZA DELLA SERIE $\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k$ CON UN PRIMO ESTREMO k_0 FISSATO ARBITRARIAMENTE IN $\mathbb{N}$.

BASTA OSSERVARE CHE $\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k =$

$$= q^{k_0} + q^{k_0+1} + \dots = q^{k_0}\cdot 1 + q^{k_0}\cdot q + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} q^{k_0}\cdot q^i = q^{k_0} \sum_{i=0}^{+\infty} q^i =$$

$$= \frac{q^{k_0}}{1-q} \quad \text{PER } q \in (-1,1).$$

SE $q \geq 1$ SI TROVA $\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = +\infty$.

ESAMINIAMO PIÙ IN DETTAGLIO IL CASO $q = 1$. IN QUESTO CASO TROVIAMO

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} 1^k = \sum_{k=k_0}^{+\infty} 1 =$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty \checkmark$$

INFINE, SE $q \leq -1$, SCRIVIAMO $T_n = \sum_{k=k_0}^{k_0+n} q^k = q^{k_0} \sum_{i=0}^{n} q^i = q^{k_0} S_n$

E QUINDI $S_n = \dfrac{T_n}{q^{k_0}}$, DA CUI

SEGUE CHE T_n NON HA LIMITE PERCHÉ NEMMENO S_n CE L'HA, QUINDI LA SERIE $\sum_{k=k_0}^{+\infty} q^k$ È INDETERMINATA.

MA 12 OTT 2021

TEOREMA: IL CARATTERE DI UNA QUALUNQUE SERIE NUMERICA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ È LO STESSO DELLA SERIE $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, DETTA «RESTO».

DIMOSTRAZIONE: SI RAGIONA COME PRIMA.

IN PARTICOLARE, SE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$, ALLORA PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = S$$

CIOÈ

$$S_n + R_n = S.$$

DIMOSTRAZIONE: SI RAGIONA COME PRIMA.

OSSERVAZIONE: RICAVANDO $R_n = S - S_n$ SI DEDUCE CHE $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$:

SE UNA SERIE CONVERGE, IL RESTO TENDE A ZERO.

PERCHÉ LE SERIE SONO IMPORTANTI?

ESSE CONSENTONO, AD ESEMPIO, DI ESPRIMERE LE FUNZIONI PIÙ IMPORTANTI, COME

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

E

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

PREGI: PER ESPRIMERE $\operatorname{sen} x$ E $\cos x$ «BASTANO» LE 4 OPERAZIONI!

DIFETTI: CE NE VOGLIONO INFINITE...

GI 14 OTT 2021

SI NOTI CHE OGNI NUMERO REALE $x = \pm c_1 \dots c_N, d_1 d_2 \dots$ SI PUÒ VEDERE COME SOMMA DI UNA SERIE. SI HA, INFATTI, $x = \pm c_1 \dots c_N +$

$$\pm\left(\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{100}+\dots\right) = \pm c_1 \dots c_N \pm \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d_k}{10^k}$$

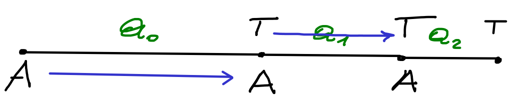
SE POI IL NUMERO x È PERIODICO, LO SI PUÒ RAPPRESENTARE COME SOMMA DI UNA SERIE GEOMETRICA, MEDIANTE LA QUALE SI PUÒ TROVARE LA FRAZIONE GENERATRICE.

ESEMPIO: $x = 1{,}0232323\ldots =$

$$= 1{,}0\overline{23} = 1 + \frac{1}{1000}\,23{,}\overline{23} = 1 + \frac{1}{1000}\left(23 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \dots\right) = 1 +$$

$$+ \frac{1}{1000}\,23\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{100^k} = 1 + \frac{23}{1000}\,\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \frac{23}{10}\cdot\frac{1}{100-1} = 1 + \frac{23}{990} = \frac{1013}{990}$$

MEDIANTE LE SERIE GEOMETRICHE SI PUÒ ANCHE RILEGGERE IL PARADOSSO DI ACHILLE E LA TARTARUGA, DOVUTO A ZENONE DI ELEA.



$v_T < v_A$

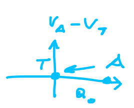
$s = vt$

$t_0 = \frac{a_0}{v_A}$ $\qquad a_1 = v_T\,\frac{a_0}{v_A} = \frac{v_T}{v_A}\,a_0$

$t_1 = \frac{a_1}{v_A} = \frac{v_T}{v_A^2}\,a_0$ $\qquad a_2 = v_T\,t_1 = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 a_0$

IL PERCORSO COMPLESSIVO DI ACHILLE SI PUÒ VEDERE COME $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k a_0 = a_0\,\frac{1}{1-\frac{v_T}{v_A}}$$



LA DURATA SARÀ $\frac{a_0}{v_A}\,\frac{1}{1-\frac{v_T}{v_A}} = \frac{a_0}{v_A - v_T}$

CALCOLIAMO, INCIDENTALMENTE, LA SOMMA $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \dots + n$ (CHE NON È UNA SERIE). POICHÉ

$$\sum_{k=1}^{2i} k = 1 + \dots + 2i = \begin{matrix} 1 + \dots + i \, + \\ 2i + \dots + i+1 \end{matrix} = (2i+1)\cdot i,$$

POSSIAMO DIRE CHE SE n È PARI SI HA $\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)\,\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. AD ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{100} k = 1 + \dots + 100 = \frac{100\cdot 101}{2} = 5.050$.

NEL CLASSICO LIBRO « I GRANDI MATEMATICI » DI E. T. BELL L'IDEA È ATTRIBUITA A KARL FRIEDRICH GAUSS.

SE n È DISPARI, PONIAMO $n = 2i - 1$ E SCRIVIAMO $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{2i} k - 2i =$

$$= (2i+1)\cdot i - 2i = (2i-1)\,i = n\,\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

LA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE

TEOREMA: SE UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGE AD UNA SOMMA $S \in \mathbb{R}$, ALLORA $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$.

ESEMPIO: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ NON SODDISFA LA CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÉ $(-1)^k \not\to 0$, QUINDI LA MEDESIMA NON CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA (INFATTI È INDETERMINATA).

ESEMPIO: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} 1$ NON SODDISFA LA CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÉ $a_k \to 1 \neq 0$ E QUINDI NON CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA (INFATTI DIVERGE A $+\infty$).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: SAPPIAMO CHE $a_n = S_n - S_{n-1}$ PER OGNI $n \geq 1$. PRESO $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ESISTE n_0 TALE CHE SE $n > n_0$ SI HA $|S_n - S| < \varepsilon$. PRENDO ALLORA $n > n_0 + 1 = n_1$ COSICCHÉ POSSO SCRIVERE $|S_{n-1} - S| < \varepsilon$. SOMMANDOLE FRA DI LORO, E USANDO LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, TROVIAMO

$$\begin{aligned} |a_n| &= |S_n - S_{n-1}| \\ &= |S_n - S + S - S_{n-1}| \\ &\leq |S_n - S| + |S_{n-1} - S| \\ &< 2\varepsilon \quad \text{PER OGNI } n > n_1 \end{aligned}$$

E LA TESI SEGUE DALLA DEFINIZIONE DI LIMITE.

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

TEOREMA: LE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI NON SONO INDETERMINATE.

DIMOSTRAZIONE: POSTO $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, SE $a_k \geq 0$ PER OGNI k, SI HA $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ PER OGNI n, QUINDI LA SUCCESSIONE (S_n) È MONOTONA E PERCIÒ AMMETTE LIMITE, FINITO O INFINITO. DUNQUE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA O DIVERGE A $+\infty$.

DOMANDA: SE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R}$, POSSIAMO SAPERE IL SEGNO DI S?

RISPOSTA: SICCOME $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \geq 0$ PER OGNI n, DAL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO SEGUE CHE $S \geq 0$.

 GI 14 OTT 2021

$$\boxed{\text{SERIE ARMONICA: } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}}$$

SI VEDE SUBITO CHE LA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA È SODDISFATTA, IN QUANTO $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$.

INOLTRE È UNA SERIE A TERMINI POSITIVI, QUINDI LA SUCCESSIONE $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ È STRETTAMENTE CRESCENTE, QUINDI AMMETTE LIMITE, FINITO O INFINITO. PER VERIFICARE CHE

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

BASTA VERIFICARE CHE LA SUCCESSIONE (S_n) È ILLIMITATA, IN QUANTO LA LIMITATEZZA DI S_n È CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ $S_n \to S \in \mathbb{R}$ (LEZIONE DEL 01/10).

PER VERIFICARE CHE (S_n) È ILLIMITATA, TROVIAMO (ISPIRANDOCI AD ORESME) UNA SOTTOSUCCESSIONE $S_{n_k} \to +\infty$, E PRECISAMENTE (S_{2^k}). CALCOLIAMO ALCUNI TERMINI:

$$S_{2^0} = S_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1$$

$$S_{2^1} = S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_{2^2} = S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

QUINDI $S_{2^2} > S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$S_{2^3} = S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$
$$> 1 + 2\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1 + 3\frac{1}{2}$$

$$S_{2^4} = S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} >$$
$$> 1 + 3\frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{16} = 1 + 4\frac{1}{2}$$

IN GENERALE:

$$S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} >$$
$$> S_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2}$$

QUINDI $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ PER OGNI $n \geq 0$

E PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO SI PUÒ SCRIVERE $S_{2^n} \longrightarrow +\infty$.

DUNQUE (S_n) È ILLIMITATA SUPERIORMENTE, E IL SUO LIMITE, CHE ESISTE PER LA COMPLETEZZA, DEV'ESSERE $+\infty$.

VE 15 OTT 2021

TEOREMA DEL CONFRONTO

CONSIDERIAMO DUE SERIE: $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ E $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ TALI CHE

$$0 \le a_k \le b_k \quad \text{PER OGNI } k.$$

SE $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = B \in [0,+\infty)$ ALLORA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = A \in [0,B]$.

ESEMPIO: LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+2^n}$ CONVERGE AD UN $A \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

OSSERVAZIONE: SE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = +\infty$ ALLORA $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = +\infty$.

ESEMPIO: SAPENDO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ SI DEDUCE CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ PER OGNI $\alpha \in (-\infty, 1]$ IN QUANTO RISULTA $k^\alpha \le k$ E QUINDI $\frac{1}{k} \le \frac{1}{k^\alpha}$ PER OGNI $k = 1, 2, \dots$

SI NOTI CHE CON $x = \frac{1}{2}$ ED $\alpha = \frac{1}{2}$ SI TROVA $x^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} = x$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: LA SOMMA PARZIALE $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ SODDISFA PER IPOTESI LA DISUGUAGLIANZA $S_n \le \sum_{k=0}^{n} b_k = T_n \to B$ E LA TESI SEGUE APPLICANDO IL TEOREMA DEL CONFRONTO PER LE SUCCESSIONI.

COROLLARIO (TEOREMA DEL CONFRONTO ASINTOTICO): DATE DUE SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ E $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ A TERMINI POSITIVI, SE RISULTA

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in (0,+\infty)$$

ALLORA LE DUE SERIE HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMOSTRAZIONE: FISSATO $\varepsilon_0 \in (0,\ell)$, AD ESEMPIO $\varepsilon_0 = \ell/2$, SAPPIAMO PER IPOTESI CHE

$$0 < \ell - \varepsilon_0 < \frac{a_k}{b_k} < \ell + \varepsilon_0$$

PER $k > k_0$ OPPORTUNO. QUINDI

$$(\ell-\varepsilon_0)\, b_k < a_k < (\ell+\varepsilon_0)\, b_k$$

E PERCIÒ, PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO,

$$\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (\ell-\varepsilon_0) b_k \le \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} a_k \le \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (\ell+\varepsilon_0)\, b_k$$

(SI INTENDE CHE $+\infty \le +\infty$). LA TESI SEGUE DAL FATTO CHE

$$\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (\ell-\varepsilon_0) b_k = (\ell-\varepsilon_0) \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} b_k$$

E $\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (\ell+\varepsilon_0)\, b_k = (\ell+\varepsilon_0) \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} b_k$

(SI INTENDE CHE SE $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ALLORA $\lambda \cdot (+\infty) = +\infty$) E DAL FATTO CHE IL CARATTERE DEL RESTO DI UNA SERIE È LO STESSO DI QUELLO DI TUTTA LA SERIE.

 VE 15 OTT 2021

ESEMPIO: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-1}{2k^2+3k+1}$

DIVERGE A $+\infty$. LO VEDIAMO PER CONFRONTO ASINTOTICO CON LA SERIE ARMONICA: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. SI TROVA, INFATTI,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{k-1}{2k^2+3k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2-k}{2k^2+3k+1}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{k}}{2+\frac{3}{k}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} = \ell \in \mathbb{R}^+.$$

LA CONVERGENZA ASSOLUTA

AD OGNI SERIE NUMERICA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

RESTA ASSOCIATA LA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \in [0,+\infty]$.

DEFINIZIONE: LA SERIE DATA SI DICE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty.$$

ESEMPIO: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ NON È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE PERCHÉ

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |(-1)^k| = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

ESEMPIO: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{3}$

CONVERGE ASSOLUTAMENTE PERCHÉ

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2 < +\infty.$$

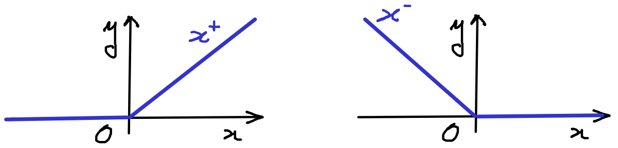
TEOREMA: TUTTE LE SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI RISULTANO CONVERGENTI.

PER LA DIMOSTRAZIONE INTRODUCIAMO LE FUNZIONI $x^+ = \frac{|x|+x}{2} = \max\{x,0\}$

$$= \begin{cases} x, & \text{SE } x \geq 0 \\ 0, & \text{SE } x < 0 \end{cases} \quad \text{(PARTE POSITIVA DI } x\text{)}$$

E $x^- = \frac{|x|-x}{2} = -\min\{x,0\}$

$$= \begin{cases} 0, & \text{SE } x \geq 0 \\ |x|, & \text{SE } x < 0 \end{cases} \quad \text{(PARTE NEGATIVA)}$$



TRAMITE LE QUALI POSSIAMO SCRIVERE $x = x^+ - x^-$ E $|x| = x^+ + x^-$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA: LE SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^+$ E $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^-$ CONVERGONO PER CONFRONTO CON $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < +\infty$ IN QUANTO $0 \leq a_k^+, a_k^- \leq |a_k|$,

E SI HA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^+ - a_k^-) =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^- \in \mathbb{R}.$$

LEMMA: SE DUE SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ E $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ CONVERGONO, ANCHE $\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - b_k)$ CONVERGE E $\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

DIMOSTRAZIONE: PER LA DEFINIZIONE DI CONVERGENZA DI UNA SERIE, DOBBIAMO VEDERE SE LA SUCCESSIONE DELLE $S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)$ AMMETTE LIMITE FINITO. PER LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELL'ADDIZIONE SI HA $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} b_k$.

PER IPOTESI, LE DUE SUCCESSIONI

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad E \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

CONVERGONO A LIMITI FINITI, CHE SI INDICANO, RISPETTIVAMENTE, CON $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ E $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$, E LA TESI SEGUE DAL TEOREMA SUL LIMITE DELLA DIFFERENZA.

LU 18 OTT 2021

COME STABILIRE SE UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI CONVERGE AD UNA SOMMA FINITA ?

OSSERVIAMO, INNANZITUTTO, CHE I TERMINI $a_k = a_0 q^k$ DI UNA SERIE GEOMETRICA $\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 q^k$ CON a_0 E $q \neq 0$ GODONO DELLA PROPRIETÀ CHE

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_0 q^{k+1}}{a_0 q^k} = q \quad \text{PER OGNI } k.$$

ANZI, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE I TERMINI DI UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ GODONO DELLA PROPRIETÀ CHE IL RAPPORTO $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ È INDIPENDENTE DA k, ALLORA LA SERIE DATA È UNA SERIE GEOMETRICA: INFATTI, PER L'IPOTESI, POSSIAMO DEFINIRE $z = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ E POSSIAMO SCRIVERE $a_1 = z a_0$, $a_2 = z a_1$, ... E QUINDI $a_2 = z^2 a_0$, $a_3 = z^3 a_0$, ... E, IN GENERALE, $a_k = z^k a_0$ DUNQUE LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ SI PUÒ SCRIVERE COME $\sum_{k=0}^{+\infty} a_0 z^k$, QUINDI È UNA SERIE GEOMETRICA.

CRITERIO DEL RAPPORTO: 1. DATA UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CON $a_k > 0$ DEFINITIVAMENTE, SE

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in [0,1)$$

ALLORA LA SERIE CONVERGE. 2. INOLTRE, DATA UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE, SE ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE $a_{n_k} \neq 0$ TALE CHE $\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}}\right| = \ell \in (1,+\infty)$

ALLORA $a_k \not\to 0$ E QUINDI LA SERIE NON CONVERGE.

DIMOSTRAZIONE. 1. APPLICHIAMO LA DEFINIZIONE DI LIMITE CON $\varepsilon_0 \in (0, 1-\ell)$: ESISTE k_0 TALE CHE $a_k > 0$

E $\ell - \varepsilon_0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \ell + \varepsilon_0$ PER OGNI $k > k_0$.

QUINDI

$$a_{k_0+2} < (\ell+\varepsilon_0)\, a_{k_0+1}$$
$$a_{k_0+3} < (\ell+\varepsilon_0)\, a_{k_0+2}$$
$$\dots$$

PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA, TROVO

$$a_{k_0+3} < (\ell+\varepsilon_0)^2\, a_{k_0+1}$$
$$a_{k_0+4} < (\ell+\varepsilon_0)^3\, a_{k_0+1}$$
$$\dots$$

E, IN GENERALE,

$$0 < a_{k_0+i} \leq (\ell+\varepsilon_0)^{i-1}\, a_{k_0+1}$$

PER $i = 1, 2, \dots$

E QUINDI, PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_{k_0+i} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} (\ell+\varepsilon_0)^{i-1} a_{k_0+1} = a_{k_0+1} \sum_{i=1}^{+\infty} (\ell+\varepsilon_0)^{i-1} = \frac{a_{k_0+1}}{1-(\ell+\varepsilon_0)}$$

E LA TESI SEGUE.

2. IN VIRTÙ DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE, PRENDO $\varepsilon_0 \in (0, \ell-1)$ E SO CHE

$$|a_{n_{k+1}}| > (\ell-\varepsilon_0)\, |a_{n_k}| > 0$$

PER OGNI $k > k_0$ OPPORTUNO. QUINDI

$$|a_{n_{k_0+i}}| \geq (\ell-\varepsilon_0)^{i-1} |a_{n_{k_0+1}}|$$

PER $i = 1, 2, 3, \dots$

SICCOME $\ell - \varepsilon_0 > 1$ SI HA CHE

$$\lim_{i\to+\infty} |a_{n_{k_0+i}}| = +\infty$$ QUINDI LA SUCCESSIONE (a_k) È ILLIMITATA E PERCIÒ NON TENDE A ZERO, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

UN COROLLARIO DEL CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SERIE È IL CRITERIO DEL RAPPORTO PER LE SUCCESSIONI:

SE $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \ell \in (-1,1)$ ALLORA (LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE E QUINDI) $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

UNA TIPICA APPLICAZIONE: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ CONVERGE QUALUNQUE SIA $x \in \mathbb{R}$. PER $x = 0$ LA SERIE È BANALE, DUNQUE PRENDIAMO $x \neq 0$ E CONSIDERIAMO LA SERIE A TERMINI POSITIVI $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$. POSTO

$$a_k = \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{SI TROVA} \quad a_{k+1} = \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!} =$$

$$= \frac{|x|^{2k+1} \cdot x^2}{(2k+1)!(2k+2)(2k+3)} = a_k \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)}$$

QUINDI $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 < 1$

PERTANTO LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE QUALUNQUE SIA $x \in \mathbb{R}$.

LU 18 OTT 2021

CRITERIO DELLA RADICE. 1. DATA UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ CON $a_k \geq 0$ DEFINITIVAMENTE, SE $\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell < 1$ ALLORA LA SERIE CONVERGE. 2. DATA UNA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE, SE ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE (a_{n_k}) TALE CHE

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \ell > 1 \quad \text{ALLORA}$$

$a_k \not\to 0$ QUINDI LA SERIE DATA NON CONVERGE (QUESTO VALE ANCHE SE $\ell = +\infty$).

DIMOSTRAZIONE: 1. PRENDO $\varepsilon_0 \in (0, 1-\ell)$ E SO CHE $\sqrt[k]{a_k} < \ell + \varepsilon_0 < 1$ PER OGNI $k > k_0$ OPPORTUNO, QUINDI $a_k < (\ell + \varepsilon_0)^k$

$$\text{DA CUI} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} a_k < \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (\ell+\varepsilon_0)^k =$$

$$= \frac{(\ell+\varepsilon_0)^{k_0+1}}{1-(\ell+\varepsilon_0)} < +\infty \quad \text{PER IL TEOREMA}$$

DEL CONFRONTO. 2. PRENDO $\varepsilon_0 \in (0, \ell-1)$ COSICCHÉ $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \ell - \varepsilon_0 > 1$ PER $k > k_0$, QUINDI

$$|a_{n_k}| > (\ell - \varepsilon_0)^{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$$

DA CUI SEGUE CHE $a_k \not\to 0$.

 MA 19 OTT 2021

PROBLEMA: LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ CONVERGE PER QUALCHE $x \in \mathbb{R}$? E CIOÈ PER QUALI x? SI VEDE CHE PER $x=0$ LA SERIE CONVERGE AD 1, DUNQUE CONSIDERIAMO LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ PER $x \neq 0$. POSTO $a_k = \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, SI TROVA $a_{k+1} = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} =$

$$= \frac{x^{2k} \cdot x^2}{(2k)!(2k+1)(2k+2)} = a_k \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)}$$

E QUINDI $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 < 1$.

INVOCANDO IL CRITERIO DEL RAPPORTO, E POICHÉ LA CONVERGENZA ASSOLUTA IMPLICA LA CONVERGENZA SEMPLICE, SI CONCLUDE CHE LA SERIE DATA CONVERGE PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

LA SERIE DI MENGOLI:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)k}}$$

SI STUDIA OSSERVANDO CHE

$$\frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{PER OGNI } k,$$

QUINDI $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)n} =$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$ DA CUI SEGUE CHE

$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$ E PERCIÒ POSSIAMO SCRIVERE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)k} = 1$.

CONSEGUENZA N. 1: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$

SI TROVA, INFATTI, CHE

$$\frac{\frac{1}{(k+1)k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \to 1 \in (0, +\infty)$$

E LA TESI SEGUE DAL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

CONSEGUENZA N. 2: PER $\alpha \in (2, +\infty)$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO.

MA 19 OTT 2021

QUAL È IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ NEL CASO IN CUI

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 \ ?$$

E QUALE SE $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$?

ESEMPIO 1: POSTO $a_k = \frac{1}{k}$, SI TROVA

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1} \quad \text{E} \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}} \longrightarrow 1$$

ESEMPIO 2: POSTO $b_k = \frac{1}{k^2}$, SI TROVA $b_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2}$ E QUINDI

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^2 \longrightarrow 1.$$

ESEMPIO 3: POSTO $c_k = \frac{1}{k^\alpha}$ SI TROVA

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^\alpha \longrightarrow 1$$

IN GENERALE, È NOTO CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ PER $\alpha > 1$, E $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ SE $\alpha \leq 1$.

CONCLUSIONE: SE $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, IL CARATTERE DELLA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ DIPENDE DAI TERMINI DELLA SERIE.

PROBLEMA: RICAVARE UNA CONCLUSIONE ANALOGA PER IL CRITERIO DELLA RADICE.

CRITERIO DI LEIBNIZ PER LE SERIE AVENTI LA FORMA $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$ PER OGNI k.

ESEMPIO: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$

$= \frac{\pi}{4} \in (0,1)$.

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA CONVERGENZA È CHE SIANO SODDISFATTE LE DUE SEGUENTI IPOTESI:

1) $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

2) $a_k \geq a_{k+1}$ PER OGNI k.

ESEMPIO: SE $a_k = \frac{1}{2k+1} \searrow 0$

LE IPOTESI SONO SODDISFATTE, QUINDI LA SERIE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ CONVERGE.

MA CONVERGE ASSOLUTAMENTE?

CIOÈ, RISULTA $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} < +\infty$?

NO, PER CONFRONTO ASINTOTICO CON LA SERIE ARMONICA $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

INFATTI $\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{2k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \in (0,+\infty)$.

MA 19 OTT 2021

DIMOSTRAZIONE:

$$S_{2i+2} = S_{2i} + (-1)^{2i+1} a_{2i+1} + (-1)^{2i+2} a_{2i+2}$$

$$= S_{2i} - a_{2i+1} + a_{2i+2} \leq S_{2i} \leq S_0$$

$$S_{2i+1} = S_{2i-1} + (-1)^{2i} a_{2i} + (-1)^{2i+1} a_{2i+1}$$

$$= S_{2i-1} + a_{2i} - a_{2i+1} \geq S_{2i-1} \geq S_1$$

INOLTRE $S_{2i+1} = S_{2i} + (-1)^{2i+1} a_{2i+1}$

$$\leq S_{2i}$$

QUINDI

$$S_1 = a_0 - a_1 \leq S_{2i+1} \leq S_{2i} \leq a_0$$

PER LA COMPLETEZZA, POSSIAMO DEFINIRE

$$S_P = \lim_{i \to +\infty} S_{2i}, \quad S_D = \lim_{i \to +\infty} S_{2i+1}$$

INFINE, DALL'UGUAGLIANZA

$$S_{2i+1} = S_{2i} + (-1)^{2i+1} a_{2i+1}$$

SEGUE $S_D = S_P$ E QUINDI

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k = S_D = S_P .$$