Università degli Studi di Cagliari

**Corso di Laurea Triennale in Matematica**

# Successioni numeriche

prof. Antonio Greco

Anno accademico 2021/22

# SUCCESSIONI NUMERICHE

DEFINIZIONE: SI DICE SUCCESSIONE NUMERICA UNA FUNZIONE AVENTE PER DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{N}$ DEI NUMERI NATURALI E PER CODOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$ DEI NUMERI REALI.

NELLA DEFINIZIONE INTERVENGONO ALCUNI CONCETTI IMPORTANTI:

FUNZIONE: ESPRIME IL LEGAME FRA DUE O PIÙ VARIABILI. UNA FUNZIONE ARBITRARIA SI SCRIVE $y = f(x)$. ESEMPIO: $\boxed{y = \pi x^2}$. L'INSIEME DEI VALORI CHE $x$ PUÒ ASSUMERE SI CHIAMA DOMINIO. IL CODOMINIO È UN INSIEME AL QUALE APPARTENGONO TUTTI I VALORI ASSUNTI DA $y$.

NOTA: SPESSO IL CODOMINIO CONTIENE ELEMENTI (VALORI) CHE $y$ NON ASSUME! ESEMPIO: IL DOMINIO DI $\boxed{f(x) = \pi x^2}$ È L'INSIEME $\mathbb{R}$. TUTTE LE FUNZIONI DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1 HANNO PER CODOMINIO L'INSIEME $\mathbb{R}$: SONO FUNZIONI A VALORI REALI, IVI COMPRESA $f(x) = \pi x^2$ BENCHÉ RISULTI

$$f(x) \geq 0 \quad \text{PER OGNI } x \in \mathbb{R}$$

I SIMBOLI $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ SONO STATI INTRODOTTI DAL GRUPPO BOURBAKI NELLA SECONDA METÀ DEL NOVECENTO, INSIEME AI SIMBOLI $\mathbb{Z}$ (ZAHLEN = NUMERI), $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\emptyset$

L'INSIEME DEI NUMERI NATURALI È

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{OPPURE}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{A SECONDA DEGLI}$$

AUTORI.

LU 27 SET 2021

NUMERI REALI: SI POSSONO DEFINIRE IN VARI MODI

1. I NUMERI REALI SONO ALLINEAMENTI DECIMALI CON SEGNO, CIOÈ I NUMERI DEL TIPO $\pm c_1 \dots c_N, d_1 d_2 \dots$

2. I NUMERI REALI SONO LE SEZIONI DI DEDEKIND DEL CAMPO DEI NUMERI RAZIONALI

3. I NUMERI REALI SONO CLASSI DI EQUIVALENZA DI SUCCESSIONI FONDAMENTALI DI NUMERI RAZIONALI

4. L'INSIEME DEI NUMERI REALI È UN CAMPO COMPLETO E ORDINATO

ESTENDIAMO LA DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE NUMERICA: PONIAMO $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$ ECCETERA, E CHIAMIAMO SUCCESSIONE NUMERICA UNA FUNZIONE A VALORI REALI AVENTE PER DOMINIO UN $\mathbb{N}_k$.

NOTAZIONE: DI SOLITO NON SI SCRIVE $y = f(x)$ MA PIUTTOSTO $a_n = f(n)$ OPPURE

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

ESEMPI STORICI:

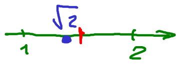
1. $a_n$ = L'AREA DELL'ENNESIMO POLIGONO DEL PROCEDIMENTO DI ARCHIMEDE

2. LA SUCCESSIONE DEI BABILONESI:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + f(a_n)}{2} = \dfrac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \end{cases} \qquad f(x) = \frac{2}{x}$$

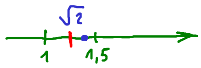
③ METODO DI BISEZIONE

DELIMITO $\quad 1 < \sqrt{2} < 2$



CALCOLO $\quad a_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$

DELIMITO $\quad 1 < \sqrt{2} < 1{,}5$



CALCOLO $\quad a_2 = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25$

DELIMITO $\quad 1{,}25 < \sqrt{2} < 1{,}5$

ECCETERA

IN TUTTI QUESTI ESEMPI SI RICAVANO RICORSIVAMENTE OVVERO INDUTTIVAMENTE I TERMINI $a_n$. SI SCRIVE:

$$a_{n+1} = g(a_n)$$

ESEMPI DIDATTICI

① $a_n = n$, CIOÈ LA SUCCESSIONE $0, 1, 2, \ldots$

② $a_n = \frac{1}{n}$, CIOÈ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

③ LA PROGRESSIONE GEOMETRICA
$a_n = b^n$ CON BASE $b \in \mathbb{R}$
COME $a_n = 2^n$ I CUI TERMINI SONO $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

④ LE COSTANTI: $a_n = c$, $c \in \mathbb{R}$
ESEMPIO: $0, 0, 0, 0, \ldots$

⑤ $a_n = (-1)^n$ I CUI TERMINI SONO $1, -1, 1, -1, \ldots$ È UN CASO PARTICOLARE DI ③: BASTA PORRE $b = -1$.

LU 27 SET 2021

LE SUCCESSIONI SERVONO PER AVERE APPROSSIMAZIONI DI NUMERI IMPORTANTI: $\pi, \sqrt{2}, \ldots$ CIÒ SI ESPRIME CON IL CONCETTO DI LIMITE:

DEFINIZIONE: SI DICE CHE UNA SUCCESSIONE $(a_n)$ CONVERGE AD UN $\ell \in \mathbb{R}$, DETTO LIMITE DELLA SUCCESSIONE, SE LE DISUGUAGLIANZE

$$-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon$$

QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$, SONO DEFINITIVAMENTE SODDISFATTE, CIOÈ VALGONO DA UN CERTO TERMINE IN POI, CIOÈ PER OGNI $n$ MAGGIORE DI UN VALORE OPPORTUNO, A VOLTE INDICATO CON $n_0$, $n_\varepsilon$, $\bar{n}$, $n(\varepsilon)$, ECC.

IN TAL CASO SI SCRIVE $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

OPPURE $a_n \longrightarrow \ell$.

MA 28 SET 2021

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

IN BASE ALLA DEFINIZIONE, DEVE AVERSI

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} - 0 < \varepsilon$$

DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$.

SI BADI CHE CON $\varepsilon$ SI DENOTA UN PARAMETRO REALE, DUNQUE $\varepsilon \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$ DUBBIO: BASTEREBBE PRENDERE $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ ?

TORNANDO ALL'ESERCIZIO, OSSERVIAMO CHE $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n}$ PER $n = 1, 2, 3, \ldots$ QUINDI PER OGNI $n$ (INTERO) POSITIVO, MENTRE RISULTA $\frac{1}{n} < \varepsilon$ PER OGNI $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

IN CONCLUSIONE, RISULTA $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ PER OGNI $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (CIOÈ DEFINITIVAMENTE).

**OSSERVAZIONE:** ESSENDO $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ RISULTA $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$ E PUÒ BENISSIMO ACCADERE CHE $\frac{1}{\varepsilon} \notin \mathbb{Z}$ QUINDI SCONSIGLIO DI SCRIVERE $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

COME FARE ?

1) RIFARE LA DEFINIZIONE DI LIMITE CON $\varepsilon \in \left\{\frac{1}{n},\ n=1,2,3,\dots\right\} \subset \mathbb{R}^+$

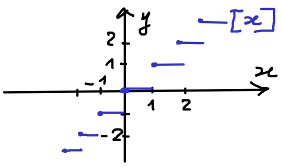
CIÒ FA SÌ CHE $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{Z}^+ = \{z \in \mathbb{Z} : z > 0\}$

QUINDI SI PUÒ PORRE $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$.

BASTA ANCHE $\varepsilon \in \left\{\frac{1}{10^n},\ n = 1,2,3,\dots\right\}$

OPPURE $\varepsilon \in \left\{\frac{1}{2^n},\ n = 1,2,3,\dots\right\}$

2) LA FUNZIONE $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$ (PARTE INTERA DI $x$) DEFINITA COME IL MASSIMO $z \in \mathbb{Z}$ TALE CHE $\boxed{z \le x}$, COSICCHÉ RISULTA $[x] \le x < [x] + 1$

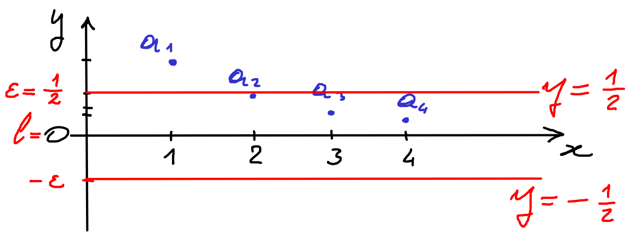



N.B. $[-0{,}5] = -1$

CON QUESTA FUNZIONE, POSSIAMO SCRIVERE

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

COSICCHÉ $n_0 \le \frac{1}{\varepsilon} < n_0 + 1$ E PER OGNI $n > n_0$ SI HA $n \ge n_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ QUINDI $\frac{1}{n} < \varepsilon$ COME RICHIESTO.

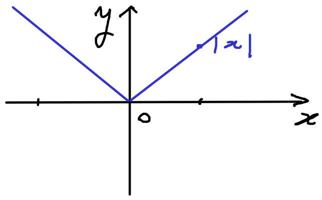





LA DEFINIZIONE DI LIMITE SI PUÒ RIFORMULARE USANDO IL VALORE ASSOLUTO:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \ge 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

DOVE SI INTENDE CHE $x \in \mathbb{R}$.




IL GRAFICO DI UNA $f$ AVENTE PER DOMINIO UN $S \subset \mathbb{R}$ È L'INSIEME $\Gamma = \{(x,y) : x \in S,\ y = f(x)\}$

SI NOTI CHE $|x| < \varepsilon$ SE E SOLO SE $-\varepsilon < x < \varepsilon$ QUINDI $a_n \to \ell$ SE E SOLO SE RISULTA $|a_n - \ell| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE PER OGNI $\varepsilon > 0$.

**OSSERVAZIONE:** $a_n \to 0$ SE E SOLO SE $|a_n| \to 0$ (CHI RIESCE A DIMOSTRARLO ?)

SIGNIFICATO GEOMETRICO: $|x| = \mathrm{dist}(x, 0)$ E, PIÙ IN GENERALE, $|x_1 - x_2| = \mathrm{dist}(x_1, x_2)$

**UNA TERZA FORMULAZIONE DELLA DEFINIZIONE DI LIMITE CON GLI INTERVALLI**

SI CHIAMA INTERVALLO APERTO LIMITATO L'INSIEME $(a,b) = ]a,b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, CHIUSO E LIMITATO $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$. TALVOLTA SI UTILIZZANO $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ E $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$. FIN QUI SI INTENDE $a, b \in \mathbb{R}$ E $a < b$. SI CHIAMANO INTERVALLI ILLIMITATI GLI INSIEMI $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}$, $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$.

SI PUÒ ANCHE DEFINIRE $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

CON QUESTE DEFINIZIONI SI PUÒ DIRE CHE

$a_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ SE RISULTA

$$a_n \in (\ell - \varepsilon, \ \ell + \varepsilon)$$

DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$.

INFATTI LA RELAZIONE $a_n \in (\ell - \varepsilon, \ \ell + \varepsilon)$ SIGNIFICA CHE $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

E QUINDI $-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon$.

## LIMITI INFINITI (SUCCESSIONI DIVERGENTI)

ESEMPI: $0, 1, 2, \ldots$

$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

SI DICE CHE $a_n$ DIVERGE A $+\infty$, E SI SCRIVE $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ OPPURE $a_n \longrightarrow +\infty$ SE PER OGNI $M \in \mathbb{R}$ RISULTA $a_n > M$ DEFINITIVAMENTE. È SUFFICIENTE CONSIDERARE $M \in \mathbb{R}^+$, OPPURE $M \in \mathbb{Z}^+$.

ANALOGAMENTE, SI SCRIVE $a_n \to -\infty$ SE RISULTA $a_n < M$ DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $M \in \mathbb{R}$. È SUFFICIENTE PRENDERE $M \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ OPPURE SCRIVERE $a_n < -M$ CON $M \in (0, +\infty)$.

ESERCIZIO: VERIFICARE CHE LE SUCCESSIONI

$0, 1, 2, \ldots$

$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

DIVERGONO A $+\infty$.

IL PROCEDIMENTO RISOLUTIVO IN QUATTRO PASSI DESCRITTO DA GEORGE PÓLYA (BUDAPEST, 1887 — PALO ALTO, 1985) NEL LIBRO « HOW TO SOLVE IT » (1945):

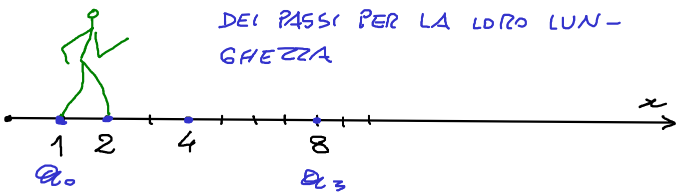
1. CAPIRE LA DOMANDA;
2. PROGETTARE UNA STRATEGIA;
3. METTERLA IN PRATICA;
4. VOLTARSI INDIETRO (LA RISPOSTA È PLAUSIBILE/VEROSIMILE?)

CONSIDERIAMO LA SUCCESSIONE $a_n = n$. 1) COSA DOBBIAMO FARE? VERIFICARE CHE LA DEFINIZIONE È SODDISFATTA. 2) PRENDIAMO $M \in \mathbb{R}^+$ E CI ACCERTIAMO CHE $a_n > M$ DEFINITIVAMENTE. 3) FACCIAMOLO: SI HA $a_n = n > M$ PER OGNI $n > n_0 = [M]$ QUINDI LA DEFINIZIONE È SODDISFATTA. 4) VOLTIAMOCI INDIETRO: COME CI ASPETTAVAMO, ABBIAMO VERIFICATO CHE $\lim_{n \to \infty} n = +\infty$.

CONSIDERIAMO ADESSO LA SUCCESSIONE $a_n = 2^n$. 1) LA DOMANDA CHIEDE DI VERIFICARE CHE $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$

2) PRENDIAMO $M \in \mathbb{R}^+$ E VERIFICHIAMO CHE $2^n > M$ DEFINITIVAMENTE

STRATEGIA: MOLTIPLICHIAMO IL NUMERO DEI PASSI PER LA LORO LUNGHEZZA




3) FACCIAMO I CALCOLI: LA LUNGHEZZA DEL PASSO È $a'_n = a_{n+1} - a_n$

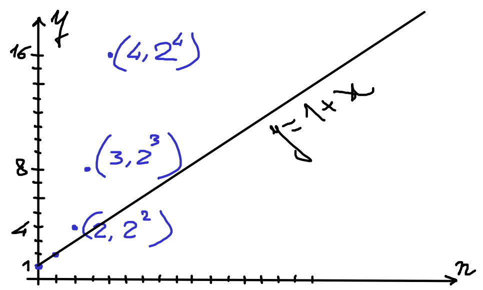
$$= 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1)$$
$$= 2^n \ge 1$$

QUINDI SCRIVIAMO IL TERMINE $a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \ge a_0 + n \cdot 1$

OTTENIAMO $a_n \ge 1 + n$

MA ALLORA, POSTO $n_0 = [M]$ SI HA CHE PER OGNI $n > n_0$ RISULTA $a_n \ge 1 + n > 1 + [M] > M$ DUNQUE $2^n > M$.

4) VOLTIAMOCI INDIETRO: TUTTO SEMBRA OK, MA FACCIAMO UN GRAFICO:




LA DISUGUAGLIANZA $2^n \ge 1 + n$ È UN CASO PARTICOLARE DELLA DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI $(1+x)^n \ge 1 + nx$ CHE VALE PER OGNI $x > -1$ (SI PONGA $x = 1$)

GI 30 SET 2021

SI PUÒ DIMOSTRARE, IN GENERALE, IL $\boxed{\text{TEOREMA DEL CONFRONTO}}$: SE DUE SUCCESSIONI $(a_n)$ E $(b_n)$ SODDISFANO LA DISUGUAGLIANZA $a_n \le b_n$ DEFINITIVAMENTE, E SE $a_n \to +\infty$, ALLORA $b_n \to +\infty$.

APPLICAZIONE: SAPENDO CHE $b_n = 2^n \ge 1 + n > n = a_n$ PER OGNI $n$, ED AVENDO VERIFICATO CHE $a_n \to +\infty$, SI PUÒ CONCLUDERE CHE $2^n \to +\infty$.

DIMOSTRAZIONE: VERIFICHIAMO CHE $b_n \to +\infty$. PRENDIAMO $M \in \mathbb{R}$ E CI CHIEDIAMO SE $b_n > M$ DEFINITIVAMENTE. PER IPOTESI SAPPIAMO CHE $\boxed{a_n \le b_n}$ PER OGNI $n > n_0$ E CHE $\boxed{a_n > M}$ PER OGNI $n > n_1$. POSTO $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ POSSO SCRIVERE $b_n \ge a_n > M$ PER OGNI $n > n_2$.

LE THÉORÈME DES GENDARMES

THE SANDWICH THEOREM

IL TEOREMA DEI CARABINIERI

IL TEOREMA DEL CONFRONTO:

DATE $a_n, b_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$ ED UNA TERZA SUCCESSIONE $(c_n)$ TALE CHE $a_n \le c_n \le b_n$ DEFINITIVAMENTE, RISULTA $\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$.

DIMOSTRAZIONE: PRESO $\varepsilon > 0$, VERIFICHIAMO CHE $\ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE. PER IPOTESI, RISULTA

$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ PER $n > n_0$

$\ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$ PER $n > n_1$

$a_n \le c_n \le b_n$ PER $n > n_2$

QUINDI, POSTO $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ RISULTA $\ell - \varepsilon < a_n \le \boxed{c_n} \le b_n < \ell + \varepsilon$ PER OGNI $n > n_3$ COME VOLEVASI DIM.

GI 30 SET 2021

TORNIAMO ALLA SUCCESSIONE $b^n$, CON BASE $b \in \mathbb{R}$. SI PUÒ PORRE $b_n = b^n$ E CALCOLARE $b_n' = b^{n+1} - b^n = b^n(b-1)$.

SE $b > 1$ PONIAMO $x_0 = b - 1 > 0$ E POSSIAMO SCRIVERE $b_n = b^n \geq 1 + n x_0$

LO STESSO RISULTATO SI OTTIENE DA

$$b^n = (1 + x_0)^n \geq 1 + n x_0 \quad (\text{BERNOULLI})$$

QUINDI $b^n > n x_0 > M \in \mathbb{R}^+$

PER $n > n_0 = \left[\frac{M}{x_0}\right]$ E SI CONCLUDE CHE $\lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty$ PER $b \in (1, +\infty)$.

VE 01 OTT 2021

CONSIDERIAMO ADESSO IL $\lim_{n \to \infty} 1^n$

FRAINTENDIMENTO: I LIMITI SI TROVANO METTENDO $\infty$ AL POSTO DI $n$

INOLTRE: « $1^\infty$ È UNA FORMA INDETERMINATA » (VERO, MA CHE VUOL DIRE?)

PROCEDIMENTO CORRETTO: LA SUCCESSIONE $a_n = 1^n$ È UNA SUCCESSIONE COSTANTE I CUI TERMINI SONO $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, ...

SI DIMOSTRA FACILMENTE CHE SE $a_n = c \in \mathbb{R}$ DEFINITIVAMENTE, ALLORA

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = c$$

INFATTI RISULTA $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE.

QUINDI, IN PARTICOLARE, POSSIAMO SCRIVERE $\lim_{n \to \infty} 1^n = 1$.

VE 01 OTT 2021

STUDIAMO ADESSO IL LIMITE

$$\lim_{n \to +\infty} a^n \quad \text{CON } a \in (0,1)$$

E VERIFICHIAMO CHE $a_n \to 0$.

OSSERVIAMO CHE IL RECIPROCO DI $a$, CHE È $b = \frac{1}{a}$, È MAGGIORE DI 1 E QUINDI $b^n \to +\infty$, CIOÈ RISULTA $b^n > M$ DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $M$. VERIFICHIAMO CHE $|a^n - 0| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE, CIOÈ $a^n < \varepsilon$, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$. QUESTA DISUGUAGLIANZA EQUIVALE A

$$b^n = \frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

QUINDI VALE DEFINITIVAMENTE.

QUANDO LA BASE È NULLA, LA SUCCESSIONE $0^n$ È NULLA PER OGNI $n \geq 1$ E QUINDI $\lim_{n \to +\infty} 0^n = 0$.

STUDIAMO ORA IL $\lim_{n \to +\infty} c^n$ CON $c \in (-1, 0)$. PER PROCEDERE, RICORDIAMO CHE $a_n \to 0$ SE E SOLO SE $|a_n| \to 0$ INFATTI $a_n \to 0$ SIGNIFICA $|a_n - 0| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE, QUALUNQUE SIA $\varepsilon > 0$. INVECE $|a_n| \to 0$ SIGNIFICA CHE

$$\big||a_n| - 0\big| = \big||a_n|\big| = |a_n| < \varepsilon,$$

CHE È LA STESSA DISUGUAGLIANZA.

MA ALLORA, PRESO $c \in (-1, 0)$ E POSTO $a = |c| \in (0,1)$ POSSIAMO SCRIVERE $\lim\limits_{n\to\infty} a^n =$

$$= \lim_{n\to+\infty} |c|^n = \lim_{n\to\infty} |c^n| = 0$$

QUINDI LA SUCCESSIONE $|c^n|$ TENDE A ZERO, E PERCIÒ $c^n \to 0$.

STUDIAMO ADESSO LA SUCCESSIONE $(-1)^n$ I CUI TERMINI SONO $1, -1, 1, -1, \dots$ INCONTRIAMO UNA SUCCESSIONE CHE NON AMMETTE LIMITE.

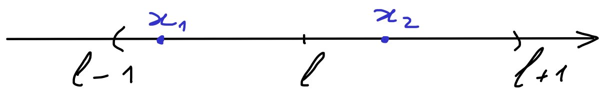
INCOMINCIAMO COL VERIFICARE CHE $(-1)^n \not\to +\infty$. A TAL FINE BASTA TROVARE UNA SOGLIA $M_0$ ANOMALA O ECCEZIONALE NEL SENSO CHE LA DISUGUAGLIANZA $(-1)^n > M_0$ NON VALGA DEFINITIVAMENTE: AD ESEMPIO, $M_0 = 2$.

SIMILMENTE SI DIMOSTRA CHE $(-1)^n \not\to -\infty$. PASSIAMO A VERIFICARE CHE $(-1)^n$ NON HA LIMITE FINITO. OSSERVIAMO CHE, POSTO $a_n = (-1)^n$, RISULTA $|a_n - a_k| = 2$ QUANDO $n$ E $k$ HANNO UNA DIVERSA PARITÀ, CIOÈ $n-k$ È DISPARI. IN PARTICOLARE, RISULTA $a_{n+1} - a_n =$

$$= (-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1)^n(-1-1)$$
$$= (-2)(-1)^n = \pm 2$$

VE 01 OTT 2021

MA ALLORA PRENDO $\varepsilon_0 = 1$ ED OSSERVO CHE I PUNTI DELL'INTERVALLO $(\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0)$ DISTANO FRA LORO MENO DI 2




QUINDI È IMPOSSIBILE CHE RISULTI $(-1)^n \in (\ell - 1, \ell + 1)$ DEFINITIVAMENTE.

SI CONCLUDE CHE LA SUCCESSIONE NON AMMETTE LIMITE. ALLA STESSA CONCLUSIONE SI GIUNGE PER LA SUCCESSIONE $(-b)^n$ CON $b > 1$. CONSIDERIAMO, AD ESEMPIO, $(-2)^n$ I CUI TERMINI SONO $1, -2, 4, -8, 16, \dots$

SI VEDE CHE $(-2)^n \not\to +\infty$ PERCHÉ CON $M_0 = 2$ (E CON UN ALTRO $M_0$?) LA DISUGUAGLIANZA $(-2)^n > M_0$ NON VALE DEFINITIVAMENTE: INFATTI NON VALE QUANDO $n$ È DISPARI.

SIMILMENTE SI VEDE CHE $(-2)^n \not\to -\infty$.

SI HA, INFINE, $(-2)^{n+1} - (-2)^n =$

$$= (-2)^n(-2-1) = -3(-2)^n$$

QUINDI $\left|(-2)^{n+1} - (-2)^n\right| =$

$$= |-3| \cdot |(-2)^n| = 3 \cdot 2^n \geq 3$$

E PERCIÒ PRENDENDO $\varepsilon_0 = 1$ LA RELAZIONE $(-2)^n \in (\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0)$ NON PUÒ VALERE DEFINITIVAMENTE, COMUNQUE SI PRENDA $\ell \in \mathbb{R}$.

RIEPILOGO: $\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & x>1 \\ 1, & x=1 \\ 0, & x\in(-1,1) \end{cases}$

SE $x \leq -1$, LA SUCCESSIONE $x^n$ NON AMMETTE LIMITE E SI DICE IRREGOLARE. POSSIAMO INOLTRE OSSERVARE CHE $(-1)^n \in [-1, 1]$. QUANDO RISULTA $a_n \in [m, M]$ PER OGNI $n$, LA SUCCESSIONE SI DICE LIMITATA, IL NUMERO $m \leq a_n$ SI DICE MINORANTE DELLA SUCCESSIONE, ED IL NUMERO $M \geq a_n$ SI DICE MAGGIORANTE. SI PUÒ PARLARE DI LIMITATEZZA INFERIORE: QUANDO $a_n \in [m, +\infty)$ PER OGNI $n$, LA SUCCESSIONE SI DICE LIMITATA INFERIORMENTE. OVVIAMENTE LE SUCCESSIONI LIMITATE POSSONO DIRSI LIMITATE INFERIORMENTE: $(-1)^n$ È LIMITATA INFERIORMENTE.
QUANDO $a_n \in (-\infty, M]$ PER OGNI $n$, LA SUCCESSIONE SI DICE LIMITATA SUPERIORMENTE.
VERIFICHIAMO CHE $(-2)^n$ È SUPERIORMENTE ILLIMITATA: PER CONFUTARE LA RELAZIONE $(-2)^n \in (-\infty, M]$ BASTA PRENDERE GLI ESPONENTI PARI $n = 2k$ COSICCHÉ $(-2)^n = (-2)^{2k} = 4^k > M$ DEFINITIVAMENTE.
SIMILMENTE, $(-2)^{2k+1} = (-2)(-2)^{2k} = -2\cdot 4^k \longrightarrow -\infty$ QUINDI LA SUCCESSIONE $(-2)^n$ È ANCHE ILLIMITATA INFERIORMENTE.

NOTA: ESSERE LIMITATA E AVERE LIMITE NON È LA STESSA COSA!
$(-1)^n$ È LIMITATA MA NON HA LIMITE.
SI DIMOSTRA, PERÒ, CHE LE SUCCESSIONI CONVERGENTI AD UN $\ell \in \mathbb{R}$ SONO LIMITATE: INFATTI, SE $a_n \to \ell$ ALLORA RISULTA $a_n \in (\ell-1, \ell+1)$ PER OGNI $n > n_1$. ESSENDO I TERMINI $a_0, \dots, a_{n_1}$ IN NUMERO FINITO, ESISTE UN INTERVALLO $[m, M]$ TALE CHE $a_n \in [m, M]$ PER OGNI $n$.



CON UN RAGIONAMENTO SIMILE SI DIMOSTRA CHE LE SUCCESSIONI DIVERGENTI A $\pm\infty$ SONO ~~INFERIORMENTE~~ SUP INFERIORMENTE LIMITATE.
INFATTI SE $a_n \longrightarrow +\infty$ ALLORA ESISTE $n_0$ TALE CHE $a_n > 0$ PER $n > n_0$. POSTO

$$m = \min\{a_0, \dots, a_{n_0}, 0\}$$

RISULTA $a_n \geq m$ PER OGNI $n$, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

VERO USO DELLE SUCCESSIONI:

SI CERCA UNA SUCCESSIONE $(a_n)$ IL CUI LIMITE $\ell$ SIA LA SOLUZIONE (INCOGNITA) DI UN PROBLEMA AL FINE DI USARE UN $a_n$ COME SURROGATO (APPROSSIMAZIONE) DI $\ell$.

USO DIDATTICO DELLE SUCCESSIONI:

DATA UNA SUCCESSIONE, SE NE CERCA IL LIMITE.

LA FUNZIONE $|x|$ È IMPORTANTE PER CONFRONTARE $a_n$ CON $\ell$.

SI PUÒ DEFINIRE

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

ALCUNE PROPRIETÀ:

1) INTERPRETAZIONE GEOMETRICA:

$$|x_1 - x_2| = \operatorname{dist}(x_1, x_2)$$

2) RISULTA $|x| \geq 0$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$, E $|x| = 0$ SE E SOLO SE $x = 0$.

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$ PER OGNI $x, y \in \mathbb{R}$

4) $|x^n| = |x|^n$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ E $n = 1, 2, 3, \ldots$

LU 04 OTT 2021

5) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE:

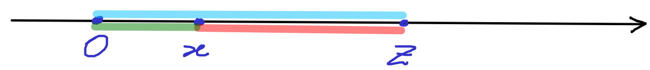
$$|x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

QUESTA FORMULA NE RAPPRESENTA DUE: $|x+y| \leq |x| + |y|$

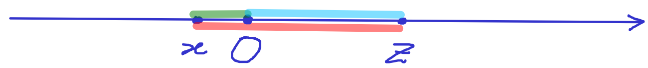
$|x - z| \leq |x| + |z|$,

CON $x, y, z \in \mathbb{R}$. ESSE SI TRASFORMANO L'UNA NELL'ALTRA PONENDO $y = -z$ E TENENDO CONTO DEL FATTO CHE $|-z| = |(-1) \cdot z| = |-1| \cdot |z| = |z|$.

INTERPRETAZIONE GRAFICA:




$$|x - z| < |z| < |x| + |z|$$




$$|x - z| = |x| + |z|$$

IN OGNI CASO, RISULTA $|x - z| \leq |x| + |z|$.

VERIFICA ANALITICA: ELEVIAMO AL QUADRATO AMBO I MEMBRI, CHE NON SONO NEGATIVI, E TROVIAMO

$$|x - z|^2 = |(x-z)^2| = (x-z)^2$$
$$= x^2 - 2xz + z^2$$

$$(|x| + |z|)^2 = |x|^2 + 2\,|x| \cdot |z| + |z|^2$$
$$= x^2 + 2\,|xz| + z^2$$

ANDIAMO A VEDERE SE

$$x^2 - 2xz + z^2 \leq x^2 + 2\,|xz| + z^2$$

E CIOÈ SE

$$-xz \leq |xz| = \max\{xz, -xz\},$$

E QUESTO È VERO.

LU 04 OTT 2021

# OPERAZIONI SUI LIMITI, ALGEBRA DEI LIMITI, TEOREMI SUI LIMITI

1) LIMITE DI UNA SOMMA: SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E SE $b_n \to b \in \mathbb{R}$ ALLORA

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a+b.$$

2) LIMITE DI UNA DIFFERENZA: SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E SE $b_n \to b \in \mathbb{R}$ ALLORA

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a-b.$$

ESEMPIO: POICHÉ $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ E $b_n = \frac{1}{2^n} \to 0$ POSSIAMO SCRIVERE

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \pm \frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

3) LIMITE DI UN PRODOTTO: SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E SE $b_n \to b \in \mathbb{R}$ ALLORA

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = ab.$$

ESEMPIO: $a_n = 2$ PER OGNI $n$, COSICCHÉ $a_n \to 2$, E $b_n = \frac{1}{n} \to 0$. IL TEOREMA IMPLICA CHE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

4) LIMITE DI UN RAPPORTO: SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E SE $b_n \to b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ALLORA $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$

DIMOSTRIAMO IL TEOREMA 1: VERIFICHIAMO CHE $|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE. PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE, SI HA

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b|$$
$$\leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

SAPPIAMO PER IPOTESI CHE $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ PER OGNI $n > n_0$ E CHE $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ PER OGNI $n > n_1$. MA ALLORA

$$|a_n + b_n - (a+b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

PER OGNI $n > n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

SI PUÒ ANCHE DIMOSTRARE CHE SE $a_n \to +\infty$ E SE $b_n$ È <u>INFERIORMENTE LIMITATA</u>, ALLORA $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$

INFATTI PER IPOTESI ESISTE $m \in \mathbb{R}$ TALE CHE $b_n \geq m$ PER OGNI $n$. INOLTRE, QUALUNQUE SIA $M \in \mathbb{R}$, RISULTA $a_n > M - m$ DEFINITIVAMENTE. SOMMANDO LE DUE DISUGUAGLIANZE TROVIAMO: $a_n + b_n > M$ DEFINITIVAMENTE, COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

OSSERVAZIONE: SE $b_n \to +\infty$ ALLORA È INFERIORMENTE LIMITATA E QUINDI SODDISFA L'IPOTESI. DUNQUE:

SE $a_n, b_n \to +\infty$ POSSIAMO DIRE CHE $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = +\infty$. CIÒ SI **ABBREVIA** SCRIVENDO:

$$+\infty + \infty = +\infty$$

LU 04 OTT 2021

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO: SE $a_n \to \ell \in (0,+\infty)$ OPPURE $a_n \to +\infty$, ALLORA RISULTA $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE.

COROLLARIO: SE NON RISULTA $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE, CIOÈ SE RISULTA $a_n \le 0$ PER INFINITI TERMINI, ALLORA IL $\lim_{n\to+\infty} a_n$ (SE ESISTE) È $\le 0$ (EVENTUALMENTE $-\infty$).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA:
SE $a_n \to \ell \in (0,+\infty)$ METTO UN $\varepsilon_0 \in (0,\ell)$ NELLA DEFINIZIONE DI LIMITE E TROVO $0 < \ell-\varepsilon_0 < a_n < \ell+\varepsilon_0$ DEFINITIVAMENTE.
SE, INVECE $a_n \to +\infty$, METTO UN $M_0$ POSITIVO NELLA DEFINIZIONE DI LIMITE, E TROVO $a_n > M_0 > 0$ DEFINITIVAMENTE.

APPLICAZIONE: SE $b_n \to b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ALLORA LA FRAZIONE $\frac{a_n}{b_n}$ È DEFINITIVAMENTE BEN DEFINITA $(b_n \neq 0)$.

5) LIMITE DI UNA POTENZA: SE $a_n \to a \in \mathbb{R}$ E SE $b_n \to b \in (0,+\infty)$ ALLORA $\lim_{n\to+\infty} b_n^{a_n} = b^a$.

ESEMPIO: $b_n = b \in (0,+\infty)$ PER OGNI $n$, E $a_n = \frac{1}{n} \to 0$. ALLORA

$$\lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b} = b^0 = 1$$

VERIFICA DIRETTA, NEL CASO $b \in (1,+\infty)$: OSSERVIAMO CHE $\sqrt[n]{b} > 1$ PER OGNI $n$ PERCHÉ $\sqrt[n]{b} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{b} = b > 1$.
RESTA DA VERIFICARE CHE

$$1-\varepsilon < 1 < \sqrt[n]{b} < 1+\varepsilon$$

DEFINITIVAMENTE. ESSENDO TERMINI POSITIVI, POSSIAMO SCRIVERE $b < (1+\varepsilon)^n$ E QUESTO È VERO DEFINITIVAMENTE PERCHÉ $(1+\varepsilon)^n \longrightarrow +\infty$.

VERIFICA DIRETTA, NEL CASO $b \in (0,1)$:
PRENDIAMO $a \in (0,1)$ E VERIFICHIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
POSTO $b = \frac{1}{a} > 1$, TROVIAMO CHE

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \longrightarrow 1$$

PER IL TEOREMA 4 SUL LIMITE DEL RAPPORTO.

UN'ALTRA SUCCESSIONE NOTEVOLE:

$$n^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(LE POTENZE DEI NUMERI NATURALI)

ESEMPIO: $\alpha = 1$, $n^1 = n \longrightarrow +\infty$

$n^2 = n \cdot n \geq n \longrightarrow +\infty$

$n^\alpha \geq n \longrightarrow +\infty$ PER $\boxed{\alpha \geq 1}$

LEGATO AL FATTO CHE LA FUNZIONE $b^x$, CON $b > 1$, È CRESCENTE NEL SENSO CHE SE $x_1 > x_2$ ALLORA $b^{x_1} > b^{x_2}$. ALLORA $n^\alpha \geq n^1 = n$

PRENDIAMO ALLORA $\alpha = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}^+$

E VERIFICHIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha =$

$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{n} = +\infty$ (CON $k$ FISSATO)

INFATTI LA DISUGUAGLIANZA $\sqrt[k]{n} > M$ CON $M \in \mathbb{R}^+$ EQUIVALE A $n > M^k$, QUINDI VALE DEFINITIVAMENTE.

MA 05 OTT 2021

PRENDIAMO $\alpha \in (0,1)$ E VERIFICHIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$. FISSIAMO $k > \frac{1}{\alpha}$ COSICCHÉ $\frac{1}{k} < \alpha$ E QUINDI $n^\alpha \geq n^{\frac{1}{k}}$ PER OGNI $n$. LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEL CONFRONTO.

MA 05 OTT 2021

PER FINIRE, VERIFICHIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} n^\beta = 0$ PER OGNI $\beta < 0$.

INFATTI, POSTO $\alpha = -\beta = |\beta| > 0$, SI HA CHE $|n^\beta| = n^\beta = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$ DEFINITIVAMENTE IN QUANTO LA DISUGUAGLIANZA EQUIVALE A $n^\alpha > \frac{1}{\varepsilon} = M$.

RIEPILOGO:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \text{SE } \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ 1, & \text{SE } \alpha = 0 \\ 0, & \text{SE } \alpha \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

 MA 05 OTT 2021

DEBATE: « $0^0 = 1$ »

VS. « $0^0$ È INDETERMINATO »

UN POLINOMIO A COEFFICIENTI REALI IN UNA INDETERMINATA È UN'ESPRESSIONE AVENTE LA FORMA

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

CHE SI SUOLE ABBREVIARE CON LA NOTAZIONE $\boxed{a_0 x^0} + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. IL VALORE $f(0) = a_0$ È L'ORDINATA DEL PUNTO DI INTERSEZIONE TRA IL GRAFICO DI $f(x)$ E L'ASSE $y$. SI INTENDE, PERCIÒ, CHE $0^0 = 1$. CIÒ NON È IN CONTRASTO CON « $0^0$ È INDETERMINATO » PERCHÉ QUESTA È UN'EFFICACE SINTESI DI UNA PROPRIETÀ DEI LIMITI:

DATE $a_n, b_n \to 0$ CON $b_n > 0$ LA SUCCESSIONE $b_n^{a_n}$, CHE HA LA FORMA $0^0$, PUÒ:

1) NON AVERE LIMITE;
2) DIVERGERE A $+\infty$;
3) CONVERGERE AD UN QUALUNQUE $\ell \in [0, +\infty)$ A SECONDA DI COME SONO FATTE $a_n$ E $b_n$.

PER LA DIMOSTRAZIONE, SI DEVE COSTRUIRE UN ESEMPIO PER CIASCUN CASO. VEDIAMONE QUALCUNO.

3) PONIAMO $b_n = a^n \to 0$ CON $a \in (0,1)$ E $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.

QUINDI LA SUCCESSIONE $b_n^{a_n}$ HA LA FORMA $0^0$, ED IL SUO LIMITE È

$$\lim_{n\to+\infty} b_n^{a_n} = \lim_{n\to+\infty} (a^n)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a = a \in (0,1)$$

PROBLEMA: SCELTO $\ell \geq 1$, TROVARE $a_n, b_n \to 0$ TALI CHE $b_n^{a_n} \to \ell$

PROBLEMA: TROVARE $a_n, b_n \to 0$ TALI CHE $b_n^{a_n} \to +\infty$

PROBLEMA: TROVARE $a_n, b_n \to 0$ TALI CHE $b_n^{a_n} \to 0$

PROBLEMA: TROVARE $a_n, b_n \to 0$ TALI CHE $b_n^{a_n}$ NON HA LIMITE

PROBLEMA: TROVARE $a_n, b_n \to 0$ TALI CHE $b_n^{a_n} \to \ell < 0$

UN LIMITE NOTEVOLE:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

CONSEGUENZA: PRENDO $b_n = \frac{1}{n} \to 0$ E $a_n = \frac{1}{n}$ E TROVO $\lim_{n\to+\infty} b_n^{a_n} = 1$ IN QUANTO $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1$.

PER VERIFICARE CHE $\sqrt[n]{n} \to 1$ OSSERVIAMO CHE $\sqrt[n]{n} \geq 1$ PER OGNI $n \geq 1$. QUINDI LA PRIMA DISUGUAGLIANZA IN

$$1 - \varepsilon < 1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$$

VALE BANALMENTE. VEDIAMO LA SECONDA: $(1+\varepsilon)^n > n$ DEFINITIVAMENTE, CIOÈ

$$\frac{(1+\varepsilon)^n}{n} > 1$$

PER VEDERLO, MOLTIPLICO E DIVIDO PER $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ OPPURE $(1+\delta)^n$ CON UN $\delta \in (0,\varepsilon)$ E TROVO CHE

$$\frac{(1+\varepsilon)^n}{n} = \frac{(1+\varepsilon)^n}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n} \cdot \frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{n} > \frac{\varepsilon}{2} b^n$$

SI OSSERVA CHE, POSTO $b = \frac{1+\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{2}} > 1$, SI HA $\frac{(1+\varepsilon)^n}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n} = b^n \longrightarrow +\infty$. INOLTRE, PER LA DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI, SI HA $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \geq 1 + n\frac{\varepsilon}{2}$, QUINDI

$$\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{n} \geq \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

MA 05 OTT 2021

QUINDI $\frac{(1+\varepsilon)^n}{n} \longrightarrow +\infty$ E PERCIÒ

$$\frac{(1+\varepsilon)^n}{n} > 1 \text{ DEFINITIVAMENTE}$$

GI 07 OTT 2021

# IL LATO OSCURO DELL'ANALISI: LA COMPLETEZZA DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI

LA PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI SI PUÒ FORMULARE IN DIVERSI MODI EQUIVALENTI. VEDIAMONE ALCUNI.

1) TUTTE LE SUCCESSIONI MONOTONE AMMETTONO LIMITE.

UNA SUCCESSIONE $(a_n)$ SI DICE MONOTONA SE È CRESCENTE O DECRESCENTE. SI DICE CRESCENTE (IN SENSO LATO) SE $a_n \leq a_{n+1}$ PER OGNI $n$, CRESCENTE STRETTAMENTE SE $a_n < a_{n+1}$ PER OGNI $n$, DECRESCENTE (IN SENSO LATO) SE $a_n \geq a_{n+1}$ PER OGNI $n$, STRETTAMENTE DECRESCENTE SE $a_n > a_{n+1}$ PER OGNI $n$.

SI PUÒ DIRE, PIÙ PRECISAMENTE, CHE OGNI SUCCESSIONE CRESCENTE IN SENSO LATO DIVERGE A $+\infty$ SE È ILLIMITATA SUPERIORMENTE, ALTRIMENTI CONVERGE AD UN LIMITE FINITO.

2) TUTTE LE SUCCESSIONI NUMERICHE FONDAMENTALI CONVERGONO AD UN LIMITE FINITO.

UNA SUCCESSIONE NUMERICA $(a_n)$ SI DICE FONDAMENTALE SE

$$\lim_{n,k \to +\infty} |a_n - a_k| = 0$$

CIOÈ SE PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ESISTE $n_0$ TALE CHE COMUNQUE SI PRENDANO $n, k > n_0$ RISULTA

$$|a_n - a_k| < \varepsilon$$

SI PUÒ DIRE CHE $(a_n)$ È UNA SUCCESSIONE DI CAUCHY.

3) LA PROPRIETÀ DELL'ESTREMO SUPERIORE: OGNI SOTTOINSIEME $S \subset \mathbb{R}$ NON VUOTO HA ESTREMO SUPERIORE.

DEFINIZIONE DELL'ESTREMO SUPERIORE.

SI DICE CHE $S$ È SUPERIORMENTE LIMITATO SE HA ALMENO UN MAGGIORANTE, CIOÈ SE ESISTE $M \in \mathbb{R}$ TALE CHE RISULTI $x \leq M$ PER OGNI $x \in S$. OVVIAMENTE OGNI $M' > M$ È A SUA VOLTA UN MAGGIORANTE! LA PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA CONSISTE NEL FATTO CHE SE $S \neq \emptyset$ HA ALMENO UN MAGGIORANTE, ALLORA L'INSIEME DI TUTTI I MAGGIORANTI AMMETTE MINIMO, CIOÈ ESISTE UN MAGGIORANTE CHE È IL PIÙ PICCOLO DI TUTTI: LO SI INDICA CON $\sup S$ (ESTREMO SUPERIORE DI $S$).

SE $S$ È ILLIMITATO SUPERIORMENTE (NON HA MAGGIORANTI) SI DEFINISCE $\sup S = +\infty$.

DEFINIZIONI E PROPRIETÀ ANALOGHE VALGONO PER L'ESTREMO INFERIORE $\inf S$.

GI 07 OTT 2021

4) OGNI SEZIONE DI DEDEKIND DELL'INSIEME DEI NUMERI REALI HA UN ELEMENTO SEPARATORE.

UNA SEZIONE DI DEDEKIND È UNA COPPIA DI SOTTOINSIEMI $A, B \subset \mathbb{R}$ NON VUOTI E DISGIUNTI TALI CHE $A \cup B = \mathbb{R}$ E CHE RISULTI $a < b$ PER OGNI $a \in A$ E $b \in B$.

UN ELEMENTO SEPARATORE È UN $\lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE RISULTI $a \leq \lambda < b$ PER OGNI $a \in A$ E $b \in B$, OPPURE $a < \lambda \leq b$ PER OGNI $a \in A$ E $b \in B$.

PERCHÉ LA COMPLETEZZA È COSÌ IMPORTANTE?

A LIVELLO DI BASE, ASSICURA L'ESISTENZA DELLA $\sqrt{2}$, CIOÈ DI QUEL NUMERO POSITIVO IL CUI QUADRATO È 2.

A LIVELLO AVANZATO, INTERVIENE NELLE DIMOSTRAZIONI DELL'ESISTENZA DELLA SOLUZIONE DEI PROBLEMI SOFISTICATI DELL'ANALISI MODERNA.

PROBLEMA: SE $a_n \in \mathbb{Z}$ È UNA SUCCESSIONE DI INTERI CRESCENTE NEL SENSO CHE $a_{n+1} \geq a_n$ PER OGNI $n$, SI PUÒ DIRE CHE AMMETTE LIMITE (FINITO O INFINITO)?

0) ESSENDO $a_{n+1} \geq a_n$ PER OGNI $n$, RISULTA $a_0 \leq a_n$ PER OGNI $n$, DUNQUE LA SUCCESSIONE $(a_n)$ È INFERIORMENTE LIMITATA, E SI HA

$$\min_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_0 .$$

1) SE È ILLIMITATA SUPERIORMENTE, ALLORA, PRESO ARBITRARIAMENTE $M \in \mathbb{R}$, ESSO NON È UN MAGGIORANTE E QUINDI ESISTE ALMENO UN TERMINE, DICIAMO $a_{n_0}$, TALE CHE $a_{n_0} > M$. MA SICCOME $(a_n)$ È CRESCENTE, SI HA $a_n \geq a_{n_0} > M$ PER OGNI $n > n_0$. QUINDI $a_n \longrightarrow +\infty$.

NOTA: I PUNTI 0 E 1 VALGONO, IN GENERALE, PER $a_n \in \mathbb{R}$. NON SERVE CHE $a_n \in \mathbb{Z}$.

2) SE, INVECE, $a_n \leq M$ PER OGNI $n$ E PER UN $M$ OPPORTUNO, ALLORA $a_n \in [a_0, M] \cap \mathbb{Z}$ PER OGNI $n$ E CIOÈ I VALORI DI $a_n$ SONO IN NUMERO FINITO, MENTRE I TERMINI $a_0, a_1, a_2, \ldots$ SONO INFINITI! QUINDI ESISTE ALMENO UN $z_0 \in [a_0, M] \cap \mathbb{Z}$ TALE CHE $a_n = z_0$ PER INFINITI $n$.

GI 07 OTT 2021

PRENDIAMO UN $a_{n_0} = z_0$ E DIMOSTRIAMO CHE $\boxed{a_n = z_0 \text{ PER OGNI } n > n_0}$.

INNANZITUTTO, PER LA MONOTONIA, RISULTA $a_n \geq a_{n_0} = z_0$ PER OGNI $n > n_0$. INOLTRE PER OGNI TERMINE $a_n$ DELLA SUCCESSIONE ESISTE UN $k > n$ TALE CHE $a_k = z_0$ PERCHÉ QUESTI SONO INFINITI. ANCORA PER LA MONOTONIA, RISULTA $a_n \leq a_k = z_0$ PER OGNI $n$. QUINDI $a_n = z_0$ PER OGNI $n > n_0$ COME AFFERMATO, E PERCIÒ

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = z_0 .$$

CON UN RAGIONAMENTO SIMILE SI DIMOSTRA LA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$.

2) PRENDIAMO

$$\begin{aligned} x_0 &= \pm c_1^0 \ldots c_{N_0}^0 , d_1^0 d_2^0 d_3^0 \ldots \\ &\wedge \\ x_1 &= \pm c_1^1 \ldots c_{N_1}^1 , d_1^1 d_2^1 d_3^1 \ldots \\ &\wedge \\ &\cdots \\ &\wedge \\ &M \end{aligned}$$

E OSSERVIAMO CHE $\pm c_1^k \ldots c_{N_k}^k \longrightarrow z_0 \in \mathbb{Z}$.

POI SPOSTIAMO LA VIRGOLA DI UN POSTO E OSSERVIAMO CHE $\pm c_1^k \ldots c_{N_k}^k d_1^k \longrightarrow z_0 d_1$

POI SPOSTIAMO LA VIRGOLA DI DUE POSTI, ECCETERA, E RESTA DEFINITO UN NUMERO REALE $z_0, d_1 d_2 d_3 \ldots = x$ TALE CHE

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x \in \mathbb{R} .$$

VE 08 OTT 2021

# ALCUNE CONSEGUENZE DELLA COMPLETEZZA DELL'INSIEME $\mathbb{R}$

LEMMA: QUALUNQUE SUCCESSIONE HA ALMENO UNA SOTTOSUCCESSIONE MONOTONA.

A PARTIRE DA UNA QUALUNQUE SUCCESSIONE $(a_n)$, SELEZIONANDO INFINITI TERMINI SI OTTIENE UNA SOTTOSUCCESSIONE.

ESEMPI: LE SUCCESSIONI DEI NUMERI PARI 2, 4, 6, 8, 10, ... E DEI QUADRATI PERFETTI 1, 4, 9, 16, ... SONO SOTTOSUCCESSIONI DELLA SUCCESSIONE $a_n = n$ DEI NUMERI NATURALI. LA SUCCESSIONE 1, 1, 1, ... NO (NON VALE RIPETERE). ESSA È UNA SOTTOSUCCESSIONE DI $a_n = (-1)^n$.

ALTRI ESEMPI: FISSATO $n_0$, LA SUCCESSIONE $b_n = a_{n+n_0}$ È UNA SOTTOSUCCESSIONE DI $(a_n)$: PER ESEMPIO, PONIAMO $n_0 = 3$ E TROVIAMO:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | ... |
| $b_n$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | ... |

N.B.: VALE $n_0 = 0$, CIOÈ OGNI SUCCESSIONE È UNA SOTTOSUCCESSIONE DI SE STESSA.

NOTAZIONE: LA GENERICA SOTTOSUCCESSIONE DI $(a_n)$ SI INDICA CON $(a_{n_k})$ DOVE $n_k$ È UNA SUCCESSIONE STRETTAMENTE CRESCENTE DI NUMERI NATURALI.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA: DISTINGUIAMO IL CASO IN CUI CI SONO UN NUMERO FINITO DI ELEMENTI DI PICCO (QUEI TERMINI $a_n$ TALI CHE $a_n \geq a_k$ PER OGNI $k > n$) DAL CASO IN CUI I PICCHI SONO INFINITI.

ESEMPIO: IN $a_n = n$ NON CI SONO PICCHI. IN $a_n = \frac{1}{n}$ TUTTI GLI ELEMENTI SONO PICCHI.

NEL PRIMO CASO ESISTE UN $n_0$ TALE CHE OGNI $a_n$ CON $n > n_0$ NON È UN PICCO. ALLORA PRENDO $a_{n_0+1}$, QUESTO NON È UN PICCO, QUINDI ESISTE $n_1 > n_0+1$ TALE CHE $a_{n_1} > a_{n_0+1}$. SICCOME $a_{n_1}$ NON È UN PICCO, ESISTE $n_2 > n_1$ TALE CHE $a_{n_2} > a_{n_1}$, ECCETERA, E LA SOTTOSUCCESSIONE $(a_{n_k})$ È STRETTAMENTE CRESCENTE.

SE, INVECE, CI SONO INFINITI PICCHI $a_{n_k}$, ESSI COSTITUISCONO UNA SOTTOSUCCESSIONE DECRESCENTE IN SENSO LATO PERCHÉ $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$.

COROLLARIO: OGNI SUCCESSIONE HA ALMENO UNA SOTTOSUCCESSIONE CHE AMMETTE LIMITE (FINITO O INFINITO)

DIMOSTRAZIONE: PRENDO UNA SOTTOSUCCESSIONE MONOTONA E INVOCO LA COMPLETEZZA.

**TEOREMA:** OGNI SUCCESSIONE LIMITATA HA ALMENO UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE AD UN LIMITE FINITO.

**DIMOSTRAZIONE:** PRENDO UNA SOTTOSUCCESSIONE MONOTONA, OSSERVO CHE ANCH'ESSA È LIMITATA, E INVOCO LA COMPLETEZZA.

**TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS**

OGNI SOTTOINSIEME $S \subset \mathbb{R}$ INFINITO E LIMITATO HA ALMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE, CIOÈ ESISTE UN $x_0 \in \mathbb{R}$ ED UNA SUCCESSIONE $a_n \in S$, CON $a_n \neq a_k$ SE $n \neq k$, TALE CHE $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x_0$.

**DIMOSTRAZIONE:** ESSENDO $S$ INFINITO, PRENDO UNA SUCCESSIONE $a_n \in S$ TALE CHE $a_n \neq a_k$ SE $n \neq k$. ESSENDO $S$ LIMITATO, ANCHE $(a_n)$ LO È, QUINDI PER IL TEOREMA PRECEDENTE HA UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE AD UN LIMITE FINITO $x_0$.

<u>ESEMPI:</u> $S = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$

È INFINITO E LIMITATO, E IL PUNTO $x_0 = 0$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE.

$S = (0,1)$ È INFINITO E LIMITATO, E TUTTI GLI $x_0 \in [0,1]$ SONO SUOI PUNTI DI ACCUMULAZIONE.

L'INSIEME $\mathbb{N}$ NON HA PUNTI DI ACCUMULAZIONE.

VE 08 OTT 2021

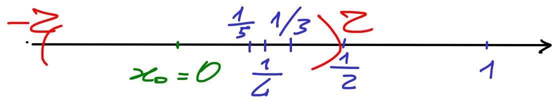
**PROBLEMA:** DIMOSTRARE CHE LA SUCCESSIONE $(a_n)$ DATA DA

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \end{cases}$$

CONVERGE A $\sqrt{2}$. SUGGERIMENTO: USARE QUESTI TEOREMI E QUELLI SUI LIMITI.

**DEFINIZIONE:** I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI UN SOTTOINSIEME $S \subset \mathbb{R}$ SI POSSONO EQUIVALENTEMENTE DEFINIRE COME SEGUE.

1) UN $x_0 \in \mathbb{R}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $S$ SE PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ L'INTERSEZIONE $S \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ HA INFINITI ELEMENTI.




ESEMPIO: $S = \left\{ \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$

2) UN $x_0 \in \mathbb{R}$ È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $S$ SE PER OGNI $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ L'INTERSEZIONE

$$\left(S \setminus \{x_0\}\right) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$
$$= \left(S \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\right) \setminus \{x_0\}$$
$$= S \cap \left((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}\right)$$

NON È VUOTA (IN OGNI INTORNO DI $x_0$ C'È ALMENO UN $x \in S$ DISTINTO DA $x_0$)

**NOTA:** GLI INSIEMI FINITI NON HANNO PUNTI DI ACCUMULAZIONE!

LA COMPLETEZZA ASSICURA LA BUONA POSITURA DI MOLTE DEFINIZIONI: RADICE QUADRATA, LOGARITMO, NUMERO DI NEPERO. QUEST'ULTIMO SI INDICA CON $e$ (EULER'S NUMBER) E SI DEFINISCE PONENDO

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

VERIFICHIAMO CHE LA SUCCESSIONE $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ AMMETTE LIMITE FINITO. IN VIRTÙ DELLA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$, BASTA VERIFICARE CHE È MONOTONA E LIMITATA.

1) MONOTONIA: RISULTA $a_n < a_{n+1}$ PER OGNI $n$. PER VERIFICARE CHE

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ LA RISCRIVO

$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ E POI COME

$$\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n > \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

E CIOÈ $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n+2}$

ORA, POSTO $x = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1$, PER LA DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI SO CHE

$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}$ E LA TESI

SEGUE DAL FATTO CHE

$$1 - \frac{n}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

VE 08 OTT 2021

2) LIMITATEZZA: RISULTA $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = b_n$

VERIFICHIAMO CHE $b_{n-1} > b_n$ PER OGNI $n \geq 2$. SI HA CHE

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

IN QUANTO $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

E CIOÈ $\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{1}{n}$

E QUESTO È VERO PERCHÉ, PONENDO $x = \frac{1}{n^2-1}$ NELLA DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI, TROVIAMO

$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1}$ E SI VEDE CHE $1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$.

QUINDI PER OGNI $n \geq 1$ SI HA:

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$