Esercizi Geometria e Algebra per Ingegneria Biomedica (Esercitazione 20/04/21)

(1) Si calcoli il rango delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i+1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Si determini il rango della seguente matrice al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 5 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & 4 & k \end{pmatrix}$$

(3) Dati i quattro vettori di $\mathbb{R}^4$ seguenti

$$v_1 = (1,1,1,1), \quad v_2 = (1,0,1,k), \quad v_3 = (1,k,1,0), \quad v_4 = (2,1,k,3)$$

si dica per quali valori di k i vettori formano una base di $\mathbb{R}^4$; per i valori per cui non sono una base, si dica la dimensione del sottospazio da essi generato.

(4) Data una base $\vec{OP_1}$, $\vec{OP_2}$, $\vec{OP_3}$ dello spazio tridimensionale dei vettori applicati in O, si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori seguenti

$$\vec{OP_1} + \vec{OP_2} + k\vec{OP_3}, \quad \vec{OP_2} + \vec{OP_3}, \quad \vec{OP_1} + \vec{OP_3}$$

giacciono tutti su uno stesso piano. Per tali valori, riuscite a scrivere l'equazione cartesiana del piano?

(5) Si trovi una base del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato dall'insieme delle soluzioni del seguente sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

(6) Si dica se esistono (e nel caso si inventi un esempio)

(i) Un sistema di 3 equazioni in 5 incognite con ∞^1 soluzioni

(ii) Un sistema 3 equazioni in 4 incognite con ∞^2 soluzioni

(iii) Un sistema di 4 equazioni in 3 incognite con una sola soluzione

(iv) Un sistema di 4 equazioni in 4 incognite con ∞^3 soluzioni

(7) Usando il metodo di riduzione a gradini, si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2x - z = 3 \\ x + 2y + kz = 1 \\ kx + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$