Esercizi Geometria e Algebra per Ingegneria Biomedica (Esercitazione 19/03/21)

(1) Data una base $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ ortonormale[1] dello spazio dei vettori geometrici nello spazio tridimensionale e dati i due vettori seguenti:

$$u = \vec{OP_1} + \vec{OP_3},\ v = -\vec{OP_1} + \vec{OP_2}$$

- Si determini l'angolo convesso tra u e v
- Si determini l'angolo convesso tra $u + v$ e i vettori coordinati $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$
- Si determinino i $k \in \mathbb{R}$ per cui $u - kv$ è perpendicolare a u.
- Detto p il piano su cui giacciono u e v, si dica se all'interno di questo piano ci sono vettori perpendicolari al vettore $\vec{OP_1}+2\vec{OP_2}+3\vec{OP_3}$ e li si determini

(2) Data una base ortonormale $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ dello spazio dei vettori geometrici nello spazio tridimensionale, si mostri che la seguente è ancora una base ortonormale

$$\vec{OQ_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{OP_1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{OP_2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{OP_3}$$
$$\vec{OQ_2} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{OP_1} + \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{OP_2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{OP_3}$$
$$\vec{OQ_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{OP_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{OP_3}$$

Supposto che $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}, \vec{OP_3}$ sia destrorsa, riuscite a capire se $\vec{OQ_1}, \vec{OQ_2}, \vec{OQ_3}$ è destrorsa o sinistrorsa?

(3) Dati tre vettori $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, si chiama *prodotto misto* il seguente

$$u \cdot (v \wedge w)$$

Si calcoli il prodotto misto

$$u = (1, 1, -1),\ v = (0, 1, 2),\ w = (3, 1, -2)$$

[1] Cioè formata da vettori ortogonali e di lunghezza 1

Si mostri poi che in generale il valore assoluto del prodotto misto di tre vettori u, v, w coincide con il volume del parallelepipedo che ha come spigoli u, v, w (suggerimento: ci si convinca prima che la lunghezza del prodotto vettoriale $v \wedge w$ coincide con l'area del parallelogramma con lati v e w)

(4) Sia $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}$ una base dello spazio dei vettori geometrici nel piano.

(i) Si dica perché $\vec{OQ_1} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2}, \vec{OQ_2} = -\vec{OP_1} + 2\vec{OP_2}$ è ancora una base

(ii) Se $(2, 5)$ sono le coordinate di un vettore v rispetto a $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}$ si trovino le coordinate di v rispetto $\vec{OQ_1}, \vec{OQ_2}$

Si rappresenti poi i vettori graficamente (partendo da una coppia $\vec{OP_1}, \vec{OP_2}$ a piacere) mettendo in evidenza le diverse coppie di coordinate rispetto alle due diverse basi.