Esercizi Geometria e Algebra per Ingegneria Biomedica (Esercitazione 14/05/21)

(1) Per ognuna delle seguenti matrici a entrate reali o complesse, si dica se sono invertibili, e in caso affermativo si determini l'inversa sia tramite operazioni elementari che tramite cofattori

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -11 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 & -2+i \\ 2 & -1+3i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifichi quindi il risultato ottenuto eseguendo il prodotto tra la matrice e la sua inversa.

(2) Si determini l'inversa della seguente matrice (se esiste) con il metodo che si ritiene più opportuno

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Si determini, con il metodo che si ritiene più opportuno, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la seguente applicazione lineare è invertibile e, per tali valori, si scriva la sua inversa f^{-1}

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx - y + z \\ 3x + y + 2kz \\ (1-k)x + 3y + kz \end{pmatrix}$$

(4) Si risolva il seguente sistema a coefficienti complessi mediante il metodo di Cramer (per i valori di $k \in \mathbb{C}$ per cui questo è possibile)

$$\begin{cases} ix_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = i + 1 \\ x_1 + x_2 + (1-i)x_3 = 2 \end{cases}$$

(5) Si mostri algebricamente che una riflessione nel piano è sempre invertibile e ha come inversa se stessa.